

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада¹.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



¹ Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

Mirjana Štrboja

FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH
SA VIZUALIZACIJOM

Novi Sad, 2016.

Naziv udžbenika: Funkcije više promenljivih sa vizualizacijom

Autor: Dr Mirjana Štrboja, docent
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Recenzenti: Dr Đurđica Takači, redovni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Dr Jelena Aleksić, vanredni profesor
Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu,

Dr Biljana Mihailović, vanredni profesor
Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu.

Izdavač: Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u
Novom Sadu

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

517.5(075.8)

ШТРБОЈА, Мирјана

Funkcije više promenljivih sa vizualizacijom [Elektronski izvori] / Mirjana Štrboja. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, 2016

Način dostupa (URL): www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/_strboja_funkcije_vise_promenljivih_sa_vizuali_zacijom.pdf. - Nasl. s naslovnog ekranata. - Zapis zasnovan na stanju na dan: 16.09.2016. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-366-8

а) Функције
COBISS.SR-ID 308343303

Sadržaj

Predgovor

v

Uputstvo za korišćenje interaktivnih slika

vi

1 Osnovni pojmovi

1

1.1	Tačke u prostoru	1
1.2	Rastojanje u \mathbb{R}^n	3
1.3	Vektorske funkcije jedne realne promenljive	5
1.3.1	Kriva u ravni	6
1.3.2	Kriva u prostoru	7
1.3.3	Granična vrednost vektorske funkcije	9
1.3.4	Neprekidnost vektorske funkcije	9
1.3.5	Izvod vektorske funkcije	9
1.3.6	Integral vektorske funkcije	10
1.4	Funkcije više promenljivih	11
1.4.1	Grafik realne funkcije više realnih promenljivih	11
1.5	Površi	12
1.5.1	Cilindrične površi	13
1.5.2	Obrtne površi	15
1.5.3	Površi drugog reda	17

2 Funkcije više promenljivih

19

2.1	Granična vrednost funkcije	19
2.2	Neprekidnost funkcije	24
2.3	Parcijalni izvodi funkcije više promenljivih	25
2.3.1	Geometrijsko tumačenje prvih parcijalnih izvoda	26
2.3.2	Parcijalni izvodi višeg reda	27
2.4	Tangentna ravan i linearna aproksimacija	29

2.5	Diferencijabilnost funkcije	32
2.5.1	Diferencijal funkcije	33
2.5.2	Diferencijali višeg reda	34
2.6	Aproksimacija funkcije polinomom	35
2.7	Parcijalni izvodi složene funkcije	38
2.8	Izvod implicitno definisane funkcije	41
2.9	Izvod funkcije u pravcu	43
2.10	Gradijent	44
2.10.1	Gradijent kao vektor normale	47
2.11	Ekstremne vrednosti funkcije	51
2.11.1	Uslovni ekstremi funkcije	61
3	Dvostruki integral	69
3.1	Primena dvostrukog integrala	72
3.1.1	Površina oblasti u ravni	72
3.1.2	Površina površi	73
3.2	Izračunavanje dvostrukog integrala	75
3.3	Smena promenljivih u dvostrukom integralu	77
3.3.1	Polarne koordinate	82
3.3.2	Eliptične koordinate	85
4	Trostruki integral	87
4.1	Izračunavanje trostrukog integrala	89
4.2	Smena promenljivih u trostrukom integralu	91
5	Vektorsko polje	97
5.1	Rotor i divergencija	101
6	Krivolinijski integral	105
6.1	Krivolinijski integral skalarne funkcije	105
6.1.1	Osobine krivolinijskog integrala skalarne funkcije	107
6.1.2	Izračunavanje krivolinijskog integrala skalarne funkcije	108
6.1.3	Geometrijska interpretacija krivolinijskog integrala skalarne funkcije	110
6.2	Krivolinijski integral vektorskog polja	113
6.2.1	Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije	117

6.3	Grinova teorema	121
7	Površinski integral	123
7.1	Površinski integral skalarne funkcije	123
7.2	Površinski integral vektorskog polja	126
7.2.1	Teorema o divergenciji	131
7.2.2	Stoksova teorema	132
	Literatura	137

Predgovor

Knjiga *Funkcije više promenljivih sa vizualizacijom* je namenjena studentima fizike, hemije kao i studentima drugih prirodnih nauka koji proučavaju funkcije više realnih promenljivih. Sadržina ove knjige se predaje u okviru predmeta Matematičke metode II i Matematika II za studente fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

Ova knjiga se ističe i razlikuje od drugih po tome što je dat akcenat na vizualizaciji pojmove vezanih za funkcije više realnih promenljivih. Vizualizacija pojmove je data pomoću interaktivnih slika čija je prednost ta što se trodimenzionalni objekti mogu posmatrati iz željenog ugla kao i mogućnost animacije određenih procesa. Iako su interaktivne slike konstruisane u programskom paketu *Wolfram Mathematica* za njihovo korišćenje nije potrebno poznavanje ovog programskega paketa.

Ovom prilikom se zahvaljujem prof. dr Đurđici Takači na korisnim sugestijama, podršci i ideji za nastanak ove knjige. Zahvaljujem se dr Jeleni Aleksić i dr Biljani Mihailović na svim primedbama i savetima koji su doprineli boljem kvalitetu ovog udžbenika.

Uputstvo za korišćenje interaktivnih slika

Za korišćenje interaktivnih slika je neophodno imati internet konekciju i instaliran *Wolfram CDF Player*, koji se može besplatno preuzeti na adresi www.wolfram.com/cdf-player.

Interaktivne slike se aktiviraju klikom na odgovarajuću sliku unutar teksta pri čemu se otvara HTML fajl sa slikom i njenim opisom.

Sa leve strane interaktivne slike su data polja za čekiranje (slika 1) i klizači (slika 2) pored kojih je naznačeno šta oni predstavljaju.

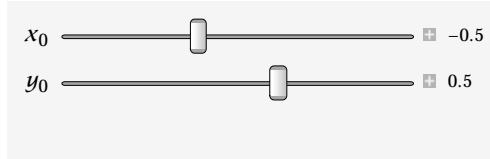
Polje za čekiranje je u obliku kvadrata i ono se aktivira klikom na taj kvadrat.

Klizač se pomera tako što se pritisnuta leva tipka miša drži na klizaču i pri tome se povlači miš. Kada se klikne na dugme označeno znakom + pored klizača (slika 2), pojavljuju se više opcija (slika 3) među kojima je dugme ► koje daje mogućnost animacije date slike, što može biti korisno u prikazivanju graničnih procesa.

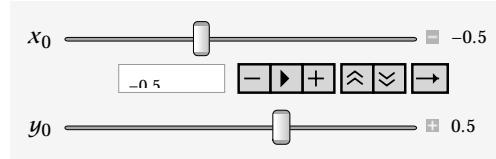
Čekiranjem datih polja dobijaju se navedeni pojmovi na slici

- kriva C koja prolazi kroz tačku P i pripada površi S
- tangenta na krivu C u tački P

Slika 1



Slika 2



Slika 3

Ugao posmatranja trodimenzionalnih objekata se može promeniti tako što se pritisnuta leva tipka miša drži na slici i pri tome se povlači miš.

Glava 1

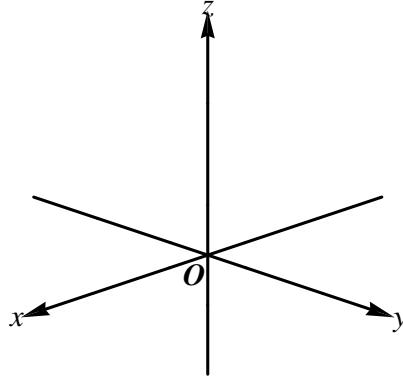
Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju su data objašnjenja vezana za pojmove i oznake koje se koriste u drugim poglavljima.

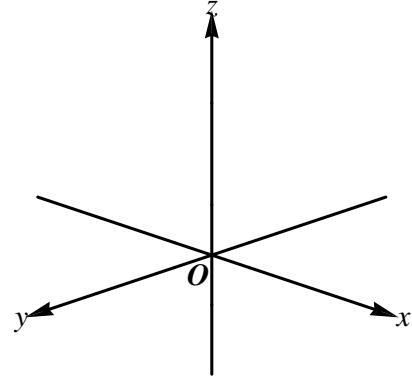
Za skupove realnih i prirodnih brojeva koristićemo njihove standardne oznake, a to su redom \mathbb{R} i \mathbb{N} . Dekartov proizvod $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je skup svih uređenih parova (x, y) takvih da x i y pripadaju skupu \mathbb{R} . Za skup $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ koristićemo oznaku \mathbb{R}^2 . Analogno, skup svih uređenih trojki (x, y, z) gde x , y i z pripadaju skupu \mathbb{R} će biti označavan sa \mathbb{R}^3 . U opštem slučaju, skup svih n -torki (x_1, x_2, \dots, x_n) realnih brojeva obeležavaćemo sa \mathbb{R}^n , gde je n prirodan broj, dok ćemo n -torku (x_1, x_2, \dots, x_n) kraće zapisivati kao \mathbf{x} .

1.1 Tačke u prostoru

Tačke u prostoru se predstavljaju pomoću trodimenzionalnog koordinatnog sistema. Ovaj sistem se sastoji od tri ose koje su međusobno normalne i koje se sekut u jednoj tački-koordinatnom početku O . Trodimenzionalni koordinatni sistem može biti desni ili levi. Da bismo utvrdili da li je sistem desni ili levi usmerimo palac u pozitivnom smeru x -ose, kažiprst u pozitivnom smeru y -ose i srednji prst u pozitivnom smeru z -ose. U zavisnosti od toga da li smo koristili prste desne ili leve šake posmatrani koordinatni sistem je desni ili levi. Na slici 1.1 se nalazi desni, a na slici 1.2 levi koordinatni sistem. U daljem radu ćemo koristiti desni trodimenzionalni koordinatni sistem. Koordinatne ose određuju tri koordinatne ravni: xy -ravan, zx -ravan i yz -ravan (slika 1.3). Koordinatne ravni dele prostor na osam oktanata. Prvi oktant je onaj koga određuju pozitivni delovi x , y i z -ose. Tačake A , B i

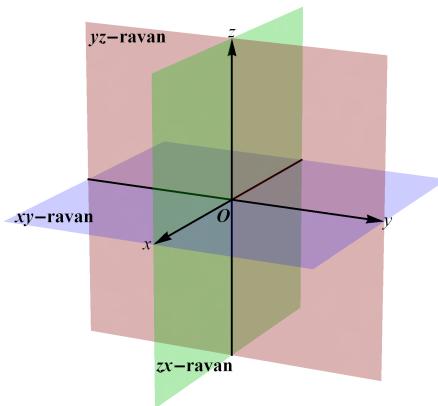


Slika 1.1

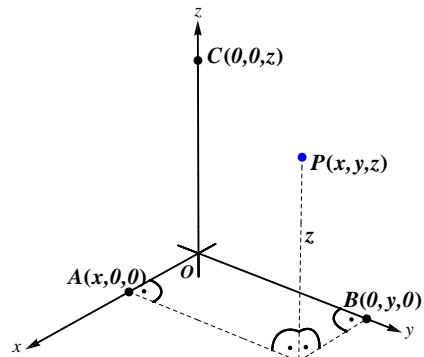


Slika 1.2

C određene redom uređenim trojkama $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ i $(0, 0, z)$ se nalaze redom na x , y i z -osi, njihov položaj odgovara redom polazajima realnih brojeva x , y i z na x , y i z -osi kao što je prikazano na slici 1.4. Tačka P određena uređenom trojkom (x, y, z) se predstavlja u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu tako što se konstruišu normale iz tačaka $A(x, 0, 0)$ i $B(0, y, 0)$ redom na x i y -osu u xy -ravni. U tački preseka tih normala se formira normala na xy -ravni. Na tako dobijenoj normali, na rastojanju $|z|$ od xy -ravni se nalaze tačke (x, y, z) i $(x, y, -z)$. Ako je $z > 0$, tačka P se nalazi iznad xy -ravni (slika 1.4). U slučaju da je $z < 0$, tačka P se nalazi ispod xy -ravni, dok za $z = 0$ tačka P pripada xy -ravni, što se može videti na interaktivnoj slici koja se otvara klikom na sliku 1.4.



Slika 1.3



Slika 1.4

Vektor položaja tačke P je vektor \overrightarrow{OP} . Vektori položaja tačaka $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ su redom vektori \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} . Svakoj tački (x, y, z) odgovara samo jedan vektor položaja i obrnuto.

Ako su $x, y, z \neq 0$, onda se tačka P takođe može predstaviti u koordinatnom sistemu pomoću kvadra koji obrazuju vektori $x\vec{i}$, $y\vec{j}$ i $z\vec{k}$. Tada je tačka P teme tog kvadra, koje ne pripada nijednoj od koordinatnih ravni (interaktivna slika 1.4).

1.2 Rastojanje u \mathbb{R}^n

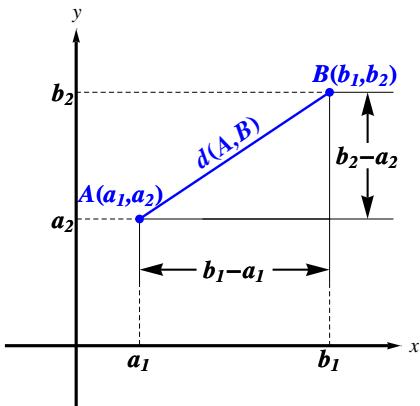
Podsetimo se, rastojanje između dva elementa x i y iz skupa realnih brojeva je

$$d(x, y) = |x - y|.$$

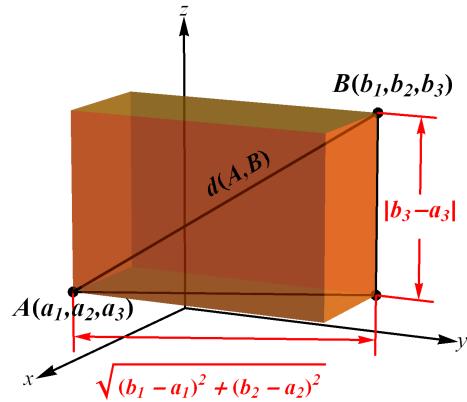
U skupu \mathbb{R}^2 za rastojanje između tačka $A(a_1, a_2)$ i $B(b_1, b_2)$ važi

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

što se dobija primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao sa hipotenuzom AB i katetama paralelnim x i y -osom. Na slici 1.5 je dat slučaj kad je $b_1 > a_1 > 0$ i $b_2 > a_2 > 0$.



Slika 1.5



Slika 1.6

Ako se primeni dva puta Pitagorina teorema na odgovarajuće trouglove sa slike 1.6, dobija se da je rastojanje od tačke $A(a_1, a_2, a_3)$ do tačke $B(b_1, b_2, b_3)$

u \mathbb{R}^3 dato relacijom

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

U opštem slučaju, rastojanje između tačke $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ i tačke $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ u \mathbb{R}^n je

$$d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2},$$

gde $n \in \mathbb{N}$.

Rastojanje u skupu \mathbb{R}^n nam omogućava da uvedemo pojmove lopte i okoline tačke.

Pretpostavimo da je \mathbf{a} element skupa \mathbb{R}^n i r pozitivan realan broj. Lopta sa centrom u tački \mathbf{a} i poluprečnikom r je skup svih tačaka \mathbf{x} iz skupa \mathbb{R}^n čije je rastojanje od tačke \mathbf{a} manje od r , tj. ako loptu sa centrom u tački \mathbf{a} i poluprečnikom r obeležimo sa $L(\mathbf{a}, r)$, tada je

$$L(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\mathbf{a}, \mathbf{x}) < r\}.$$

Imajući u vidu formulu za izračunavanje rastojanja između dve tačke, u skupu

- \mathbb{R} lopta $L(\mathbf{a}, r)$ je interval $(\mathbf{a} - r, \mathbf{a} + r)$,
- \mathbb{R}^2 lopta $L(\mathbf{a}, r)$, gde je $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, je krug sa centrom u tački \mathbf{a} i poluprečnikom r bez kružnice, tj. skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 < r^2\},$$

- \mathbb{R}^3 skup $L(\mathbf{a}, r)$, gde je $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, je lopta bez sfere, tj. sledeći skup:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 < r^2\}.$$

Neka je u nastavku ovog poglavlja \mathbf{a} element skupa \mathbb{R}^n i $r > 0$.

Okolina tačke \mathbf{a} je podskup skupa \mathbb{R}^n koji sadrži loptu $L(\mathbf{a}, r)$, za neko $r > 0$. Okolina tačke \mathbf{a} se označava sa $U(\mathbf{a})$.

Skup $O \subset \mathbb{R}^n$ je otvoren ako za svaku tačku iz tog skupa postoji okolina koja je cela sadržana u O .

Skup $Z \subset \mathbb{R}^n$ je zatvoren ako je njegov komplement $\mathbb{R}^n \setminus Z$ otvoren skup.

Primer 1.1. U skupu \mathbb{R} interval (c, d) je otvoren skup, dok je interval $[c, d]$ zatvoren skup. ■

Primer 1.2. U skupu \mathbb{R}^2 lopta $L(\mathbf{a}, r)$ je otvoren skup, a skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2\},$$

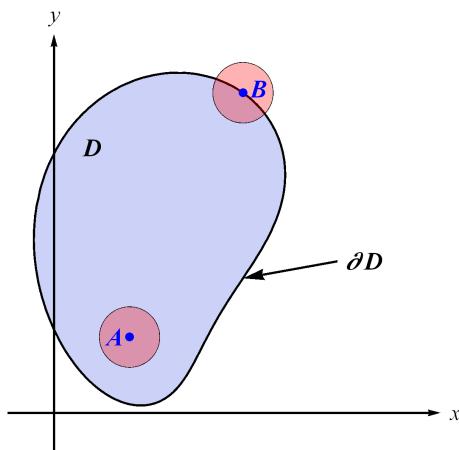
je zatvoren. ■

Tačka \mathbf{a} je unutrašnja tačka skupa D ako postoji neka lopta $L(\mathbf{a}, r)$ koja je celi sadržana u skupu D .

Tačka \mathbf{b} je rubna tačka skupa D ako svaka lopta sa centrom u toj tački sadrži tačke iz D i tačke koje ne pripadaju skupu D . Na slici 1.7 tačka A je unutrašnja tačka skupa $D \subset \mathbb{R}^2$, dok je tačka B rubna tačka istog skupa.

Skup svih rubnih tačaka skupa D se naziva rub skupa D i označava se sa ∂D .

Primer 1.3. Unutrašnje tačke intervala (c, d) i $[c, d]$, su sve tačke iz intervala (c, d) , a njihove rubne tačke su tačke c i d . ■



Slika 1.7

1.3 Vektorske funkcije jedne realne promenljive

U ovom poglavlju će biti dat kratak pregled osobina vektorskih funkcija jedne realne promenljive.

Funkcija čiji je domen podskup skupa realnih brojeva i kodomen skup vektora naziva se vektorska funkcija jedne realne promenljive. Dakle, vektorska funkcija jedne realne promenljive realnom broju t dodeljuje jedan vektor koji se označava sa $\vec{r}(t)$. Za vektorskiju funkciju $\vec{r}: X \rightarrow \mathbb{R}^3$ važi

$$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k},$$

gde su g , h i k realne funkcije jedne promenljive definisane na skupu X . Funkcije g , h i k se nazivaju komponentne funkcije vektorske funkcije \vec{r} .

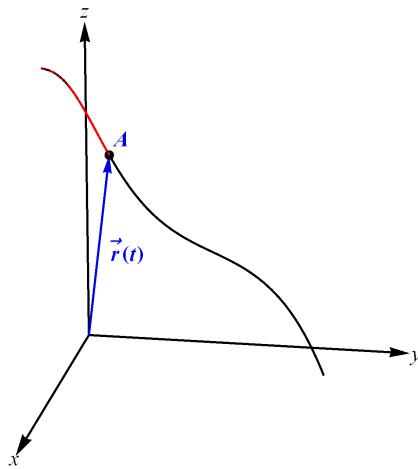
Primer 1.4. Ako je

$$\vec{r}(t) = (\sin t + t + 1)\vec{i} + t\vec{j} + \left(5 - \frac{1}{14}t^2 - \frac{1}{14}(1+t+\sin t)^2\right)\vec{k},$$

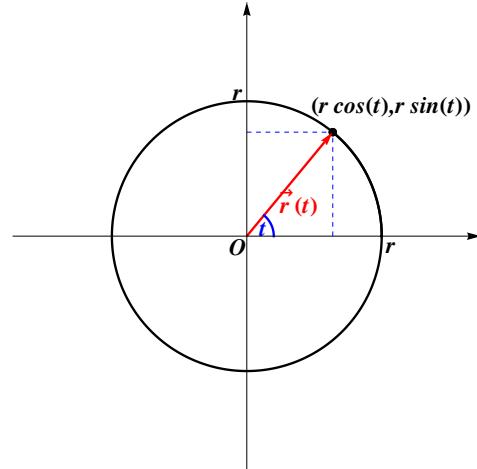
gde $t \in [-1, 5]$, tada su funkcije

$$g(t) = \sin t + t + 1, \quad h(t) = t \quad \text{i} \quad k(t) = 5 - \frac{1}{14}t^2 - \frac{1}{14}(1+t+\sin t)^2$$

komponentne funkcije vektorske funkcije \vec{r} . Na interaktivnoj slici 1.8 je dat skup $\{(g(t), h(t), k(t)) | t \in [-1, 5]\}$. Pomoću datog klizača je moguće videti vektor $\vec{r}(t)$ za različite vrednosti t iz intervala $[-1, 5]$. ■



Slika 1.8



Slika 1.9

1.3.1 Kriva u ravni

Ako su funkcije g i h neprekidne na intervalu $[a, b]$, tada se skup C , koji se sastoji od tačaka (x, y) gde je

$$x = g(t) \quad \text{i} \quad y = h(t), \tag{1.1}$$

dok t uzima sve vrednosti iz intervala $[a, b]$, naziva kriva u ravni. Jednačine (1.1) se nazivaju parametarske jednačine krive C . Ako je kriva C zadata parametarskim jednačinama, onda se kaže da je ona data u parametarskom obliku.

Primer 1.5. Napisati parametarske jednačine kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ gde je $r > 0$.

Rešenje. Parametarske jednačine kružnice sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnika r su

$$\begin{aligned}x &= r \cos t, \\y &= r \sin t.\end{aligned}$$

Parametar t pripada intervalu $[0, 2\pi]$.

Na interaktivnoj slici 1.9 se mogu zadati vrednosti parametru t pri čemu se vide odgovarajuće tačke kružnice. ■

U opštem slučaju, parametarske jednačine kružnice $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, sa centrom u tački (a, b) , gde je $a, b \in \mathbb{R}$ su

$$\begin{aligned}x &= a + r \cos t, \\y &= b + r \sin t,\end{aligned}$$

dok t pripada intervalu $[0, 2\pi]$.

Interaktivni prikaz parametrizacije elipse i duži u ravni se može videti klikom na sliku 1.9 i odabirom kartice „elipsa” i „duž”.

Ako je kriva data jednačinom $y = f(x)$ za $x \in [a, b]$, tada se ona može zadati pomoću parametra t na sledeći način

$$x = t, \quad y = f(t), \quad t \in [a, b].$$

1.3.2 Kriva u prostoru

Kriva u prostoru se definiše analogno kao kriva u ravni. Neka su g, h i k neprekidne funkcije na intervalu $[a, b]$. Kriva u prostoru je skup C , koji se sastoji od tačaka (x, y, z) gde je

$$x = g(t), \quad y = h(t) \quad \text{i} \quad z = k(t) \tag{1.2}$$

dok t uzima sve vrednosti iz intervala $[a, b]$. Jednačine (1.2) se nazivaju parametarske jednačine krive C .

Primer 1.6. Odrediti parametarske jednačine duži AB , gde je A tačka sa koordinatama (a_1, a_2, a_3) , a B tačka sa koordinatama (b_1, b_2, b_3) .

Rešenje. Obeležimo sa $\vec{r}(t_1)$ i $\vec{r}(t_2)$ redom vektore položaja tačke A i B (slika 1.10), tj.

$$\vec{r}(t_1) = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \quad (1.3)$$

$$\vec{r}(t_2) = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}. \quad (1.4)$$

Neka tačka D pripada pravoj koju određuju tačke A i B i neka se nalazi između njih. Vektori \overrightarrow{AD} i \overrightarrow{AB} imaju isti pravac i smer dok je dužina prvog vektora manja od dužine drugog što znači da postoji t iz intervala $(0, 1)$ takvo da je

$$\overrightarrow{AD} = t \overrightarrow{AB},$$

tj.

$$\overrightarrow{AD} = t(\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)).$$

Za vektor položaja $\vec{r}(t)$ tačke D važi

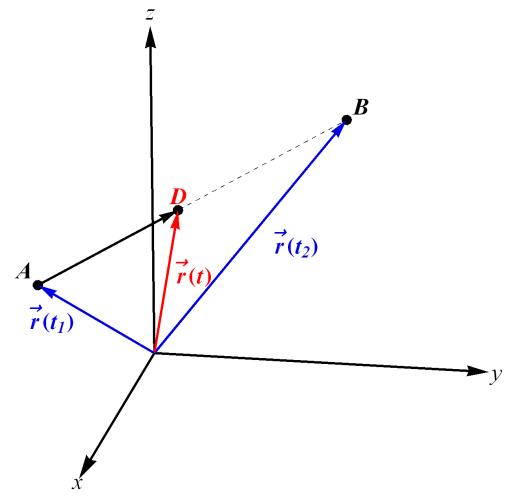
$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_1) + \overrightarrow{AD} \\ &= \vec{r}(t_1) + t(\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)). \end{aligned}$$

Odakle sledi na osnovu jednakosti (1.3) i (1.4), da su parametarske jednačine duži AB

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t(b_1 - a_1), \\ y &= a_2 + t(b_2 - a_2), \\ z &= a_3 + t(b_3 - a_3), \end{aligned}$$

dok $t \in [0, 1]$. ■

Slika 1.10



Kriva C zadata parametarskim jednačinama (1.2) je glatka ako su prvi izvodi funkcija g , h i k neprekidne funkcije na $[a, b]$ i $g'(t)\vec{i} + h'(t)\vec{j} + k'(t)\vec{j} \neq \vec{0}$ za svako $t \in (a, b)$. Za krivu C se kaže da je glatka po delovima ako se može podeliti na konačno mnogo glatkih krivih.

1.3.3 Granična vrednost vektorske funkcije

Kako bismo uveli pojmove neprekidnosti, izvoda i integrala vektorske funkcije jedne realne promenljive prvo je potrebno uvesti pojam granične vrednosti ovih tipova funkcija. Naime, granična vrednost vektorske funkcije \vec{r} u tački t_0 je po definiciji

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \vec{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \vec{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} k(t) \vec{k},$$

pod uslovom da postoje granične vrednosti funkcija g , h i k u tački t_0 .

1.3.4 Neprekidnost vektorske funkcije

Vektorska funkcija \vec{r} je neprekidna u tački t_0 ako je

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0),$$

pri čemu je potrebno da tačka t_0 pripada domenu vektorske funkcije \vec{r} . Na osnovu definicije granične vrednosti vektorske funkcije se može zaključiti da je vektorska funkcija neprekidna u tački t_0 ako i samo ako su komponentne funkcije neprekidne u t_0 .

1.3.5 Izvod vektorske funkcije

Izvod vektorske funkcije se definiše analogno izvodu realne funkcije jedne promenljive.

Ako postoji granična vrednost

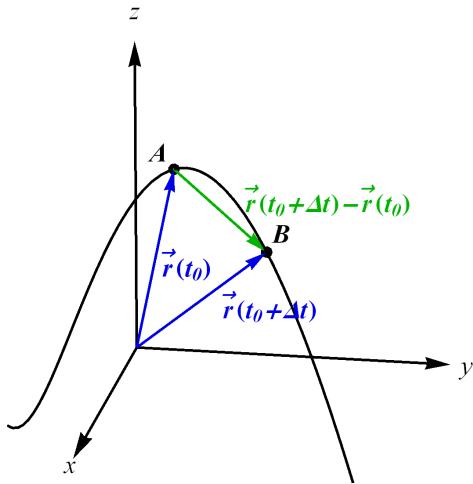
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t},$$

tada se ona naziva prvi izvod vektorske funkcije \vec{r} u tački t_0 i obeležava se sa $\vec{r}'(t_0)$. U tom slučaju se kaže da je \vec{r} diferencijabilna u tački t_0 .

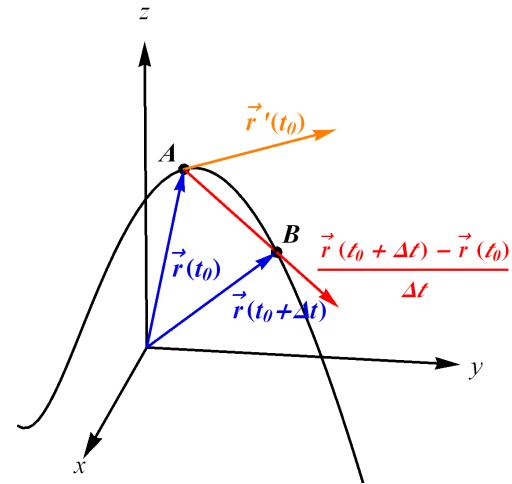
Na interaktivnoj slici 1.11 je dato geometrijsko tumačenje prvog izvoda vektorske funkcije. Obeležmo sa A i B redom tačke čiji su vektori položaja $\vec{r}(t_0)$ i $\vec{r}(t_0 + \Delta t)$. Tada je

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0).$$

Ako je $\Delta t > 0$, vektor $\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ ima isti pravac i smer kao vektor \overrightarrow{AB} (slika 1.12). U slučaju da je $\Delta t < 0$, vektor $\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ ima isti



Slika 1.11



Slika 1.12

pravac kao \overrightarrow{AB} , ali suprotan smer. Kada $\Delta t \rightarrow 0$ tačka B se približava tački A i u graničnom slučaju se vektor $\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$ poklapa sa vektorom koji leži na tangenti krive, koja je definisana sa \vec{r} u tački A . Vektor $\vec{r}'(t_0)$ se naziva tangentni vektor krive, koja je definisana sa \vec{r} , u tački A pod uslovom da je $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$.

Izvod vektorske funkcije u nekoj tački se može izračunati pronalaženjem izvoda komponentnih funkcija u toj tački. Naime, vektorska funkcija

$$\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k},$$

je diferencijabilna u tački t_0 ako su funkcije g , h i k diferencijabilne u toj tački i

$$\vec{r}'(t_0) = g'(t_0)\vec{i} + h'(t_0)\vec{j} + k'(t_0)\vec{k}.$$

1.3.6 Integral vektorske funkcije

Pretpostavimo da su komponentne funkcije g , h i k vektorske funkcije \vec{r} neprekidne na intervalu $[a, b]$. Određeni integral vektorske funkcije \vec{r} na intervalu $[a, b]$ je

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b g(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int_a^b h(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int_a^b k(t) dt \right) \vec{k}.$$

1.4 Funkcije više promenljivih

Podsetimo se, funkcija f je pravilo kojim se svakom elementu skupa X pridružuje tačno jedan element skupa Y pri čemu je potrebno da X i Y budu neprazni skupovi. Skup X se naziva domen, a skup Y kodomen funkcije f . Da bi se istaklo da je skup X domen i skup Y kodomen funkcije f , koristi se sledeći zapis

$$f : X \rightarrow Y.$$

Funkcija čiji je domen podskup skupa \mathbb{R}^n i kodomen podskup od \mathbb{R}^m , gde su n i m prirodni brojevi, je jedan od najvažnijih pojmljova matematičke analize.

Ranije smo se susretali sa funkcijama čiji su domen i kodomen podskupovi skupa \mathbb{R} . Takve funkcije se nazivaju realne funkcije jedne realne promenljive.

Funkcija čiji je domen podskup od \mathbb{R}^n , gde je $n > 1$, se naziva funkcija više realnih promenljivih. U narednim poglavljima ćemo izučavati realne i vektorske funkcije više realnih promenljivih.

Realna funkcija više realnih promenljivih je funkcija čiji je domen podskup skupa \mathbb{R}^n , gde je $n > 1$, a kodomen podskup od \mathbb{R} . Ova funkcija se naziva još i skalarno polje.

Ako je domen funkcije podskup od \mathbb{R}^n , a kodomen podskup od \mathbb{R}^m , gde je $n > 1$ i $m > 1$, tada se ta funkcija naziva vektorska funkcija više realnih promenljivih.

1.4.1 Grafik realne funkcije više realnih promenljivih

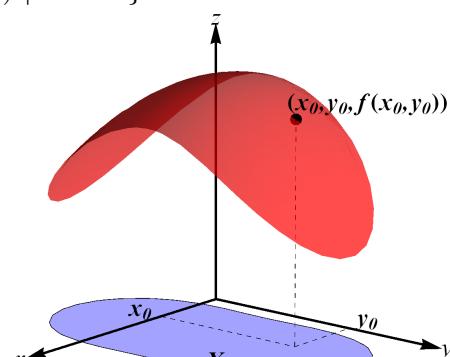
Grafik funkcije $f : X \rightarrow Y$, gde je $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, je sledeći skup

$$G_f = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x} \in X\}.$$

Dakle, grafik realne funkcije dve realne promenljive ($n = 2$, $m = 1$) je

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in X\}.$$

Grafik realne funkcije dve realne promenljive se predstavlja u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu kao skup tačaka $(x, y, f(x, y))$ dok (x, y) uzima sve vrednosti iz domena X (slika 1.13).



Slika 1.13

Primer 1.7. Funkcija

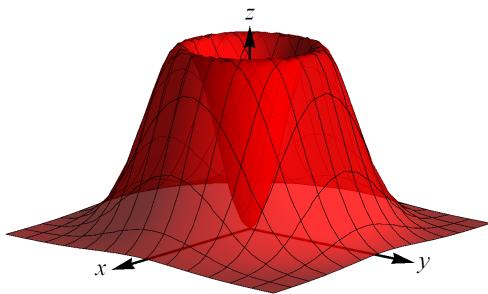
$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{2-x^2-y^2}$$

je definisana na celom skupu \mathbb{R}^2 . U trodimenzionalnom koordinatnom sistemu tačke $(x, y, f(x, y))$ gde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ su date na slici 1.14. ■

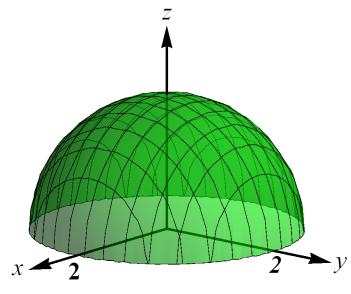
Primer 1.8. Domen funkcije

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

je skup $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Dakle, domen funkcije f je krug sa centrom u $(0, 0)$ i poluprečnikom 2. Kako je $f(x, y) \geq 0$, u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu tačke $(x, y, f(x, y))$ dok $(x, y) \in D$ se nalaze iznad skupa D koji leži u xy -ravni (slika 1.15). ■



Slika 1.14



Slika 1.15

1.5 Površi

Neka je skup D deo xy -ravnih u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu, ograničen nekom zatvorenom krivom i f realna funkcija dve realne promenljive definisana na D . Ako predstavimo sve tačke $(x, y, f(x, y))$ dok $(x, y) \in D$ u koordinatnom sistemu, dobijamo površ. Naime, skup svih tačaka $(x, y, f(x, y))$, dok $(x, y) \in D$, obrazuje površ, a jednačina te površi je

$$z = f(x, y). \quad (1.5)$$

U nastavku ćemo se najviše baviti površima koje su zadate pomoću jednačine (1.5) dok je funkcija f neprekidna na skupu D (pojam neprekidnosti funkcije dve promenljive je uveden u odeljku 2.2). Jednačina površi može imati i sledeći oblik

$$F(x, y, z) = 0. \quad (1.6)$$

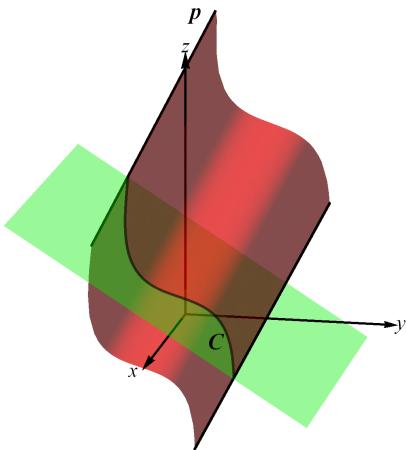
Dakle, skup svih tačaka (x, y, z) , koje zadovoljavaju jednačinu (1.6) se naziva površ.

Primer 1.9. Površ, čija je jednačina $z = (x^2 + y^2)e^{2-x^2-y^2}$, je data na slici 1.14. ■

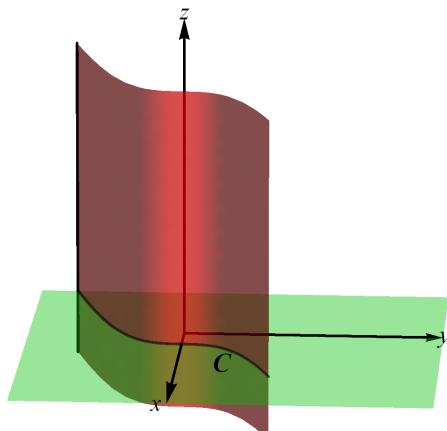
Primer 1.10. Na slici 1.15 je data površ $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. ■

1.5.1 Cilindrične površi

Neka je C kriva u ravni i p prava koja nije paralelna toj ravni. Cilindrična površ je skup svih pravih koje su paralelne pravoj p i koje seku krivu C (interaktivna slika 1.16). Kriva C se naziva direktrisa, a prave paralelne pravoj p se nazivaju izvodnice ili generatrise.



Slika 1.16



Slika 1.17

U nastavku ćemo se baviti samo cilindričnim površima čije su izvodnice normalne na koordinatnu ravan u kojoj se nalazi direktrisa.

Neka jednačina površi ima oblik

$$F(x, y) = 0. \quad (1.7)$$

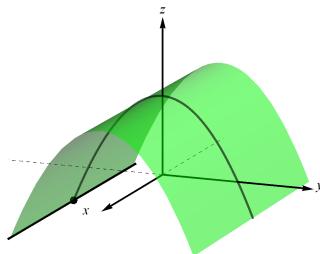
Posmatrajmo krivu C u xy -ravni koja je određena jednačinom (1.7). Pošto prva i druga koordinata tačke na posmatranoj površi zadovoljavaju jednačinu (1.7), a treća koordinata te tačke može biti proizvoljna, to su izvodnice te površi paralelne z -osi i ona seče xy -ravan po krivoj C (interaktivna slika 1.17, kartica „površ $F(x, y) = 0$ “).

Analogno, izvodnice površi date jednačinom $F(z, x) = 0$ su paralelne y -osi, a izvodnice površi $F(y, z) = 0$ su paralelne x -osi. Ovakve površi se mogu videti otvarenjem interaktivne slike 1.17 i odabirom odgovarajuće kartice.

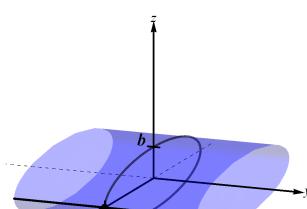
Primer 1.11. Nacrtati cilindrične površi date jednačinama:

$$\mathbf{a)} \ z = 1 - y^2, \quad \mathbf{b)} \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0, \quad \mathbf{c)} \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

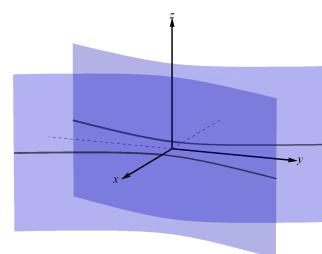
Rešenje. **a)** Površ data jednačinom $z = 1 - y^2$ ima izvodnice paralelne x -osi, a njena direktrisa je parabola u yz -ravni sa jednačinom $z = 1 - y^2$. Ova površ je data na interaktivnoj slici 1.18.



Slika 1.18



Slika 1.19



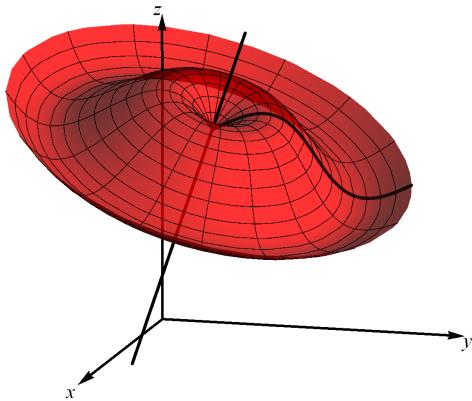
Slika 1.20

b) Presek date cilindrične površi i zx -ravni je elipsa čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, gde je $a, b > 0$. Izvodnice su joj paralelne y -osi. Interaktivni prikaz ove površi se može videti klikom na sliku 1.19 i odabirom kartice „ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ “.

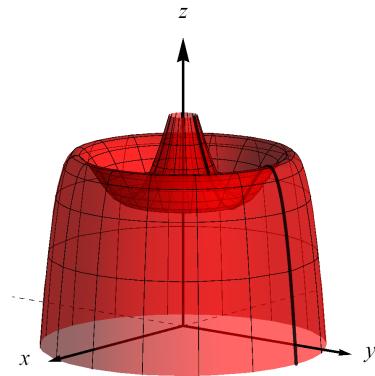
c) Hiperbola u xy -ravni sa jednačinom $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dok je $a, b > 0$, je direktrisa ove površi. Njene izvodnice su paralelne z -osi (interaktivna slika 1.20, kartica „ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ “). ■

1.5.2 Obrtne površi

Površi koje nastaju obrtanjem (rotacijom) krive u prostoru oko neke prave se nazivaju obrtne površi (interaktivna slika 1.21).



Slika 1.21



Slika 1.22

Specijalan slučaj obrtnih površi je površ nastala obrtanjem krive C koja se nalazi u yz -ravni zadate jednačinama

$$z = f(y), \quad x = 0, \quad (1.8)$$

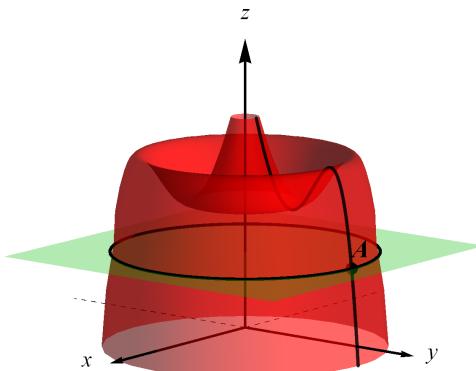
oko z -ose. Na interaktivnoj slici 1.22 je data jedna takva površ.

Posmatrajmo tačku $A(0, y_0, f(y_0))$ na krivoj C (slika 1.23). Prilikom obrtanja krive C oko z -ose tačka A se kreće po kružnici k u ravni paralelnoj xy -ravni. Ta kružnica je određena jednačinama

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad z = f(r),$$

gde je $r = |y_0|$. Sledi da svaka tačka (x, y, z) posmatrane površi koja se nalazi na kružnici k zadovoljava jednačinu

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (1.9)$$



Slika 1.23

Naime, obrtna površ, koja nastaje obrtanjem krive iz yz -ravni zadate jednačinama (1.8) oko z -ose, je određena jednačinom (1.9).

Ako je kriva C zadata jednačinama

$$F(y, z) = 0, \quad x = 0,$$

tada je

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

jednačina površi, koja nastaje obrtanjem krive C oko z -ose. U slučaju da se obrtanje krive C vrši oko y -ose, tada dobijena površ ima jednačinu $F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

Pored obrtnih površi koje nastaju rotacijom krive iz yz -ravni oko y -ose ili z -ose posmatraćemo i površi koje nastaju obrtanjem krivih iz xy -ravni oko x -ose ili y -ose i iz zx -ravni oko x -ose ili z -ose.

Obртна površ, koja nastaje obrtanjem krive zadate jednačinom $F(x, y) = 0$ iz xy -ravni oko y -ose, ima jednačinu $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$. Slično, jednačina $F(\sqrt{y^2 + z^2}, x) = 0$ određuje površ nastalu rotacijom krive $F(z, x) = 0$ iz zx -ravni oko x -ose. Odabirom odgovarajuće kartice na interaktivnoj slici 1.23 se mogu videti grafički prikazi opisanih postupaka kojima se dobijaju obrtni površi.

Primer 1.12. Nacrtati površ koja nastaje rotacijom

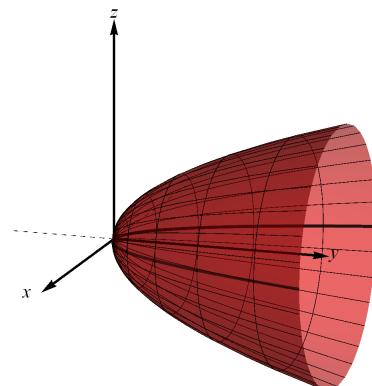
- a) parabole $y = x^2$ u xy -ravni oko y -ose,
- b) kružnice $x^2 + z^2 = r^2$ u zx -ravni oko x -ose, gde je $r > 0$,
- c) kružnice $(y - a)^2 + z^2 = r^2$ u yz -ravni oko z -ose, gde je $0 < r < a$.

Odrediti njihove jednačine.

Rešenje. a) Površ koja nastaje obrtanjem parabole $y = x^2$ u xy -ravni oko y -ose je određena jednačinom $y = x^2 + z^2$. Ova površ je data na interaktivnoj slici 1.24.

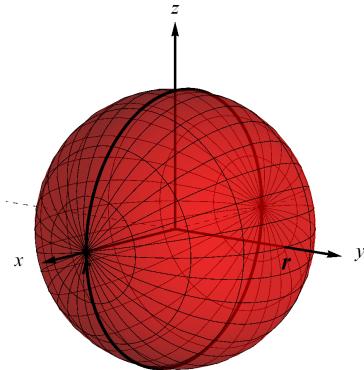
b) Obrtanjem kružnice $x^2 + z^2 = r^2$ u zx -ravni oko x -ose dobija se sfera sa jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (interaktivna slika 1.25, kartica „ $x^2 + y^2 = r^2$ oko x -ose”).

c) Površ koja se dobija rotacijom kružnice $(y - a)^2 + z^2 = r^2$ u yz -ravni

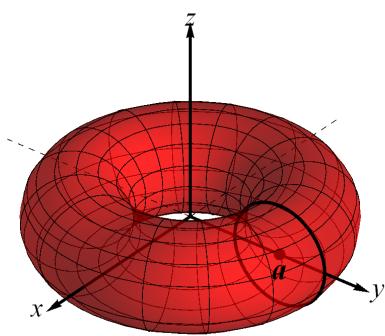


Slika 1.24

oko z -ose, gde je $0 < r < a$ se naziva torus. Jednačina dobijenog torusa je $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$ (interaktivna slika 1.26, kartica „ $(y - a)^2 + z^2 = r^2$, $0 < r < a$ oko z -ose“). ■



Slika 1.25



Slika 1.26

1.5.3 Površi drugog reda

Neka je površ S data jednačinom $F(x, y, z) = 0$. Ako je funkcija F polinom drugog stepena po promenljivama x, y i z , tada se površ S naziva površ drugog reda. Dakle, površ drugog reda je određena jednačinom

$$\begin{aligned} a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4yz + a_5zx + a_6xy \\ + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0, \end{aligned} \quad (1.10)$$

gde je bar jedan od koeficijenata a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6 različit od nule.

Odabirom pogodnog koordinatnog sistema, jednačina (1.10) se može svesti na jedan od sledećih oblika:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d \quad \text{ili} \quad ax^2 + by^2 + cz = 0.$$

U tabeli 1.1 su dati primeri površi drugog reda čije jednačine imaju jedan od prethodna dva oblika. Klikom na tabelu 1.1 otvara se interaktivni prikaz navedenih površi gde je moguće menjati koeficijente u jednačinama tih površi.

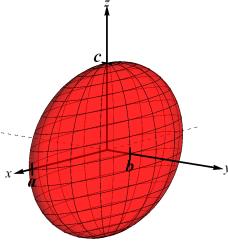
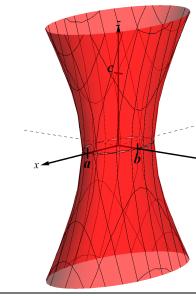
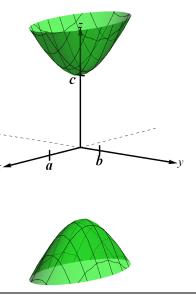
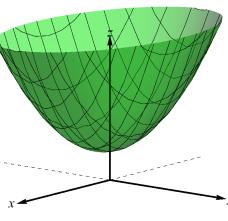
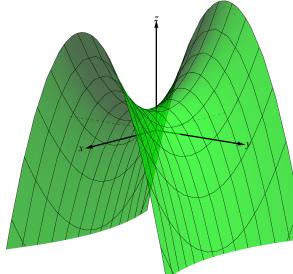
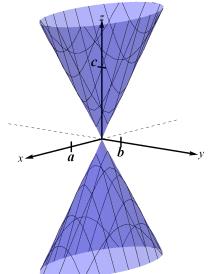
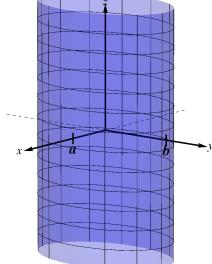
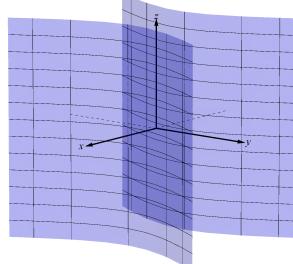
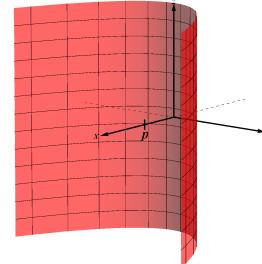
Elipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $a, b, c > 0$ 	Jednokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$ $a, b, c > 0$ 	Dvokrilni hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$ $a, b, c > 0$ 
Eliptički paraboloid $2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q},$ $p, q > 0,$ 	Hiperbolički paraboloid $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$ $p, q > 0,$ 	Konus $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$ $a, b, c > 0$ 
Eliptički cilindar $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a, b > 0,$ 	Hiperbolički cilindar $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$ $a, b > 0,$ 	Parabolički cilindar $y^2 = 2px,$ $p > 0$ 

Tabela 1.1

Glava 2

Funkcije više promenljivih

2.1 Granična vrednost funkcije

Prvo ćemo uvesti pojam granične vrednosti realne funkcije dve realne promenljive, a zatim granične vrednosti vektorske funkcije više realnih promenljivih.

Definicija 2.1. Neka skup $D \subset \mathbb{R}^2$ sadrži neki krug sa centrom u tački (x_0, y_0) , osim možda tačku (x_0, y_0) . Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, ima graničnu vrednost G u tački (x_0, y_0) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in D)$$

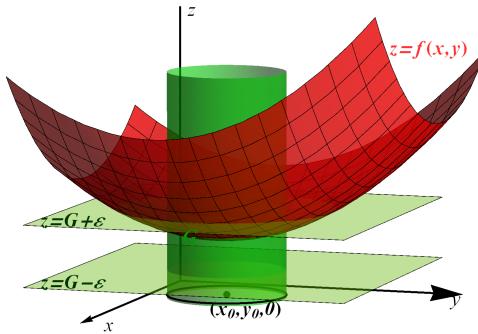
$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - G| < \varepsilon.$$

Sa

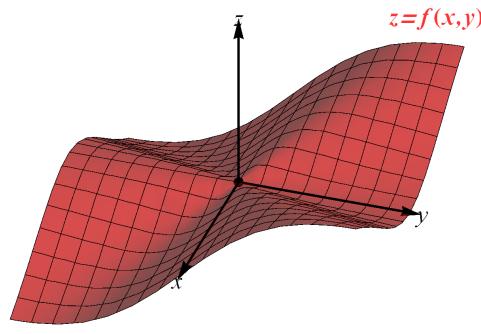
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = G$$

se označava da je G granična vrednost funkcije f u tački (x_0, y_0) .

Geometrijski, G je granična vrednost funkcije f u tački (x_0, y_0) ako se za svaki fiksiran broj $\varepsilon > 0$, može odrediti $\delta > 0$ tako da se deo površi $z = f(x, y)$, unutar cilindra, čija je projekcija na xy -ravan kružnica sa centrom u (x_0, y_0) i poluprečnikom δ nalazi između ravni $z = G - \varepsilon$ i $z = G + \varepsilon$. Interaktivna slika sa geometrijskim tumačenjem definicije 2.1 se može videti klikom na sliku 2.1.



Slika 2.1



Slika 2.2

Primer 2.1. Pokazati po definiciji da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$.

Rešenje. Neka je ε proizvoljno odabran pozitivan broj.

Za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \{(0, 0)\}$ važi

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ako uzmemo da je $\delta = \varepsilon$, na osnovu prethodne nejednakosti imamo sledeću implikaciju

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - 0| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \varepsilon. \blacksquare$$

Klikom na sliku 2.2 otvara se geometrijska interpretacija primera 2.1.

Tački (x_0, y_0) se može prići krećući se po bilo kojoj krivoj u ravni. Ako granična vrednost funkcije postoji, ona ne zavisi od krive po kojoj se približavamo posmatranoj tački, tj. granična vrednost funkcije je jedinstvena.

Primer 2.2. Ispitati da li postoje sledeće granične vrednosti:

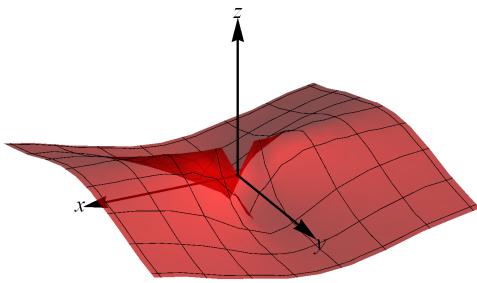
$$\text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^4 + y^2}$$

Rešenje. a) Neka je k proizvoljno odabran realan broj. Kada se tačka (x, y) približava tački $(0, 0)$ po pravoj $y = kx$, tada je

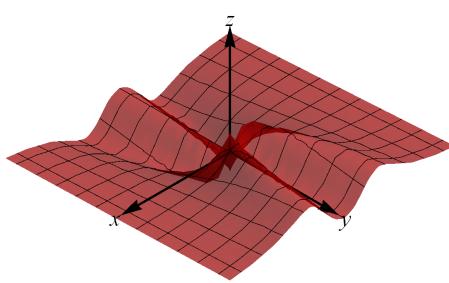
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - k^2x^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{1 - k^2}{1 + k^2}.$$

Dakle, za različite vrednosti koeficijenta k dobijaju se različite granične vrednosti funkcije kad se tačka (x, y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y = kx$. Sledi da granična vrednost $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ne postoji.

Interaktivni prikaz ovog primera se može videti klikom na sliku 2.3.



Slika 2.3



Slika 2.4

b) Ako se za fiksiran broj k , tačka (x, y) približava tački $(0,0)$ po pravoj $y = kx$, tada je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5kx^3}{x^4 + k^2x^2} = 0.$$

Ako izaberemo za krivu, po kojoj se tačka (x, y) približava tački $(0,0)$, parabolu $y = x^2$, tada je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{5}{2}.$$

Dakle, granična vrednost $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^4 + y^2}$ ne postoji.

Klikom na sliku 2.4 se otvara interaktivni prikaz ovog primera. ■

U opštem slučaju su sledeće granične vrednosti različite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) \right), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y).$$

Primer 2.3. Ako je $f(x, y) = \frac{2x - y}{x + 3y}$, ispitati da li sledeće granične vrednosti postoje:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad \text{b)} \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right), \quad \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

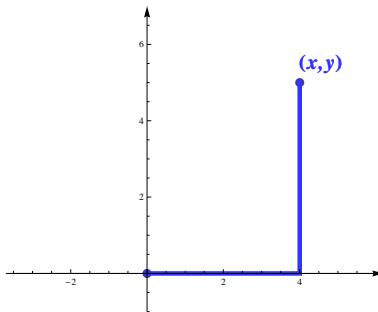
Rešenje. a) Ako se prvo odredi granična vrednost date funkcije kad $y \rightarrow 0$ dok je x fiksirano, dobija se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{2x - y}{x + 3y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2.$$

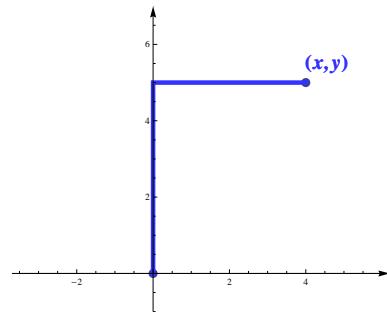
b) Ako sada prvo fiksiramo y i odredimo graničnu vrednost date funkcije kada $x \rightarrow 0$, dobijamo

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + y}{x - 3y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-3y} = -\frac{1}{3}.$$

c) Granična vrednost pod a) je u stvari granična vrednost funkcije f kad (x, y) teži $(0, 0)$ duž krive date na slici 2.5, a granična vrednost pod b) je granična vrednost funkcije f kad (x, y) teži $(0, 0)$ duž krive date na slici 2.6. Kako su duž ove dve krive po kojima se približavamo tački $(0, 0)$, dobijene različite granične vrednosti, to granična vrednost $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ne postoji. ■



Slika 2.5



Slika 2.6

Osobine granične vrednosti funkcije

Ako funkcije f i g imaju granične vrednosti G i H , respektivno, u tački (x_0, y_0) , onda važi

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = G + H,$$

$$ii) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} (f(x, y) \cdot g(x, y)) = G \cdot H,$$

$$iii) \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{G}{H}, \text{ ako je } H \neq 0,$$

Primer 2.4. Odrediti sledeće granične vrednosti:

$$\mathbf{a}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, \quad \mathbf{b}) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^3 + 2x - y}{(x + y)^2}, \quad \mathbf{c}) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x(y+1)}{\sqrt{y+5} - 2}.$$

Rešenje.

$$\mathbf{a}) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x + y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - xy + y^2) = 0.$$

$$\mathbf{b}) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^3 + 2x - y}{(x + y)^2} = \frac{1}{9}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x(y+1)}{\sqrt{y+5} - 2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{x(y+1)}{\sqrt{y+5} - 2} \frac{\sqrt{y+5} + 2}{\sqrt{y+5} + 2} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} (x(\sqrt{y+5} + 2)) = 8. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Granična vrednost vektorske funkcije n promenljivih, $n > 2$, se definiše na sledeći način:

Definicija 2.2. Neka skup $D \subset \mathbb{R}^n$ sadrži neku loptu sa centrom u tački $\mathbf{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n}) \in \mathbb{R}^n$, osim možda tačku \mathbf{x}_0 . Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, ima u tački \mathbf{x}_0 graničnu vrednost $G \in \mathbb{R}^m$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D) \quad 0 < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), L) < \varepsilon.$$

Sa

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = G$$

se označava da je G granična vrednost funkcije f u tački \mathbf{x}_0 .

2.2 Neprekidnost funkcije

Pojam neprekidnosti funkcije dve promenljive se definiše analogno pojmu neprekidnosti realnih funkcija jedne promenljive.

Definicija 2.3. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $D \subset \mathbb{R}^2$ i $(x_0, y_0) \in D$. Funkcija f je neprekidna u tački (x_0, y_0) ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in D)$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Vezu između neprekidnosti funkcije f u tački (x_0, y_0) i granične vrednosti funkcije f u tački (x_0, y_0) daje sledeća teorema.

Teorema 2.1. Ako je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $D \subset \mathbb{R}^2$ i skup D sadrži neki krug sa centrom u tački (x_0, y_0) , tada je funkcija f neprekidna u tački (x_0, y_0) ako i samo ako važi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna na A , $A \subset D$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa A .

Neprekidnost funkcije n promenljivih, $n > 2$ se definiše na sledeći način:

Definicija 2.4. Neka tačka \mathbf{x}_0 pripada skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ je neprekidna u tački \mathbf{x}_0 ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x} \in D) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) < \varepsilon.$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 2.2. Ako je $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ i skup D sadrži neku loptu sa centrom u tački \mathbf{x}_0 , tada je funkcija f neprekidna u tački \mathbf{x}_0 ako važi

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Ako su funkcije $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ neprekidne u tački $\mathbf{x}_0 \in D$, tada su u toj tački neprekidne i funkcije koje predstavljaju njihov

- i) zbir $f + g$;
- ii) razliku $f - g$;
- iii) proizvod $f \cdot g$;
- iv) količnik $\frac{f}{g}$, ako su vrednosti funkcije g različite od nule u nekoj okolini tačke \mathbf{x}_0 .

2.3 Parcijalni izvodi funkcije više promenljivih

U ovom odeljku će biti data definicija prvih parcijalnih izvoda realne funkcije dve promenljive, a zatim definicija prvih parcijalnih izvoda realne funkcije n , $n > 2$, promenljivih.

Definicija 2.5. Neka je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa $D \subset \mathbb{R}^2$ i f realna funkcija dve promenljive čiji je domen skup D . Prvi parcijalni izvod funkcije f u odnosu na promenljivu x u tački (x_0, y_0) , u oznaci $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, je

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

pod uslovom da postoji granična vrednost sa desne strane jednakosti.

Prvi parcijalni izvod funkcije f u odnosu na promenljivu y u tački (x_0, y_0) , u oznaci $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$, je dat sa

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

pod uslovom da postoji granična vrednost sa desne strane jednakosti.

Prvi parcijalni izvodi po x i po y u tački (x_0, y_0) se označavaju i sa $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$.

Analogno se definišu prvi parcijalni izvodi realne funkcije n promenljivih pri čemu je $n > 2$.

Definicija 2.6. Neka je $\mathbf{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$ unutrašnja tačka skupa $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$ i $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Prvi parcijalni izvod funkcije f u odnosu na promenljivu x_i u tački \mathbf{x}_0 , u oznaci $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$, je

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_i} + h, \dots, x_{0_n}) - f(x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})}{h},$$

pod uslovom da postoji granična vrednost sa desne strane jednakosti.

Primer 2.5. Odrediti prve parcijalne izvode sledećih funkcija:

a) $f(x, y) = \frac{x}{y} + 2x^2y - xy^3 + 2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(x, y) = \frac{x+y-2z}{3x-y+2z}$, $3x-y+2z \neq 0$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Rešenje.

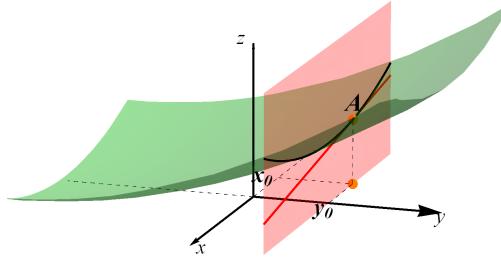
a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} + 4xy - y^3$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + 2x^2 - 3xy^2$;

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x-y+2z-3(x+y-2z)}{(3x-y+2z)^2} = \frac{-4y+4z}{(3x-y+2z)^2}$,
 $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x-y+2z+x+y-2z}{(3x-y+2z)^2} = \frac{4x}{(3x-y+2z)^2}$,
 $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-2(3x-y+2z)-2(x+y-2z)}{(3x-y+2z)^2} = \frac{-8x}{(3x-y+2z)^2}$. ■

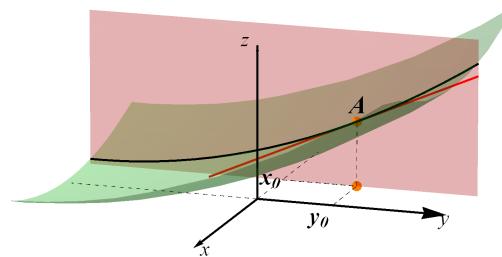
2.3.1 Geometrijsko tumačenje prvih parcijalnih izvoda

Geometrijski, prvi parcijalni izvod funkcije dve promenljive f po promenljivoj x u tački (x_0, y_0) je koeficijent pravca tangente t_1 na krivu koja se dobija u preseku površi $z = f(x, y)$ i ravni $y = y_0$ u tački $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, (slika 2.7).

Analogno, prvi parcijalni izvod funkcije dve promenljive f po promenljivoj y u tački (x_0, y_0) je koeficijent pravca tangente t_2 na krivu koja se dobija u preseku površi $z = f(x, y)$ i ravni $x = x_0$ u tački $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, (slika 2.8). Interaktivna slika sa geometrijskim tumačenjem prvog parcijalnog izvoda po



Slika 2.7



Slika 2.8

x i po y u tački (x_0, y_0) se može videti klikom na sliku 2.7 i sliku 2.8, respektivno. Jednačine tangenti t_1 i t_2 su:

$$t_1 : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0), \quad y = y_0,$$

$$t_2 : z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0), \quad x = x_0.$$

2.3.2 Parcijalni izvodi višeg reda

Neka je f realna funkcija dve promenljive definisana na otvorenom skupu D i ima prve parcijalne izvode u svim tačkama skupa D . Drugi parcijalni izvodi funkcije f su:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= (f_x)_x \quad \text{ili drugačije zapisano} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ f_{yy} &= (f_y)_y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \\ f_{xy} &= (f_x)_y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ f_{yx} &= (f_y)_x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Parcijalni izvodi f_{xy} i f_{yx} se nazivaju mešoviti parcijalni izvodi drugog reda funkcije f .

Sledeća teorema daje odgovor na pitanje koje uslove treba da zadovoljava funkcija f da bi njeni mešoviti parcijalni izvodi drugog reda bili jednaki.

Teorema 2.3. Ako funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidne druge parcijalne izvode f_{xy} i f_{yx} na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$, onda je

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \text{ za sve } (x, y) \in D.$$

Primer 2.6. Odrediti druge parcijalne izvode sledećih funkcija:

a) $f(x, y) = \sin^2(2xy)$ za $x, y \in \mathbb{R}$

b) $f(x, y) = \ln(3x - y + 1)$ za $x, y \in \mathbb{R}$ za koje je $3x - y + 1 > 0$.

Rešenje.

a) Prvi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_x = 2 \sin(2xy) \cdot \cos(2xy) \cdot 2y = 2y \sin(4xy),$$

$$f_y = 2 \sin(2xy) \cdot \cos(2xy) \cdot 2x = 2x \sin(4xy).$$

Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2y (\cos(4xy) \cdot 4y) = 8y^2 \cos(4xy),$$

$$f_{xy} = 2 \sin(4xy) + 2y \cos(4xy) \cdot 4x = 2 \sin(4xy) + 8xy \cos(4xy),$$

$$f_{yx} = 2 \sin(4xy) + 2x \cos(4xy) \cdot 4y = 2 \sin(4xy) + 8xy \cos(4xy),$$

$$f_{yy} = 2x \cos(4xy) \cdot 4x = 8x^2 \cos(4xy).$$

b) Prvi parcijalni izvodi funkcije g su

$$g_x = \frac{3}{3x - y + 1}, \quad g_y = \frac{-1}{3x - y + 1}.$$

Drugi parcijalni izvodi funkcije g su

$$g_{xx} = -\frac{9}{(3x - y + 1)^2}, \quad g_{xy} = \frac{3}{(3x - y + 1)^2},$$

$$g_{yx} = \frac{3}{(3x - y + 1)^2}, \quad g_{yy} = -\frac{1}{(3x - y + 1)^2}.$$

■

Sledi primer funkcije čiji mešoviti parcijalni izvodi nisu jednaki.

Primer 2.7. Odrediti mešovite parcijalne izvode drugog reda funkcije

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

u tački $(0, 0)$.

Rešenje. Prvi parcijani izvodi u tački $(x, y) \neq (0, 0)$ su

$$f_x(x, y) = y \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = x \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Prvi parcijani izvodi u tački $(x, y) = (0, 0)$ se određuju po definiciji. Kako je $f(h, 0) = f(0, h) = 0$ to je

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

Mešoviti parcijalni izvodi drugog reda u tački $(0, 0)$ se takođe računaju po definiciji

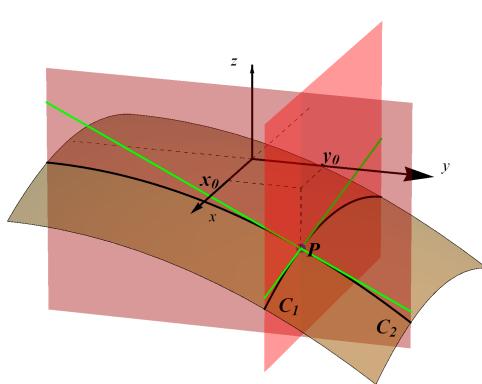
$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4}}{h} = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}}{h} = 1.$$

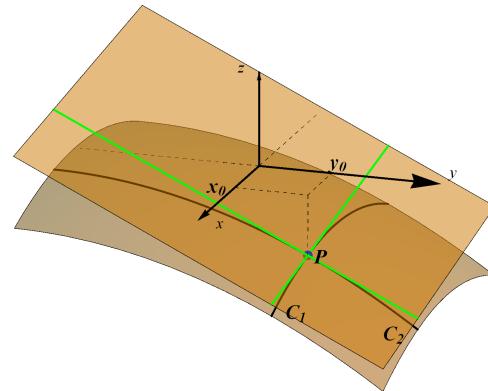
Dakle, $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. ■

2.4 Tangentna ravan i linearna aproksimacija

Neka je površ S određena jednačinom $z = f(x, y)$, pri čemu funkcija dve promenljive f ima neprekidne prve parcijalne izvode u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) i tačka $P(x_0, y_0, z_0)$ pripada površi S , što znači da je $z_0 = f(x_0, y_0)$. Neka je presek površi S i ravni $y = y_0$ kriva C_1 , a presek površi S i ravni $x = x_0$ kriva C_2 (interaktivna slika 2.9). Obeležimo sa t_1 i t_2 tangente na krivu C_1 i C_2 , respektivno.



Slika 2.9



Slika 2.10

Tangentna ravan na površ S u tački P je određena tangentama t_1 i t_2 (slika 2.10) čije su jednačine:

$$t_1 : \quad z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0,$$

$$t_2 : \quad z = f(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0,$$

o čemu je bilo više reči prilikom geometrijskog tumačenja prvih parcijalnih izvoda. Jednačina ravni koja sadrži tačku $P(x_0, y_0, z_0)$ je

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ako uzmemo da je $a = -\frac{A}{C}$ i $b = -\frac{B}{C}$, tada jednačina tangentne ravni ima sledeći oblik:

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

S obzirom da tangenta t_1 pripada ravni $y = y_0$ i tangentnoj ravni, može se zaključiti da je $a = f_x(x_0, y_0)$. Analogno, tangenta t_2 pripada ravni $x = x_0$ i tangentnoj ravni, pa je $b = f_y(x_0, y_0)$. Dakle, jednačina tangentne ravni na površ S u tački $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.1)$$

Primer 2.8. Odrediti jednačinu tangentne ravni na paraboloid $z = x^2 + y^2$ u tački $P(1, 1, 2)$.

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2$ u tački $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ su:

$$f_x(x, y) = 2x, \quad f_y(x, y) = 2y,$$

a u tački $(x_0, y_0) = (1, 1)$ su:

$$f_x(1, 1) = 2, \quad f_y(1, 1) = 2.$$

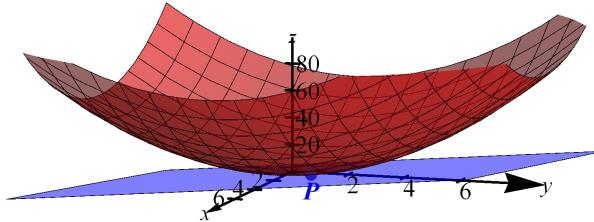
Jednačina tangentne ravni na paraboloid $z = x^2 + y^2$ u tački $P(1, 1, 2)$ je

$$z = 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1),$$

tj.

$$z = 2x + 2y - 2.$$

Paraboloid $z = x^2 + y^2$ i tangentna ravan $z = 2x + 2y - 2$ u tački $(1, 1, 2)$ su date na slici (2.11). ■



Slika 2.11

Interaktivna slika (2.11) može da se uveća pomoću ponuđenog klizača. Na uvećanoj slici se vidi da posmatrani paraboloid „liči” na tangentnu ravan u okolini tačke P .

U opštem slučaju, ako su prvi parcijalni izvodi funkcije f neprekidni u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) , onda za sve tačke (x, y) iz te okoline važi

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Funkcija

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

se naziva linearna aproksimacija funkcije f u tački (x_0, y_0) .

2.5 Diferencijabilnost funkcije

U prethodnom odeljku smo zaključili da se funkcija dve realne promenljive, koja ima neprekidne prve parcijalne izvode u okolini tačke (x_0, y_0) , može aproksimirati u okolini te tačke polinomom prvog ili nultog stepena sa dve promenljive. Diferencijabilne funkcije u tački (x_0, y_0) imaju takvu osobinu. Pre nego što bude data definicija diferencijabilnosti funkcije, biće uveden pojam priraštaja funkcije u tački. Priraštaj funkcije dve promenljive f u tački (x_0, y_0) je

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

gde su Δx i Δy priraštaji nezavisno promenljivih x i y u tački x_0 i y_0 respektivno.

Definicija 2.7. Neka je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa $D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) ako važi

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \quad (2.2)$$

gde $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)$ i $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ teže 0 kada $(\Delta x, \Delta y)$ teži $(0, 0)$.

U definiciji 2.7 jednakost (2.2) može da se zameni sa sledećim uslovom:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta f - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Podsetimo se, ako je realna funkcija jedne realne promenljive diferencijabilna u nekoj tački, onda je ona i neprekidna u istoj tački. Analogno tvrđenje važi i za funkcije dve promenljive.

Teorema 2.4. Ako je funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna u unutrašnjoj tački (x_0, y_0) skupa $D \subset \mathbb{R}^2$, tada je ona neprekidna u tački (x_0, y_0) .

Kada funkcija dve promenljive ima prve parcijalne izvode u nekoj tački, ona ne mora da bude i diferencijabilna u toj tački. Važi sledeća teorema.

Teorema 2.5. Ako je funkcija f definisana na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ i ima neprekidne prve parcijalne izvode na skupu D , onda je ona diferencijabilna u svakoj tački skupa D .

2.5.1 Diferencijal funkcije

Diferencijal funkcije f u tački (x_0, y_0) je

$$df = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

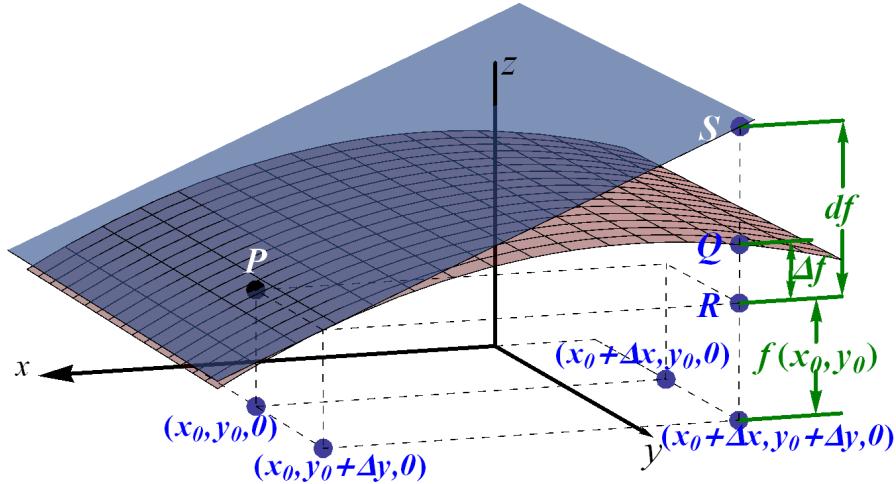
Kako je $\Delta x = dx$ i $\Delta y = dy$, to je

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Ako uzmemo da je $\Delta x = dx = x - x_0$ i $\Delta y = dy = y - y_0$, tada za diferencijal funkcije f važi

$$df = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Geometrijska interpretacija priraštaja i diferencijala funkcije je data na slici 2.12, dok se detaljnije objašnjenje i interaktivni prikaz može videti kada se klikne na sliku 2.12.



Slika 2.12

Definicija 2.8. Diferencijal realne funkcije f n promenljivih je

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n,$$

gde su dx_i , $i = 1, 2, \dots, n$ diferencijali nezavisno promenljivih x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ respektivno.

Primer 2.9. Odrediti diferencijal funkcije $f(x, y, z) = x^4 + xyz + e^{x-y+2z}$.

Rešenje.

$$df = (4x^3 + yz + e^{x-y+2z})dx + (xz - e^{x-y+2z})dy + (xy + 2e^{x-y+2z})dz. \quad \blacksquare$$

2.5.2 Diferencijali višeg reda

Neka funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidne druge parcijalne izvode na otvorenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$. Tada je diferencijal drugog reda funkcije f dat sa

$$d(df) = d^2f,$$

tj.

$$\begin{aligned} d(df) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \right) dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2. \end{aligned}$$

Kako su drugi parcijalni izvodi neprekidni, mešoviti izvodi su jednaki, pa je

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Izraz sa desne strane znaka jednakosti se može simbolički predstaviti na sledeći način

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f.$$

Analogno, ako funkcija f ima neprekidne parcijalne izvoda reda m , $m > 2$, na otvorenom skupu D , tada se diferencijal reda m funkcije f definiše sa

$$d^m f = d(d^{m-1} f),$$

što je

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(m)} f,$$

dok je

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(m)} f &= \frac{\partial^m f}{\partial x^m} (dx)^m + \binom{m}{1} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} (dx)^{m-1} dy \\
 &\quad + \binom{m}{2} \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2} \partial y^2} (dx)^{m-2} (dy)^2 \\
 &\quad + \dots + \binom{m}{m-1} \frac{\partial^m f}{\partial x \partial y^{m-1}} (dx)^{m-1} (dy)^2 \\
 &\quad + \frac{\partial^m f}{\partial y^m} (dy)^m.
 \end{aligned}$$

2.6 Aproksimacija funkcije polinomom

U odeljku 2.4 smo razmatrali problem aproksimacije funkcije dve promenljive sa polinomom prvog ili nultog stepena sa dve promenljive u okolini neke tačke. U teoremi koja sledi navedeni su uslovi koje funkcija dve promenljive treba da zadovoljava da bi se mogla aproksimirati polinomom n -toga stepena sa dve promenljive u okolini tačke.

Teorema 2.6. *Neka je realna funkcija f dve promenljive definisana i neprekidna zajedno sa svim svojim parcijalnim izvodima do reda $m+1$ u nekoj lopti $L((x_0, y_0), \delta)$. Tada za svako $(\Delta x, \Delta y)$ sa osobinom $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in L((x_0, y_0), \delta)$ postoji broj $\theta = \theta(\Delta x, \Delta y) \in (0, 1)$ takav da važi*

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{(k)} f(x_0, y_0) \\
 &\quad + R_m(\Delta x, \Delta y)
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

gde je ostatak $R_m(\Delta x, \Delta y)$ dat sa

$$R_m(\Delta x, \Delta y) = \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \Delta y \right)^{(m+1)} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y).$$

Izraz (2.3) se naziva Tejlorova formula. Tejlorova formula važi i za funkcije koje zadovoljavaju slabije uslove od uslova u teoremi 2.3. Naime, ako funkcija

f ima neprekidne parcijalne izvode reda p za svako $1 \leq p \leq m$, tada postoji ε_1 i ε_2 tako da važi relacija (2.3) dok ostatak ima oblik

$$R_m(\Delta x, \Delta y) = \varepsilon_1(\Delta x)^m + \varepsilon_2(\Delta y)^m$$

gde ε_1 i ε_2 teže 0 kada $(\Delta x, \Delta y)$ teži $(0, 0)$.

Zamenom Δx sa $x - x_0$ i Δy sa $y - y_0$ polinom sa desne strane jednakosti (2.3) dobija sledeći oblik

$$f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0) \right)^{(k)} f(x_0, y_0). \quad (2.4)$$

Polinom (2.4) se naziva Tejlorov polinom funkcije f u tački (x_0, y_0) m -tog stepena, u oznaci $T_m(x - x_0, y - y_0)$.

Ako je $(x_0, y_0) = (0, 0)$, tada se polinom (2.4) naziva Maklorenov polinom funkcije f m -tog stepena.

Primer 2.10. Razviti u Maklorenov polinom drugog stepena funkciju

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}.$$

Rešenje. S obzirom da je

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 1, \\ f_x &= -2xe^{-x^2-y^2}, & f_x(0, 0) &= 0, & f_y &= -2ye^{-x^2-y^2}, & f_y(0, 0) &= 0, \\ f_{xx} &= (-2 + 4x)e^{-x^2-y^2}, & f_{xx}(0, 0) &= -2, & f_{xy} &= 4xye^{-x^2-y^2}, & f_{xy}(0, 0) &= 0, \\ f_{yy} &= (-2 + 4y)e^{-x^2-y^2}, & f_{yy}(0, 0) &= -2, \end{aligned}$$

Maklorenov polinom drugog stepena za funkciju f je

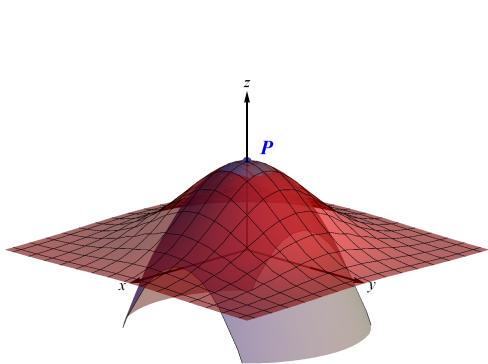
$$T_2(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$

Stoga pišemo

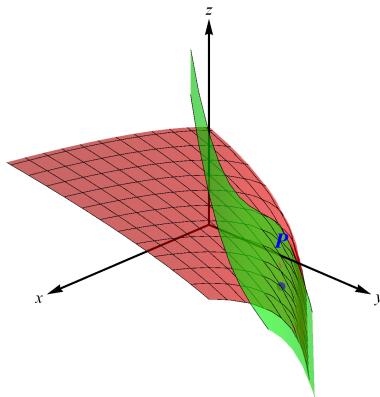
$$f(x, y) \approx 1 - x^2 - y^2$$

za $x \approx 0$ i $y \approx 0$. ■

Na slici 2.13 su dati grafici funkcije f i polinoma T_2 iz prethodnog primera. Klikom na istu sliku otvara se interaktivna slika na kojoj se može videti da što je veći stepen polinoma to on daje bolju aproksimaciju funkcije u okolini posmatrane tačke.



Slika 2.13



Slika 2.14

Primer 2.11. Razviti u Tejlorov polinom trećeg stepena funkciju

$$f(x, y) = \ln(x - y + 3)$$

u tački $(1, 3)$.

Rešenje. Kako je

$$f(1, 3) = 0,$$

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{x - y + 3}, & f_y &= -\frac{1}{x - y + 3}, & f_{xx} &= -\frac{1}{(x - y + 3)^2}, \\ f_{xy} &= \frac{1}{(x - y + 3)^2}, & f_{yy} &= -\frac{1}{(x - y + 3)^2}, & f_{xxx} &= \frac{1}{(x - y + 3)^3}, \\ f_{xxy} &= -\frac{2}{(x - y + 3)^3}, & f_{xyy} &= \frac{2}{(x - y + 3)^3}, & f_{yyy} &= -\frac{2}{(x - y + 3)^3}, \end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned} f_x(1, 3) &= 1, & f_y(1, 3) &= -1, & f_{xx}(1, 3) &= -1, & f_{xy}(1, 3) &= 1, \\ f_{yy}(1, 3) &= -1, & f_{xxx}(1, 3) &= 2, & f_{xxy}(1, 3) &= -2, & f_{xyy}(1, 3) &= 2, \\ f_{yyy}(1, 3) &= 2. \end{aligned}$$

Tejlorov polinom trećeg stepena funkcije f u tački $(1, 3)$ je

$$\begin{aligned} T_3(x - 1, y - 3) &= (x - 1) - (y - 3) + \frac{1}{2}(-(x - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 3) \\ &\quad -(y - 3)^2) + \frac{1}{6}(2(x - 1)^3 - 6(x - 1)^2(y - 3) \\ &\quad + 6(x - 1)(y - 3)^2 + 2(y - 3)^3). \end{aligned}$$

Što znači da je

$$f(x, y) \approx T_3(x - 1, y - 3)$$

za $x \approx 1$ i $y \approx 3$. Grafici funkcije f i polinoma T_3 su dati na slici 2.14 gde se nalazi i link za interaktivni prikaz. ■

2.7 Parcijalni izvodi složene funkcije

Posmatrajmo prvo slučaj kada je $w = f(u, v)$, a funkcije u i v su funkcije jedne promenljive, tj. $u = g(x)$ i $v = h(x)$. To znači da je w u stvari funkcija jedne promenljive, $w = f(g(x), h(x))$. Pretpostavimo da je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke (u_0, v_0) , gde je $u_0 = g(x_0)$, $v_0 = h(x_0)$. Neka su funkcije u i v definisane u nekoj okolini tačke x_0 i diferencijabilne u toj tački. Ako pretpostavimo da je f diferencijabilna u (u_0, v_0) tada je

$$\Delta f = f_u(u_0, v_0)\Delta u + f_v(u_0, v_0)\Delta v + \varepsilon_1\Delta u + \varepsilon_2\Delta v \quad (2.5)$$

pri čemu ε_1 i ε_2 teže 0 kada $(\Delta u, \Delta v)$ teži $(0, 0)$. Kako je $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ i $\Delta v = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)$, sledi da je

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) \\ &= f(g(x_0 + \Delta x), h(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0), h(x_0)) \\ &= w(x_0 + \Delta x) - w(x_0) = \Delta w. \end{aligned}$$

Kada podelimo levu i desnu stranu jednakosti (2.5) sa Δx i zamenimo Δf sa Δw , dobijamo

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = f_u(u_0, v_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v(u_0, v_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \varepsilon_1\frac{\Delta u}{\Delta x} + \varepsilon_2\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Ako $\Delta x \rightarrow 0$, onda $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \rightarrow 0$, jer je g neprekidna funkcija u tački x_0 . Iz istog razloga $\Delta v \rightarrow 0$ kada $\Delta x \rightarrow 0$. Takođe, ε_1 i ε_2 teže 0, jer $(\Delta u, \Delta v) \rightarrow (0, 0)$ kada $\Delta x \rightarrow 0$. Tada važi

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \\ &= \left(f_u \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + f_v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) \\ &= f_u \frac{du}{dx} + f_v \frac{dv}{dx}. \end{aligned}$$

Dakle, postoji izvod $\frac{dw}{dx}$ u tački x_0 i važi

$$\frac{dw(x_0)}{dx} = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \frac{du(x_0)}{dx} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \frac{dv(x_0)}{dx}, \quad (2.6)$$

što se zapisuje i na sledeći način:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Primer 2.12. Odrediti $\frac{dw}{dx}$ u tački $x_0 = 2$ ako je $w = u^2v + uv^2 + u$, $u = 2x$ i $v = -x^2 + x$.

Rešenje. Iz (2.6) sledi

$$\frac{dw}{dx} = (2uv + v^2)2 + (u^2 + 2uv)(-2x + 1).$$

Kako je $u(2) = 4$ i $v(2) = -2$, imamo

$$\frac{dw(2)}{dx} = -8. \quad \blacksquare$$

Posmatrajmo sada slučaj kada je $w = f(u, v)$, a funkcije u i v su funkcije dve promenljive, tj. $u = g(x, y)$ i $v = h(x, y)$. Prepostavimo da je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke (u_0, v_0) , gde je $u_0 = g(x_0, y_0)$, $v_0 = h(x_0, y_0)$ i diferencijabilna u toj tački. Neka su funkcije u i v definisane u nekoj okolini

tačke (x_0, y_0) i diferencijabilne u toj tački. Kao što smo videli, određivanje parcijalnog izvoda $\frac{\partial w}{\partial x}$ funkcije w se svodi na određivanje izvoda funkcije jedne promenljive dok je druga promenljiva fiksirana. Shodno tome primenjujući (2.6) može se zaključiti da postoji parcijalni izvod $\frac{\partial w}{\partial x}$ u tački (x_0, y_0) i da važi sledeća jednakost:

$$\frac{\partial w(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (2.7)$$

Analogno se može zaključiti da postoji parcijalni izvod $\frac{\partial w}{\partial y}$ u tački (x_0, y_0) i da važi

$$\frac{\partial w(x_0, y_0)}{\partial y} = \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial u} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} + \frac{\partial f(u_0, v_0)}{\partial v} \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Jednakosti (2.7) i (2.8) se često zapisuju na sledeći način

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.10)$$

Primer 2.13. Odrediti $\frac{\partial w}{\partial x}$ i $\frac{\partial w}{\partial y}$ ako je

$$w = e^{u^2+v^2}, \quad u = \ln(x-y), \quad v = \frac{x}{y}.$$

Rešenje. Iz (2.9) sledi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2ue^{u^2+v^2} \frac{1}{x-y} + 2ve^{u^2+v^2} \frac{1}{y},$$

dok se pomoću (2.10) dobija

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 2ue^{u^2+v^2} \frac{-1}{x-y} + 2ve^{u^2+v^2} \left(-\frac{x}{y^2}\right). \quad \blacksquare$$

Primer 2.14. Transformisati izraz $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, gde je $z = f(x, y)$, uvođenjem novih nezavisno promenljivih u i v koje su definisane sa $u = 2x + y^2$, $v = y^2$.

Rešenje. Pomoću formula (2.9) i (2.10) dobijamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2 + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 0 = 2 \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 2y + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot 2y = 2y \frac{\partial z}{\partial u} + 2y \frac{\partial z}{\partial v}.\end{aligned}$$

Dakle, sa leve strane jednakosti datog izraza imamo sledeće

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial u} - 2 \frac{\partial z}{\partial v} = -2 \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Transformisani izraz je

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0. \quad \blacksquare$$

2.8 Izvod implicitno definisane funkcije

Neka je $y = f(x)$ definisana implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$ dok x pripada nekoj okolini tačke x_0 . Prepostavimo da je f funkcija jedne promenljive koja je diferencijabilna u tački x_0 i F diferencijabilna funkcija u tački (x_0, y_0) . Ako diferenciramo jednačinu $F(x, y) = 0$ tako što primenimo formulu (2.6), dobijamo

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} \frac{dx(x_0)}{dx} + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \frac{dy(x_0)}{dx} = 0.$$

Kako je $\frac{dx}{dx} = 1$, to je

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}}. \quad (2.11)$$

Sledeća teorema se naziva teorema o implicitno definisanim funkcijama i ona daje odgovor na pitanje kada postoji neprekidna funkcija f takva da je $F(x, f(x)) = 0$ dok x pripada domenu funkcije f .

Teorema 2.7. Neka je F realna funkcija dve promenljive definisana na otvorenom skupu D i tačka (x_0, y_0) pripada skupu D . Ako važe sledeći uslovi:

- 1) F je neprekidna funkcija na D ,
- 2) $F(x_0, y_0) = 0$,
- 3) postoji parcijalni izvod $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ i neprekidni su na D ,
- 4) $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$,

onda postoji okolina $U(x_0)$ tačke x_0 na kojoj je implicitno definisana neprekidna funkcija $y = f(x)$, takva da je $f(x_0) = y_0$ i $F(x, f(x)) = 0$ za sve $x \in U(x_0)$ i za izvod funkcije f u tački x_0 važi (2.11).

Primer 2.15. Odrediti prvi i drugi izvod funkcije $y = f(x)$ ako je $x^3 + y^3 - x = 2$.

Rešenje. Funkcija F je data sa

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - x - 2.$$

Iz (2.11) sledi da je

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{3x^2 - 1}{3y^2},$$

za $y \neq 0$. Za drugi izvod funkcije f važi

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{3x^2 - 1}{3y^2}\right) \\ &= -\frac{6x \cdot 3y^2 - (3x^2 - 1)\frac{d}{dx}(3y^2)}{9y^4} = -\frac{6x \cdot 3y^2 - (3x^2 - 1)(6y \cdot y')}{9y^4} \\ &= -\frac{18xy^2 - (3x^2 - 1)(-6y \frac{3x^2 - 1}{3y^2})}{9y^4} = \frac{12x^2 - 18x^4 - 18xy^3 - 2}{9y^5}. \blacksquare \end{aligned}$$

Neka je sada funkcija z implicitno definisana funkcija dve promenljive, tj. $z = f(x, y)$, jednačinom $F(x, y, z) = 0$, gde je F diferencijabilna funkcija na skupu $D \subset \mathbb{R}^3$. Pretpostavimo da je $F_z(x, y, z) \neq 0$ za $(x, y, z) \in D$. Tada je

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (2.12)$$

Primer 2.16. Odrediti $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, ako je jednačinom $xyz + xy^2 - yz^2 = 0$ implicitno definisana funkcija $z = f(x, y)$.

Rešenje. Ako je $F(x, y, z) = xyz + xy^2 - yz^2$, tada je

$$F_x = yz + y^2, \quad F_y = xz + 2xy - z^2, \quad F_z = xy - 2yz.$$

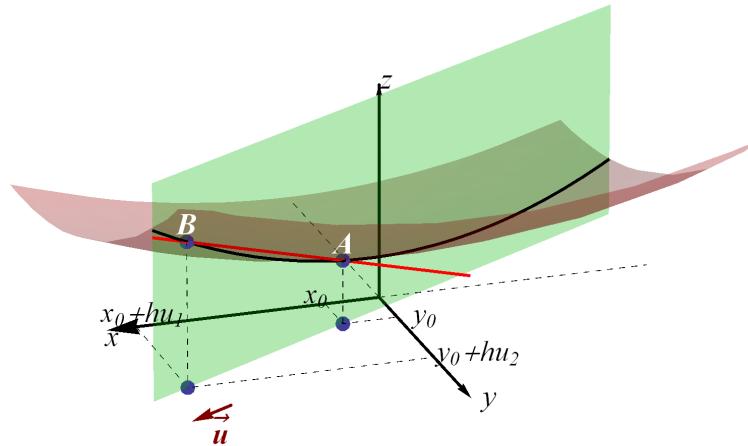
Na osnovu formula (2.12) dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{yz + y^2}{xy - 2yz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xz + 2xy - z^2}{xy - 2yz}. \quad \blacksquare$$

2.9 Izvod funkcije u pravcu

Kao što smo već videli parcijalni izvod funkcije f u odnosu na promenljivu x (respektivno y) u tački (x_0, y_0) je koeficijent pravca (nagib) tangente na krivu koja se dobija u preseku površi $z = f(x, y)$ i ravni paralelne z -osi i x -osi (y -osi) koja sadrži tačku (x_0, y_0) . Posmatrajmo sada krivu koja se dobija u preseku površi $z = f(x, y)$ i ravni koja sadrži tačku (x_0, y_0) i paralelna je z -osi i proizvoljnom jediničnom vektoru $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$. Na interaktivnoj slici 2.15 se može videti da se prava, koja prolazi kroz tačke $A(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i $B(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2, f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2))$, približava tangentu te krive u tački A kada h teži 0. Tada se koeficijent pravca prave AB približava koeficijentu pravca tangente na posmatranu krivu u tački (x_0, y_0) . Izvod funkcije u pravcu vektora \vec{u} u tački (x_0, y_0) predstavlja koeficijent pravca ili nagib tangente na krivu koja se nalazi na posmatranoj površi i u ravni paralelnoj vektoru \vec{u} i z -osi. Sledi definicija izvoda funkcije u pravcu.

Definicija 2.9. Neka je f realna funkcija dve promenljive koja je definisana na skupu D , (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D i neka je $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$



Slika 2.15

jedinični vektor. Izvod funkcije f u pravcu vektora \vec{u} u tački (x_0, y_0) je

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Ako je $\vec{u} = \vec{i}$, tada je $u_1 = 1$, $u_2 = 0$ i izvod funkcije f u pravcu vektora \vec{u} u tački (x_0, y_0) je u stvari parcijalni izvod te funkcije u odnosu na promenljivu x u tački (x_0, y_0) , tj.

$$D_{\vec{i}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Za $\vec{u} = \vec{j}$, tj. $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, je

$$D_{\vec{j}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

2.10 Gradijent

U ovom odeljku ćemo uvesti pojam gradijenta funkcije. Neka je f realna funkcija dve promenljive koja je definisana na skupu D i (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D .

Definicija 2.10. Gradijent funkcije f u tački (x_0, y_0) je vektor

$$\nabla f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \vec{j}.$$

Do veze između izvoda funkcije u pravcu proizvoljnog jediničnog vektora $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ u tački (x_0, y_0) i gradijenta te funkcije u istoj tački se dolazi pomoću funkcije jedne promenljive g definisane sa

$$g(h) = f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2).$$

Za izvod funkcije g u tački 0 važi

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0).$$

Ako funkciju g napišemo u obliku $g(h) = f(x, y)$, gde su x i y funkcije jedne promenljive date sa $x = x(h) = x_0 + hu_1$, $y = y(h) = y_0 + hu_2$ i primenimo pravilo (2.6), dobijamo

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f_x(x, y)u_1 + f_y(x, y)u_2.$$

Sledi da za $h = 0$, važi $x = x_0$, $y = y_0$ i $g'(0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$. Dakle,

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2,$$

tj. važi sledeća teorema.

Teorema 2.8. Ako je f funkcija dve promenljive koja je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) i $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$ jedinični vektor, tada važi

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} \quad (2.13)$$

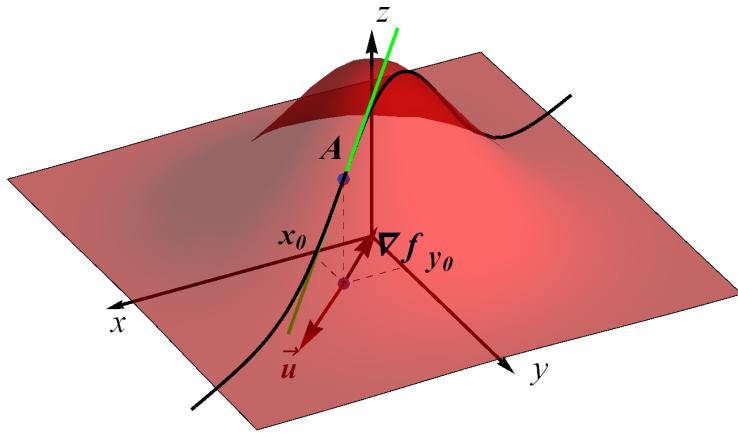
Jednakost (2.13) se može zapisati i u sledećem obliku

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = |\nabla f(x_0, y_0)| \cos(\angle(\nabla f(x_0, y_0), \vec{u})). \quad (2.14)$$

Iz (2.14) sledi da $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ ima najveću vrednost kada je

$$\cos(\angle(\nabla f(x_0, y_0), \vec{u})) = 1,$$

tj. kad vektori $\nabla f(x_0, y_0)$ i \vec{u} imaju isti pravac i smer. To znači da se funkcija najbrže menja u pravcu vektora \vec{u} , odnosno da tangenta u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ sa koeficijentom pravca $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ ima najveći nagib u odnosu na druge tangente u istoj tački sa nagibom jednakim izvodu u pravcu vektora različitim od pravca vektora \vec{u} . Na interaktivnoj slici 2.16 su data dva primera funkcije f sa pethodnim geometrijskim tumačenjem gde se može menjati pravac i smer vektora \vec{u} .



Slika 2.16

Primer 2.17. Odrediti izvod funkcije $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ u pravcu vektora $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$ u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Rešenje. Gradijent funkcije f u tački (x, y) je $\nabla f(x, y) = -2xe^{-x^2-y^2}\vec{i} - 2ye^{-x^2-y^2}\vec{j}$. U tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ gradijent funkcije f je

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -e^{-\frac{1}{2}}\vec{i} - e^{-\frac{1}{2}}\vec{j}.$$

Vektor \vec{u} je jedinični vektor. Primenom formule (2.13) se dobija

$$D_{\vec{u}}f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-e^{-\frac{1}{2}}\vec{i} - e^{-\frac{1}{2}}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}}. \blacksquare$$

Primer 2.18. Odrediti izvod funkcije $f(x, y) = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$ u pravcu vektora $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ u tački $(1, -1)$.

Rešenje. Gradijent funkcije f u tački (x, y) je $\nabla f(x, y) = -x\vec{i} + y\vec{j}$. U tački $(1, -1)$ gradijent funkcije f je

$$\nabla f(1, -1) = -\vec{i} - \vec{j}.$$

Kako vektor \vec{u} nije jedinični vektor, odredićemo jedinični vektor koji ima pravac i smer kao vektor \vec{u} :

$$\vec{u}_0 = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}.$$

Iz (2.13) sledi da je

$$D_{\vec{u}_0}f(1, -1) = (-\vec{i} - \vec{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}. \blacksquare$$

Grafici funkcija i gradijent funkcija u datim tačkama iz primera 2.17 i 2.18 se mogu videti klikom na sliku 2.16. U interaktivnom prikazu se mogu zadati jedinični vektor \vec{u} i tačka (x_0, y_0) , takođe je dat i izvod u pravcu zadatog vektora u zadatoj tački.

Ako je f realna funkcija n promenljivih, $n > 2$, tada je gradijent funkcije f u tački $\mathbf{x}_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, \dots, x_{0_n})$ vektor

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0_1}}\vec{e}_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0_2}}\vec{e}_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_{0_n}}\vec{e}_n.$$

2.10.1 Gradijent kao vektor normale

Neka je S površ u \mathbb{R}^3 data sa

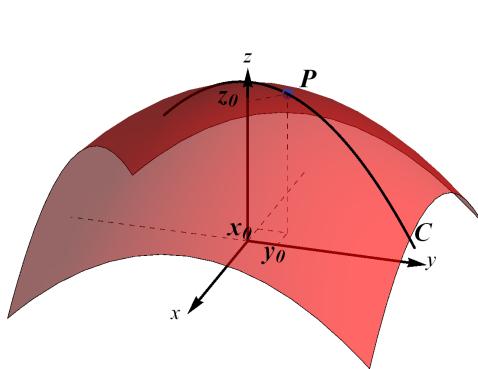
$$F(x, y, z) = 0,$$

gde $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ i tačka $(x_0, y_0, z_0) \in D$. Prepostavimo da funkcija F ima neprekidne parcijalne izvode na D i da nisu svi parcijalni izvodi funkcije F u tački (x_0, y_0, z_0) jednaki nuli.

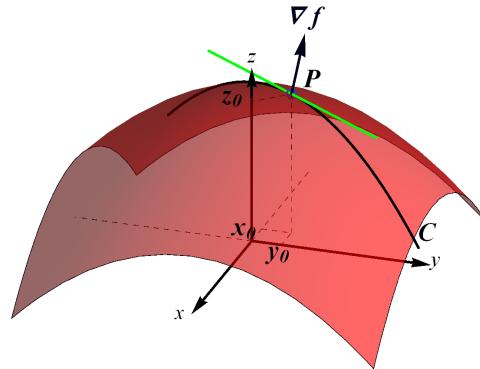
Neka je C proizvoljna kriva koja leži na površi S data parametarski sa

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \quad t \in [a, b],$$

funkcije u' , v' i w' su neprekidne na intervalu $[a, b]$ i nisu istovremeno jednake nuli ni za jedno $t \in [a, b]$, tj. C je glatka kriva. Neka kriva C prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0) (slika 2.17).



Slika 2.17



Slika 2.18

Pošto kriva C pripada površi S , njene tačke zadovoljavaju jednačinu te površi, tj.

$$F(u(t), v(t), w(t)) = 0 \text{ za sve } t \in [a, b].$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti dobijamo

$$F_x(x, y, z)u'(t) + F_y(x, y, z)v'(t) + F_z(x, y, z)w'(t) = 0,$$

za svako $t \in [a, b]$. Kako prethodna jednakost važi za svako $t \in [a, b]$, to i za $t_0 \in [a, b]$ važi

$$F_x(x_0, y_0, z_0)u'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)v'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)w'(t_0) = 0 \quad (2.15)$$

gde je $x_0 = u(t_0)$, $y_0 = v(t_0)$ i $z_0 = w(t_0)$. Pomoću skalarnog proizvoda jednakost (2.15) se može zapisati na sledeći način

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \left(u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j} + w'(t_0)\vec{k} \right) = 0,$$

što znači da je vektor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ normalan na tangentni vektor

$$u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j} + w'(t_0)\vec{k}$$

krive C u tački t_0 (slika 2.18). Kako je C proizvoljna glatka kriva na površi S koja sadrži tačku (x_0, y_0, z_0) , možemo da zaključimo da je vektor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ normalan na tangentni vektor svake glatke krive koja pripada površi S i prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0) . To znači da je vektor $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ normalan na tangentnu ravan na površi S u tački (x_0, y_0, z_0) . Sledi da je jednačina tangentne ravni na površ datu sa $F(x, y, z) = 0$ u tački (x_0, y_0, z_0) data sa

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \quad (2.16)$$

Interaktivna slika sa krivom C na datoj površi S i gradijentom funkcije F u zadatoj tački se otvara klikom na sliku 2.17 ili sliku 2.18.

Kada je površ S deo grafika funkcije f , tada se jednačina (2.16) svodi na jednačinu (2.1).

Ako funkcija F ima neprekidne parcijalne izvode na D i $\nabla F(x, y, z) \neq \vec{0}$ za svaku tačku $(x, y, z) \in D$, onda je površ data jednačinom $F(x, y, z) = 0$, dok $(x, y, z) \in D$, glatka. Glatke površi imaju osobinu da u svakoj njenoj tački postoji tangentna ravan.

Primer 2.19. Odrediti tangentnu ravan sfere $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ u tački $(1, -1, 2)$.

Rešenje. Ako uzmemo da je $F(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 2)^2 - 1$, tada je jednačina posmatrane sfere $F(x, y, z) = 0$. Parcijalni izvodi funkcije F u (x, y, z) su:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - 1), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - 2).$$

U tački $(1, -1, 2)$ parcijalni izvodi imaju sledeće vrednosti:

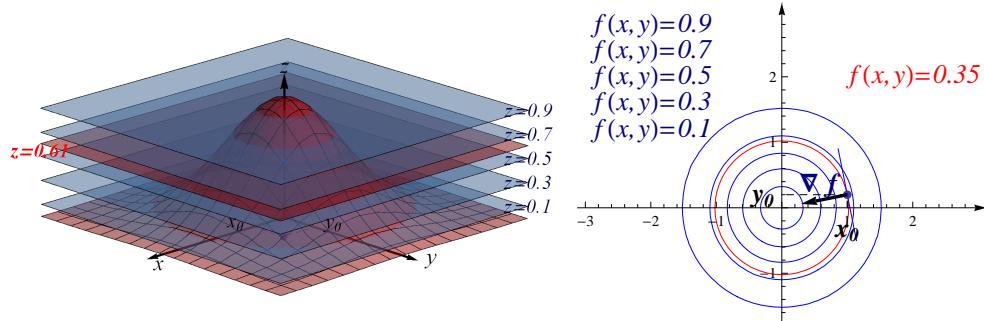
$$\frac{\partial F(1, -1, 2)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(1, -1, 2) = -2, \quad \frac{\partial F}{\partial z}(1, -1, 2) = 0.$$

Na osnovu (2.16) tražena jednačina tangentne ravni je

$$0(x - 1) - 2(y + 1) + 0(z - 2) = 0,$$

tj. $y = -1$. ■

Neka je sada f funkcija dve realne promenljive. Linija nivoa funkcije f je kriva koja se dobija u preseku ravni $z = k$ i površi $z = f(x, y)$, gde je k realan broj koji pripada skupu vrednosti funkcije f (slike 2.19 i 2.20). Dakle, linija nivoa funkcije f je određena jednačinom $f(x, y) = k$.



Slika 2.19

Slika 2.20

Pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija u tački (x_0, y_0) , koja u svim tačkama glatke krive L date parametarski sa

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad t \in [a, b]$$

ima konstantnu vrednost k . To znači da je

$$f(u(t), v(t)) = k \text{ za svako } t \in [a, b].$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti dobija se

$$f_x(x, y)u'(t) + f_y(x, y)v'(t) = 0,$$

za svako $t \in [a, b]$. Sledi da je i za $t_0 \in [a, b]$

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \left(u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j} \right) = 0,$$

gde je $x_0 = u(t_0)$, i $y_0 = v(t_0)$. Dakle, ako je $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, tada je vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ normalan na tangentni vektor $u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j}$ glatke krive L u (x_0, y_0) (slika 2.20). Važi sledeće tvrđenje.

Teorema 2.9. *Ako je funkcija f dve realne promenljive diferencijabilna u tački (x_0, y_0) i $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, tada je vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ normalan na liniju nivoa koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) .*

2.11 Ekstremne vrednosti funkcije

Pod ekstremnim vrednostima (ili ekstremima) funkcije se podrazumeva minimum i maksimum te funkcije. Neka je f realna funkcija dve promenljive definisana na skupu D i (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D .

Definicija 2.11. Funkcija f ima lokalni maksimum u tački (x_0, y_0) ako postoji lopta $L((x_0, y_0), \delta) \subset D$ takva da je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0),$$

za sve $(x, y) \in L((x_0, y_0), \delta)$.

Funkcija f ima lokalni minimum u tački (x_0, y_0) ako postoji lopta $L((x_0, y_0), \delta) \subset D$ takva da je

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

za sve $(x, y) \in L((x_0, y_0), \delta)$.

Ako je

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)),$$

za sve $(x, y) \in D$, tada funkcija f ima globalni maksimum (globalni minimum) u tački (x_0, y_0) .

Za funkcije n , $n > 2$, promenljivih prethodni pojmovi se analogno definišu.

Određivanje ekstrema funkcije dve promenljive

Podsetimo se, ako funkcija jedne promenljive ima lokalni minimum ili maksimum u nekoj tački i postoji izvod funkcije u toj tački tada je on jednak nuli. Slično tvrđenje važi i za funkcije dve promenljive.

Teorema 2.10. Neka je (x_0, y_0) unutrašnja tačka domena funkcije f . Ako funkcija f ima lokalni minimum ili lokalni maksimum u tački (x_0, y_0) i prvi parcijalni izvodi postoje u toj tački, onda su oni jednaki nuli, tj.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0 \quad i \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0. \tag{2.17}$$

Iz (2.1) i (2.17) sledi da jednačina tangentne ravni površi $z = f(x, y)$ u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ima oblik

$$z = f(x_0, y_0).$$

Dakle, ako funkcija f ima lokalni minimum ili lokalni maksimum u tački (x_0, y_0) i diferencijabilna je u toj tački, onda je tangentna ravan grafika funkcije f u tački $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ paralelna xy -ravni.

Definicija 2.12. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija dve promenljive i (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa D . Tačka (x_0, y_0) je stacionarna tačka funkcije f ako važi (2.17).

Prepostavimo da funkcija f ima neprekidne druge parcijalne izvode na D i da za tačku (x_0, y_0) važi (2.17). Na osnovu Tejlorove formule za $x \approx x_0$ i $y \approx y_0$, važi

$$f(x, y) \approx T_2(\Delta x, \Delta y),$$

gde je

$$\begin{aligned} T_2(\Delta x, \Delta y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (\Delta y)^2 \right). \end{aligned}$$

Kako je

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} (dy)^2, \quad (2.18)$$

to je

$$T_2(dx, dy) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} d^2 f. \quad (2.19)$$

Tejlorov polinom funkcije f u tački (x_0, y_0) drugog stepena bolje aproksimira funkciju u okolini tačke (x_0, y_0) nego Tejlorov polinom u istoj tački prvog stepena, što je u ovom slučaju tangentna ravan $z = f(x_0, y_0)$. Dakle, grafik Tejlorovog polinoma u tački (x_0, y_0) drugog stepena nalazi se sa iste strane tangentne ravni gde se nalazi i grafik funkcije f . Na osnovu (2.19) može da se zaključi sledeće:

- ako je $d^2 f > 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, onda je $T_2(dx, dy) > f(x_0, y_0)$, što znači da je grafik polinoma T_2 iznad tangentne ravni $z = f(x_0, y_0)$. Dakle, funkcija f ima lokalni minimum u tački (x_0, y_0) ;
- ako je $d^2 f < 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, onda je $T_2(dx, dy) < f(x_0, y_0)$, što znači da je grafik polinoma T_2 ispod tangentne ravni $z = f(x_0, y_0)$, pa funkcija f ima lokalni maksimum u tački (x_0, y_0) ;
- ako $d^2 f$ menja znak promenom $(dx, dy) \neq (0, 0)$, onda funkcija nema ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0) .

Dakle, ispitivanjem znaka drugog diferencijala $d^2 f$ datog sa (2.18) kao funkcije od $(dx, dy) \neq (0, 0)$, dolazi se do zaključka da li u posmatranoj tački funkcija ima ekstremnu vrednost kao i o vrsti ekstrema.

U slučaju da je $d^2 f = 0$, tada se funkcija aproksimira Tejlorovim polinomom trećeg reda i analogno se zaključuje da li funkcija ima ekstrem u posmatranoj tački na osnovu znaka diferencijala trećeg reda.

Primer 2.20. Odrediti lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4y + 1$.

Rešenje. Prvi parcijalni izvodi funkcije f su: $f_x = 2x$ i $f_y = 2y - 4$. Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2x &= 0 \\ 2y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

dobijamo stacionarnu tačku $A(0, 2)$. Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 2,$$

odakle sledi da je

$$d^2 f = 2(dx)^2 + 2(dy)^2.$$

Funkcija f u tački A ima lokalni minimum jer je $d^2 f > 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$. ■

U određenim slučajevima se znak drugog diferencijala (2.18) može odrediti pomoću vrednosti determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

o čemu više govori sledeća teorema.

Teorema 2.11. Neka funkcija f ima neprekidne druge parcijalne izvode u nekoj lopti $L((x_0, y_0), \delta)$ i neka je $f_x(x_0, y_0) = 0$ i $f_y(x_0, y_0) = 0$. Tada važi sledeće:

- ako je $D > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, onda funkcija f ima lokalni minimum u tački (x_0, y_0) ;
- ako je $D > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, onda funkcija f ima lokalni maksimum u tački (x_0, y_0) ;
- ako je $D < 0$, onda funkcija nema ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0) .

Ako je $D = 0$, onda ne možemo da zaključimo da funkcija ima ekstrem u stacionarnoj tački (x_0, y_0) , a ni da nema. U sledećem primeru se može videti da funkcija može da ima ekstremnu vrednost u tom slučaju, ali i da ne mora.

Primer 2.21. Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$\mathbf{a)} f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad \mathbf{b)} f(x, y) = x^3 + y^3.$$

Rešenje. a) Prvi parcijalni izvodi funkcije f su $f_x = 2x + 2y$ i $f_y = 2x + 2y$. Stacionarne tačke su $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$. Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 2, \quad f_{yy} = 2,$$

odakle sledi da je $D = 0$, dok je

$$d^2 f = 2(dx)^2 + 4dxdy + 2(dy)^2 = (dx + dy)^2.$$

Sledi da je $d^2 f \geq 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$. Dakle, ne važi $d^2 f > 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, jer za $dx = -dy$ i $dy \neq 0$ je $d^2 f = 0$. Iako je $d^2 f \geq 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, funkcija f u tačkama $(x, -x)$, $x \in \mathbb{R}$ ima lokalne minime (slika 2.21). Vrednost funkcije u tim tačkama je $f_{\min} = f(x, -x) = 0$.

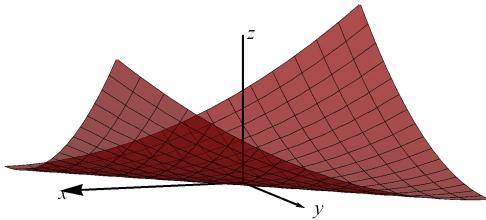
b) Parcijalni izvodi su $f_x = 3x^2$ i $f_y = 3y^2$. Iz sistema jednačina $3x^2 = 0$ i $3y^2 = 0$, dobijamo da je tačka $A(0, 0)$ stacionarna tačka. Drugi parcijalni izvodi su

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 0, \quad f_{yy} = 6y.$$

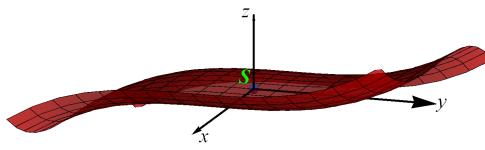
Sledi da je $D = 0$. Kako je $d^2 f = 0$, ispitaćemo znak diferencijala trećeg reda u tački A . Važi

$$\begin{aligned} d^3 f &= f_{xxx}(x_0, y_0)(dx)^3 + 3f_{xxy}(x_0, y_0)(dx)^2 dy + 3f_{xyy}(x_0, y_0) dx (dy)^2 \\ &\quad + f_{yyy}(x_0, y_0)(dy)^3 = 6(dx)^3 + 6(dy)^3. \end{aligned}$$

Ako je na primer $dx > 0$ i $dy = 0$, tada je $d^3f > 0$, dok je $d^3f < 0$ za $dx < 0$ i $dy = 0$. Dakle, ako d^3f posmatramo kao funkciju od (dx, dy) , tada ona menja znak. Stoga funkcija nema ekstremnu vrednost u tački A , tj. tačka A je sedlasta tačka (slika 2.22). ■



Slika 2.21



Slika 2.22

U primeru koji sledi se može primeniti teorema 2.11.

Primer 2.22. Odrediti lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Rešenje. U ovom slučaju je $f_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$ i $f_y = 6xy - 12$. Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y^2 - 15 &= 0 \\ 6xy - 12 &= 0 \end{aligned}$$

dobijaju se stacionarne tačke $P_1(-1, -2)$, $P_2(1, 2)$, $P_3(-2, -1)$ i $P_4(2, 1)$. Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 6y, \quad f_{yy} = 6x.$$

Drugi parcijalni izvodi funkcije f u tački $P_1(-1, -2)$ su

$$f_{xx}(-1, -2) = -6, \quad f_{xy}(-1, -2) = -12, \quad f_{yy}(-1, -2) = -6.$$

Kako je $D_{P_1} = -108 < 0$, na osnovu teoreme 2.11 funkcija f nema ekstrem u tački P_1 .

U tački $P_2(1, 2)$ drugi parcijalni izvodi funkcije f su:

$$f_{xx}(1, 2) = 6, \quad f_{xy}(1, 2) = 12, \quad f_{yy}(1, 2) = 6.$$

Kako je $D_{P_2} = -108 < 0$, na osnovu teoreme 2.11 funkcija f nema ekstrem u tački P_2 .

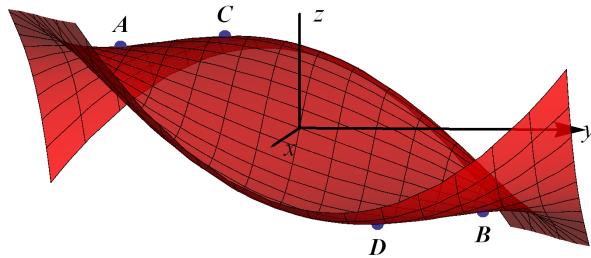
Drugi parcijalni izvodi funkcije f u tački $P_3(-2, -1)$ su

$$f_{xx}(-2, -1) = -12, \quad f_{xy}(-2, -1) = -6, \quad f_{yy}(-2, -1) = -12.$$

Ovde je $D_{P_3} = 108 > 0$ i $f_{xx} < 0$, te funkcija f ima lokalni maksimum u tački P_3 . Dalje, u tački $P_4(2, 1)$ imamo

$$f_{xx}(2, 1) = 12, \quad f_{xy}(2, 1) = 6, \quad f_{yy}(2, 1) = 12,$$

tj. $D_{P_4} = 108 > 0$. Funkcija f u tački P_4 imal lokalni minimum (slika 2.23). ■



Slika 2.23

Određivanje ekstrema funkcije tri promenljive

Pretpostavimo da funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$ ima neprekidne druge parcijalne izvode u nekoj okolini tačke (x_0, y_0, z_0) koja je unutrašnja tačka skupa D i

$$f_x(x_0, y_0, z_0) = f_y(x_0, y_0, z_0) = f_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Analogno kao kod funkcija dve promenljive, da li funkcija tri promenljive ima ekstrem u nekoj tački može da se utvrди pomoću znaka drugog diferencijala u toj tački

$$\begin{aligned} d^2f &= \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x^2} (dx)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y^2} (dy)^2 \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z^2} (dz)^2. \end{aligned}$$

Do zaključka se dolazi na sledeći način:

- ako je $d^2f > 0$ za svako $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, onda funkcija f ima lokalni minimum u tački (x_0, y_0, z_0) ;
- ako je $d^2f < 0$ za svako $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, onda funkcija f ima lokalni maksimum u tački (x_0, y_0, z_0) ;
- ako d^2f menja znak kao funkcija od (dx, dy, dz) , onda funkcija nema ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0, z_0) .

Neka je

$$D_1 = f_{xx}(x_0, y_0, z_0),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f_{xz}(x_0, y_0, z_0) & f_{yz}(x_0, y_0, z_0) & f_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}.$$

Važi:

- (i) ako je $D_1 > 0$, $D_2 > 0$ i $D_3 > 0$, onda funkcija f ima lokalni minimum u tački (x_0, y_0, z_0) ;
- (ii) ako je $D_1 < 0$, $D_2 > 0$ i $D_3 < 0$, onda funkcija f ima lokalni maksimum u tački (x_0, y_0, z_0) ;
- (iii) ako je $D_3 \neq 0$ i ne važi ni (i) ni (ii), onda funkcija nema ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0, z_0) ;
- (iv) ako je $D_3 = 0$, funkcija može da ima ekstem u posmatranoj tački, ali i ne mora.

Primer 2.23. Odrediti lokalne ekstreme funkcije

- a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy - y - 4z$,
- b) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 - (y + 2)^2 + xy + (z + 1)^2$.

Rešenje. a) Prvi parcijalni izvodi funkcije f su $f_x = 2x + y$, $f_y = x + 2y - 1$ i $f_z = 2z - 4$. Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + 2y - 1 &= 0 \\ 2z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

dobija se stacionarna tačka $P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2)$. Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 2.$$

I način

Drugi diferencijal u tački P je

$$\begin{aligned} d^2f &= 2(dx)^2 + 2dxdy + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 \\ &= 2 \left(\left(dx + \frac{1}{2}dy \right)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2 + (dz)^2 \right), \end{aligned}$$

odakle se može zaključiti da je $d^2f > 0$ za svako $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$, što znači da funkcija f ima lokalni minimum u tački P . Vrednost funkcije u tački P je $f(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2) = -\frac{13}{3}$.

II način

Kako je

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

sledi da funkcija f ima lokalni minimum u tački P .

b) Imamo da je $f_x = 2x + y - 2$, $f_y = x - 2y - 4$ i $f_z = 2z + 2$. Stacionarna tačka je $Q\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, -1\right)$. Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 2.$$

I način

Drugi diferencijal u tački P je

$$d^2f = 2(dx)^2 + 2dxdy - 2(dy)^2 + 2(dz)^2.$$

Ako je na primer $dx \neq 0$ i $dy = dz = 0$, tada je $d^2f > 0$, dok za $dx = dz = 0$ i $dy \neq 0$ imamo da je $d^2f < 0$. Dakle, ako se d^2f posmatra kao funkcija od (dx, dy, dz) , onda ona menja znak pa funkcija nema ekstremnu vrednost u tački A .

II način

Kako je

$$D_1 = 2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -10,$$

sledi da funkcija f nema ekstremnu vrednost u tački A . \blacksquare

Kada je $D_3 = 0$, tada ne možemo da zaključimo pomoću znaka determinanti D_1 , D_2 i D_3 da li funkcija ima ekstrem u stacionarnoj tački. U primeru koji sledi se može videti da funkcija može da ima ekstremnu vrednost u tom slučaju, ali i da ne mora.

Primer 2.24. Odrediti lokalne ekstreme sledećih funkcija

a) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 - (y + 2)^2 + xy + (z + 1)^3$,

b) $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + xy + (z + 1)^3$.

Rešenje. a) Imamo da je $f_x = 2x + y - 2$, $f_y = x - 2y - 4$ i $f_z = 3(z + 1)^2$. Rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0, \\ x - 2y - 4 &= 0, \\ 3(z + 1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

dobijamo da je $Q\left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, -1\right)$ stacionarna tačka funkcije f . Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = -2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 6(z + 1).$$

Pomoću znaka determinanti D_1 , D_2 i D_3 ne možemo da zaključimo da li funkcija f ima ekstremnu vrednost u tački A jer je $D_3 = 0$. Zato ćemo ispitati znak drugog diferencijala kao funkcije od (dx, dy, dz) . Drugi diferencijal u tački Q je

$$d^2f = 2(dx)^2 + 2dxdy - 2(dy)^2.$$

Ako je na primer $dx \neq 0$ i $dy = 0$, tada je $d^2f > 0$, dok za $dx = 0$ i $dy \neq 0$ imamo da je $d^2f < 0$. Dakle, kada se d^2f posmatra kao funkcija od (dx, dy, dz) , tada ona menja znak pa funkcija nema ekstremnu vrednost u tački A .

b) Prvi parcijalni izvodi funkcije f su $f_x = 2x + y - 2$, $f_y = x + 2y + 4$ i $f_z = 3(z + 1)^2$. Kada rešimo sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x + y - 2 &= 0, \\ x + 2y + 4 &= 0, \\ 3(z + 1)^2 &= 0, \end{aligned}$$

dobijamo da je $Q\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, -1\right)$ stacionarna tačka funkcije f . Drugi parcijalni izvodi funkcije f su

$$f_{xx} = 2, \quad f_{xy} = 1, \quad f_{xz} = 0, \quad f_{yy} = 2, \quad f_{yz} = 0, \quad f_{zz} = 6(z + 1).$$

U ovom slučaju je takođe $D_3 = 0$, pa pomoću znaka determinanti D_1 , D_2 i D_3 ne može da se zaključi da li funkcija f ima ekstremnu vrednost u tački Q .

Ispitaćemo znak drugog diferencijala funkcije f u tački Q . Drugi diferencijal u tački Q je

$$d^2f = 2(dx)^2 + 2dxdy + 2(dy)^2 = 2 \left(\left(dx + \frac{1}{2}dy \right)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2 \right).$$

Za svako $dx \neq 0$ i $dy \neq 0$ je $d^2f > 0$. Međutim, za $dx = dy = 0$ i $dz \neq 0$ je $d^2f = 0$. Dakle, ako se d^2f posmatra kao funkcija od (dx, dy, dz) , onda ne važi $d^2f > 0$ za svako $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$. Posmatrajmo funkciju jedne promenljive $u(z) = f\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, z\right) = -\frac{13}{3} + (z + 1)^3$. Kako je tačka $z = -1$ prevojna tačka funkcije jedne promenljive u , u svakoj okolini tačke Q postoji tačka (x_1, y_1, z_1) takva da je $f(x_1, y_1, z_1) > f\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, -1\right)$. Takođe, u svakoj okolini tačke Q postoji tačka (x_2, y_2, z_2) sa osobinom $f(x_2, y_2, z_2) < f\left(\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}, -1\right)$. To znači da funkcija f nema ekstremnu vrednost u tački Q .

■

2.11.1 Uslovni ekstremi funkcije

Funkcija dve promenljive f ima uslovni maksimum (uslovni minimum) u tački (x_0, y_0) na skupu

$$G = \{(x, y) | g(x, y) = 0\},$$

ako postoji okolina $U((x_0, y_0)) \subset D$ tačke (x_0, y_0) takva da za svaku tačku $(x, y) \in U((x_0, y_0)) \cap G$ važi

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Drugim rečima, dok se krećemo po krivoj C datoj sa $g(x, y) = 0$ u xy -ravni potrebno je da pronađemo tačku na toj krivoj u kojoj funkcija f ima minimalnu ili maksimalnu vrednost. Na interaktivnoj slici 2.24 je data površ $z = f(x, y)$ i kriva C iz narednog primera. Tačka A se nalazi na krivoj C datoj sa $g(x, y) = 0$ u xy -ravni. Pomoću datog klizača se može pomerati tačka $A(x_1, y_1, 0)$ po krivoj C pri čemu se može videti ponašanje tačke $B(x_1, y_1, f(x_1, y_1))$, a ujedno se može primetiti i kada funkcija f ima maksimalnu i minimalnu vrednost na C .

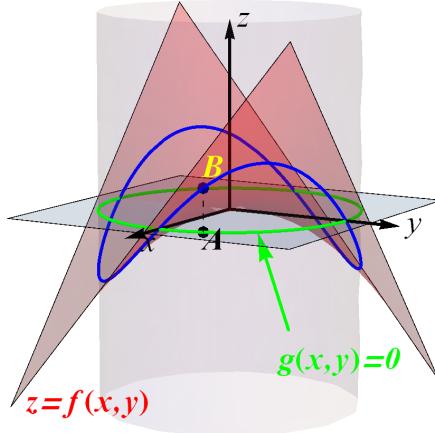
Problem određivanja uslovnih ekstrema se često rešava pomoću Lagranžovog metoda o kome će biti više reči u nastavku. Da bi se ovaj metod mogao primeniti potrebno je da funkcije f i g imaju neprekidne prve parcijalne izvode na skupu G .

Prepostavimo da tačka $A(x_0, y_0)$ pripada krivoj C , tj. važi $g(x_0, y_0) = 0$ i da funkcija f ima uslovni ekstrem u toj tački. Neka je kriva C data parametarski sa

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad t \in [a, b].$$

Dok se krećemo po krivoj C funkcija f ima sledeće vrednosti:

$$h(t) = f(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b].$$



Slika 2.24

Ako je $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ tada je

$$h'(t_0) = 0$$

jer u tački A funkcija jedne promenljive h ima lokalni minimum ili maksimum. Primenom formule za izračunavanje izvoda složene funkcije dobijamo

$$\begin{aligned} h'(t_0) &= f_x(x_0, y_0)u'(t_0) + f_y(x_0, y_0)v'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ako prepostavimo da vektori $\nabla f(x_0, y_0)$, $u'(t_0)\vec{i} + v'(t_0)\vec{j}$ nisu nula vektori, sledi da je vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ normalan na tangentni vektor krive C u tački (x_0, y_0) . To znači da je $\nabla f(x_0, y_0)$ normalan na krivu $g(x, y) = 0$. Vektor $\nabla g(x_0, y_0)$ je takođe normalan na krivu $g(x, y) = 0$ u tački (x_0, y_0) , o čemu je bilo reči u poglavljju 2.10.1. Dakle, vektori $\nabla f(x_0, y_0)$, $\nabla g(x_0, y_0)$ su paralelni (interaktivna slika 2.25), tj. postoji broj λ takav da je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0). \quad (2.20)$$

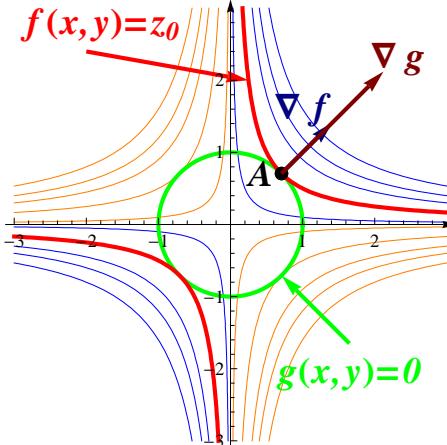
Vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ je u tački (x_0, y_0) normalan na liniju nivoa $f(x, y) = z_0$, gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$. Na slici 2.25 se vidi da se linija nivoa $f(x, y) = z_0$ i kriva $g(x, y) = 0$ dodiruju u tački (x_0, y_0) .

Tačke koje zadovoljavaju jednačinu (2.20) i uslov $g(x_0, y_0) = 0$ su stacionarne tačke funkcije

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

dok je λ parametar. Funkcija F se naziva Lagranžova funkcija.

Problem određivanja uslovnih ekstrema se svodi na pronađenje ekstremum funkcije F .



Slika 2.25

Sledi da se moguća tačka (x_0, y_0) uslovnog ekstrema funkcije f uz uslov $g(x, y) = 0$ posle utvrđivanja Lagranžove funkcije određuje iz jednačine (2.20), odnosno sistema jednačina

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 0,$$

$$g(x, y) = 0.$$

Priroda uslovnog ekstrema se određuje ispitivanjem znaka

$$d^2F = \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F(x_0, y_0)}{\partial y^2}(dy)^2,$$

pri čemu može da se koristi činjenica da je

$$\frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial g(x_0, y_0)}{\partial y}dy = 0. \quad (2.21)$$

Izraz sa leve strane jednakosti (2.21) je diferencijal funkcije g u tački (x_0, y_0) .

Ako je

- $d^2F < 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija f ima uslovni maksimum,
- $d^2F > 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$, tada u tački (x_0, y_0) funkcija f ima uslovni minimum.

Primer 2.25. Odrediti ekstremnu vrednost funkcije $f(x, y) = xy$, pod uslovom da je $x^2 + y^2 = 1$ (interaktivna slika 2.24).

Rešenje. Uzmimo da je $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Lagranžova funkcija ima sledeći oblik

$$F(x, y) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Prvi parcijalni izvodi funkcije F su $F_x = y - 2x\lambda$ i $F_y = x - 2y\lambda$. Sistem jednačina

$$y - 2x\lambda = 0$$

$$x - 2y\lambda = 0$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

ima četiri rešenja i to

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2},$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}, \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad Q\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad R\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ i } S\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

su moguće tačke uslovnih ekstremi funkcijske f . Ispitivanjem znaka drugog diferencijala funkcije F u svakoj od tih tačaka doći ćemo do zaključka o prirodi uslovnih ekstremi u tim tačkama. Drugi parcijalni izvodi funkcije F su

$$F_{xx} = -2\lambda, \quad F_{xy} = 1, \quad F_{yy} = -2\lambda.$$

Drugi diferencijal funkcije F u tački P i za $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ je dat sa

$$d^2F = -(dx)^2 + 2dxdy - (dy)^2 = -(dx - dy)^2.$$

U ovom slučaju jednakost (2.21) ima sledeći oblik

$$\sqrt{2}dx + \sqrt{2}dy = 0 \tag{2.22}$$

jer je $g_x(x, y) = 2x$ i $g_y(x, y) = 2y$, a u tački P prvi parcijali izvodi funkcije g su

$$g_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} \quad \text{i} \quad g_y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Iz jednakosti (2.22) sledi da je $dy = -dx$, pa imamo da je

$$d^2F = -4(dx)^2 < 0 \text{ za svako } dx \neq 0. \tag{2.23}$$

Sledi da funkcija f ima uslovni maksimum u tački P i vrednost funkcije u toj tački je $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Za drugi diferencijal funkcije F u tački Q i $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ takođe važi (2.23), pa funkcija f ima uslovni maksimum i u tački Q i $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

Za tačku R i S i za $\lambda_{3/4} = -\frac{1}{2}$ imamo da je

$$d^2F = (dx)^2 + 2dxdy + (dy)^2 = (dx + dy)^2,$$

i jednakost (2.21) ima oblik $\sqrt{2}dx - \sqrt{2}dy = 0$. Pošto je $d^2F > 0$ za svako $(dx, dy) \neq (0, 0)$ i $dx = dy$, funkcija f ima uslovni minimum u tačkama R i S . Vrednost funkcije u tim tačkama je $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

■

Primer 2.26. Odrediti ekstremnu vrednost funkcije $f(x, y) = x + xy + y$, pod uslovom da je $x + y = 1$ (interaktivna slika 2.26).

Rešenje. Uzmimo da je

$$g(x, y) = x + y - 1.$$

Odgovarajuća Lagranžova funkcija ima sledeći oblik

$$F(x, y) = x + xy + y - \lambda(x + y - 1).$$

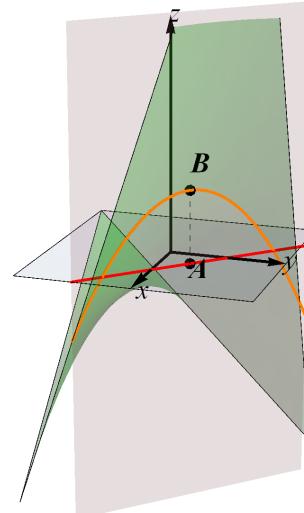
Prvi parcijalni izvodi funkcije F su $F_x = 1 + y - \lambda$, $F_y = x + 1 - \lambda$. Rešavanjem sistema jednačina

$$1 + y - \lambda = 0$$

$$1 + x - \lambda = 0$$

$$x + y = 1$$

dobija se da je $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ i $\lambda = \frac{3}{2}$. Tačka $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ je moguća tačka uslovnog ekstrema funkcije f .



Slika 2.26

Ispitivanjem znaka drugog diferencijala funkcije F u tački A , doći ćemo do zaključka da li funkcija f ima uslovni ekstrem u toj tački. Drugi parcijalni izvodi funkcije F su

$$F_{xx} = 0, \quad F_{xy} = 1, \quad F_{yy} = 0.$$

Drugi diferencijal funkcije F je dat sa

$$d^2F = 2dxdy,$$

Diferenciranjem uslova $g(x, y) = x + y - 1 = 0$ dobijamo $dx + dy = 0$, tj. $dy = -dx$. Imamo da je

$$d^2F = 2dxdy = -2(dx)^2 < 0 \text{ za svako } (dx, dy) \neq (0, 0).$$

Dakle, funkcija f ima uslovni maksimum u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i vrednost funkcije u toj tački je $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. ■

Ako je f funkcija tri promenljive, posle formiranja Lagranžove funkcije

$$F(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z),$$

analogno kao kod funkcija dve promenljive se ispitivanjem znaka diferencijala drugog reda funkcije F u tačkama mogućih uslovnih ekstrema zaključuje da li funkcija ima ekstrem pod uslovom $g(x, y, z) = 0$.

Primer 2.27. Kutija zapremine 8 ima oblik kvadra. Odrediti dimenzije kutije da bi količina kartona, potrebnog za njenu izradu, bila minimalna.

Rešenje. Da bi zapremina kvadra sa stranicima x, y, z bila 8, potrebno je da je zadovoljen uslov $g(x, y, z) = xyz - 8 = 0$. Površina kvadra kao funkcija od x, y i z je data sa $f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$. Potrebno je odrediti ekstremnu vrednost funkcije f pod uslovom g . Lagranžova funkcija ima sledeći oblik

$$F(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz - \lambda(xyz - 8).$$

Parcijalni izvodi funkcije F su $F_x = 2y + 2z - \lambda yz$, $F_y = 2x + 2z - \lambda xz$ i $F_z = 2x + 2y - \lambda xy$. Moguća tačka uslovnog ekstrema se dobija rešavanjem sistema jednačina

$$2y + 2z - \lambda yz = 0 \tag{2.24}$$

$$2x + 2z - \lambda xz = 0 \quad (2.25)$$

$$2x + 2y - \lambda xy = 0 \quad (2.26)$$

$$xyz = 8 \quad (2.27)$$

Ako se iz jednačina (2.24) i (2.25) redom izraze y i x , dobija se

$$x = y = -\frac{2z}{2 - \lambda z}.$$

Iz jednačina (2.25) i (2.26) se dobija

$$y = z = -\frac{2x}{2 - \lambda x}.$$

Sledi da je $x = y = z$. Na osnovu jednačine (2.27) imamo da je $x = y = z = 2$. Sada se iz (2.24), (2.25) ili (2.26) može zaključiti da je $\lambda = 2$. Dakle, tačka $A(2, 2, 2)$ je mogući uslovni ekstrem funkcije f . Drugi parcijalni izvodi funkcije F su

$$\begin{aligned} F_{xx} &= 0, & F_{xy} &= 2 - \lambda z, & F_{xz} &= 2 - \lambda y, \\ F_{yy} &= 0, & F_{yz} &= 2 - \lambda x, & F_{zz} &= 0. \end{aligned}$$

Drugi diferencijal funkcije F u tački A i za $\lambda = 2$ je

$$d^2F = -4dxdy - 4dxdz - 4dydz. \quad (2.28)$$

Diferenciranjem uslova $g(x, y, z) = 0$ dobijamo

$$yzdx + xzdy + xydz = 0,$$

dok za $x = y = z = \lambda = 2$ imamo $dx + dy + dz = 0$, tj. $dz = -dx - dy$. Ako uvrstimo $dz = -dx - dy$ u (2.28), imamo da je

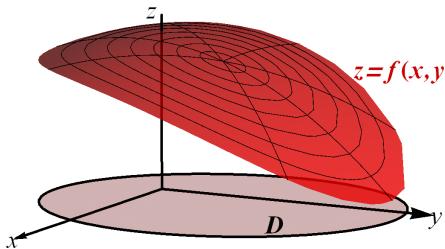
$$\begin{aligned} d^2F &= -4dxdy - 4dx(-dx - dy) - 4dy(-dx - dy) \\ &= 4((dx)^2 + dxdy + (dy)^2) \\ &= 4\left(\left(dx + \frac{1}{2}dy\right)^2 + \frac{3}{4}(dy)^2\right). \end{aligned}$$

Kako je $d^2F > 0$ za svako $(dx, dy, dz) \neq (0, 0, 0)$ uz posmatrani uslov, funkcija f ima uslovni minimum u tački $(2, 2, 2)$ i vrednost funkcije u toj tački je $f(2, 2, 2) = 24$. Dakle, kada kutija zapremine 8 ima stranice $x = y = z = 2$, tada je količina kartona, potrebnog za njenu izradu, minimalna. ■

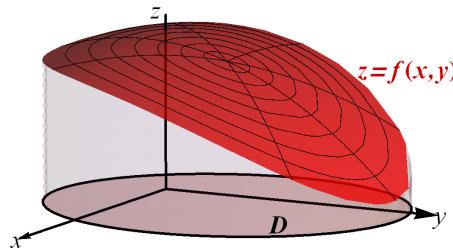
Glava 3

Dvostruki integral

Uvođenje dvostrukog integrala je slično uvođenju određenog integrala. Podsetimo se, određeni integral neprekidne i nenegativne funkcije jedne promenljive na intervalu $[a, b]$ je površina figure ograničene grafikom te funkcije, pravama $x = a$, $x = b$ i x -osom. Posmatrajmo sada grafik neprekidne funkcije dve promenljive f za koju važi $f(x, y) \geq 0$ dok (x, y) pripada zatvorenoj i ograničenoj oblasti D u xy -ravni, čiji je rub po delovima glatka kriva (slika 3.1).

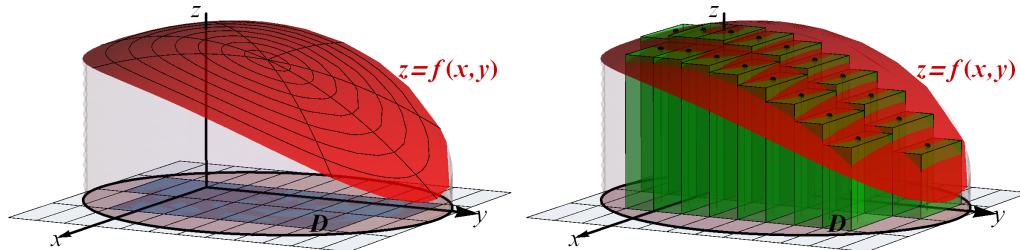


Slika 3.1



Slika 3.2

Opisaćemo na koji način se može približno odrediti zapremina cilindričnog tela ispod grafika funkcije f i iznad oblasti D datog na slici 3.2. Kako je D ograničena oblast oko nje se može opisati pravougaonik P . Podelimo pravougaonik P na manje pravougaonike pravama paralelnim x -osi i y -osi. Ako se izdvoje pravougaonici A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ koji se celi nalaze unutar oblasti D , dobija se unutrašnja podela oblasti D (slika 3.3) u oznaci Δ . Zatim, izaberimo proizvoljnu tačku (ξ_i, η_i) unutar pravougaonika A_i za svako



Slika 3.3

Slika 3.4

$i = 1, 2, \dots, n$. Ako se sa ΔA_i označi površina pravougaonika A_i , onda je

$$f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

zapremina kvadra čija je baza pravougaonik A_i i visina $f(\xi_i, \eta_i)$. Suma

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta A_i$$

se naziva Rimanova suma funkcije f za datu unutrašnju podelu Δ . U ovom slučaju je Rimanova suma zbir zapremina n kvadara sa bazom A_i i visinom $f(\xi_i, \eta_i)$ za $i = 1, 2, \dots, n$ i ona predstavlja aproksimaciju zapremine tela ispod grafika funkcije f i iznad oblasti D . Zbog jednostavnosti na interaktivnoj slici 3.4 se tačke (ξ_i, η_i) nalaze u preseku dijagonala pravougaonika A_i za svako $i = 1, 2, \dots, n$, što u opštem slučaju ne mora da važi. Pomoću ponuđenog klizača na interaktivnoj slici 3.4 se može videti da što je broj n veći to Rimanova suma bolje aproksimira zapreminu posmatranog tela.

Ako je V zapremina posmatranog tela, tada je

$$V = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i,$$

gde je sa $\|\Delta\|$ obeležena dužina najduže dijagonale među dijagonalama pravougaonika A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Sledi definicija dvostrukog integrala funkcije f nad oblasti D .

Definicija 3.1. Neka je funkcija f definisana na zatvorenoj i ograničenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ čiji je rub po delovima glatka kriva. Ako za svaku podelu

Δ oblasti D i svaki izbor od n tačaka (ξ_i, η_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, sa osobinom $(\xi_i, \eta_i) \in A_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, postoji uvek ista granična vrednost

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta A_i,$$

tada je funkcija f Riman-integrabilna na oblasti D i broj I se naziva dvostruki integral funkcije f nad D i obeležava se sa

$$\iint_D f(x, y) dA \text{ ili } \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Napomenimo da u opštem slučaju f ne mora da bude nenegativna funkcija na oblasti D . Ako funkcija f nije nenegativna na oblasti D tada Rimanova suma ne predstavlja aproksimaciju zapremine cilindričnog tela ograničenog grafikom funkcije f i oblasti D u xy -ravni.

Ako su funkcije f i g neprekidne na zatvorenoj i ograničenoj oblasti D , tada važi sledeće:

$$i) \quad \iint_D \alpha f(x, y) dA = \alpha \iint_D f(x, y) dA, \text{ za } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$ii) \quad \iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dA = \iint_D f(x, y) dA + \iint_D g(x, y) dA,$$

$$iii) \quad \iint_D f(x, y) dA = \iint_{D_1} f(x, y) dA + \iint_{D_2} f(x, y) dA,$$

gde je $D = D_1 \cup D_2$, presek oblasti D_1 i D_2 može biti samo po krivoj,

$$iv) \quad \text{ako je } f(x, y) \geq 0 \text{ na } D, \text{ onda je } \iint_D f(x, y) dA \geq 0;$$

$$v) \quad \text{ako je } f(x, y) \leq g(x, y) \text{ za svako } (x, y) \in D, \text{ onda je}$$

$$\iint_D f(x, y) dA \leq \iint_D g(x, y) dA.$$

3.1 Primena dvostrukog integrala

Pored toga što se pomoću dvostrukog integrala može izračunati zapremina tela, njegovom primenom se može odrediti površina oblasti u ravni i površina površi u \mathbb{R}^3 .

3.1.1 Površina oblasti u ravni

Na slici 3.5 je dat cilindar čija je projekcija na xy -ravan rub oblasti D i visina 1. Obeležimo sa V zapreminu tog cilindra. Kako je zapremina cilindra jednaka proizvodu površine baze i visine, to je

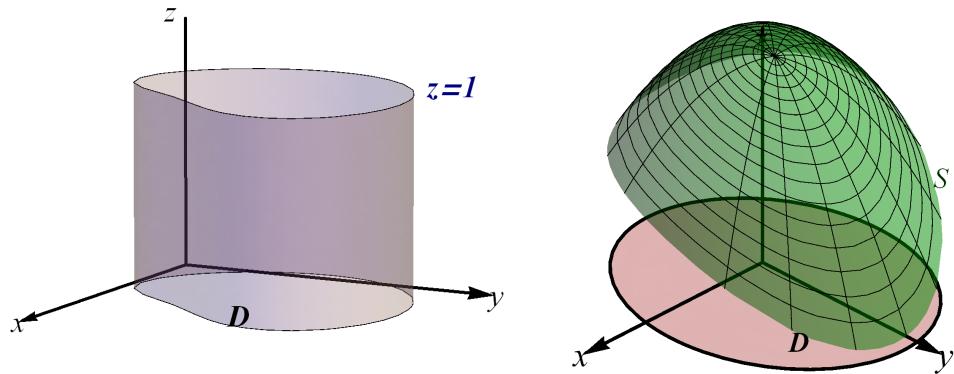
$$V = P(D) \cdot 1 = P(D). \quad (3.1)$$

Sa druge strane, zapremina posmatranog cilindra je jednaka dvostrukom integralu funkcije $f(x, y) = 1$ nad oblasti D , tj.

$$V = \iint_D 1 dA. \quad (3.2)$$

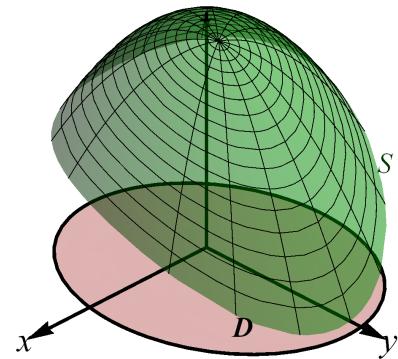
Iz jednakosti (3.1) i (3.2) sledi da je

$$P(D) = \iint_D dA.$$



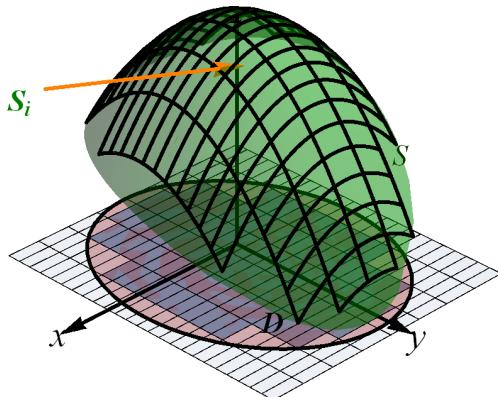
Slika 3.5

Slika 3.6

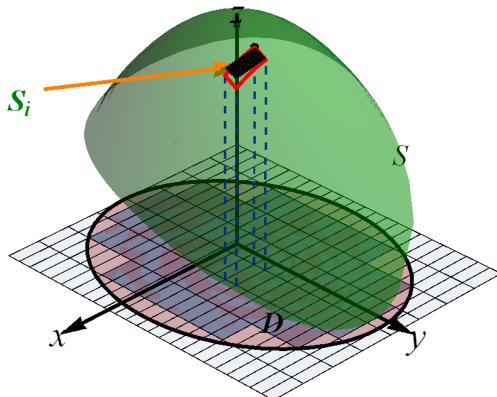


3.1.2 Površina površi

Neka je sa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ definisana površ S (slika 3.6). Pretpostavimo da je $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničena i zatvorena oblast čiji je rub po delovima glatka kriva, a funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ima neprekidne prve parcijalne izvode na D . Da bismo odredili površinu površi S , podelićemo je na više manj-



Slika 3.7



Slika 3.8

ih delova čije ćemo površine približno izračunati. Pre svega potrebno je prvo izvršiti unutrašnju podelu oblasti D (interaktivna slika 3.7). Označimo sa A_i , $i = 1, 2, \dots, n$ pravougaonike koji vrše unutrašnju podelu oblasti D i sa S_i , $i = 1, 2, \dots, n$ delove površi S čije su projekcije na xy -ravan redom pravougaonici A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Ako su Δx_i i Δy_i dužine stranica pravougaonika A_i , tada je površina tog pravougaonika $\Delta A_i = \Delta x_i \Delta y_i$. U svakom pravougaoniku izaberimo tačku (x_i, y_i) koja se nalazi u njegovom donjem levom uglu. Površina površi S_i , u oznaci ΔS_i se aproksimira sa površinom dela tangentne ravni T_i na površi S u tački $Q(x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ čija je projekcija na xy -ravan pravougaonik A_i , tj.

$$\Delta S_i \approx \Delta T_i,$$

gde je ΔT_i površina posmatranog dela tangentne ravni T_i (slika 3.8). Zatim se površina cele površi S , u oznaci $P(S)$, može aproksimirati na sledeći način:

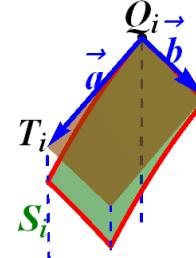
$$P(S) = \sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i.$$

Potrebito je još odrediti ΔT_i . Posmatrani deo tangentne ravni T_i je u stvari paralelogram kojeg određuju vektori

$$\vec{a} = \Delta x_i \vec{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \vec{k} \quad \text{i} \quad \vec{b} = \Delta y_i \vec{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \vec{k}.$$

Na slici 3.9 je data uvećana površ S_i i vektori \vec{a} i \vec{b} . Kako je površina paralelograma određenog pomoću dva vektora intenzitet vektorskog proizvoda ta dva vektora, odredićemo prvo vektorski proizvod vektora \vec{a} i \vec{b} :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \end{vmatrix}$$



Slika 3.9

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \vec{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \vec{j} + \Delta x_i \Delta y_i \vec{k} \\ &= -f_x(x_i, y_i) \Delta A_i \vec{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta A_i \vec{j} + \Delta A_i \vec{k}. \end{aligned}$$

Sledi da je

$$\Delta S_i \approx \Delta T_i = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1 + (f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2} \Delta A_i,$$

odnosno

$$P(S) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2} \Delta A_i.$$

Na interaktivnoj slici 3.7 se može videti da se dobija bolja aproksimacija povećanjem broja pravougaonika koji čine unutrašnju podelu oblasti D .

U skladu sa prethodnim, važi

$$P(S) = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f_x(x_i, y_i))^2 + (f_y(x_i, y_i))^2} \Delta A_i,$$

gde je sa $\|\Delta\|$ obeležena dužina najduže dijagonale među dijagonalama pravougaonika A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Na osnovu definicije dvostrukog integrala imamo

$$P(S) = \iint_D \sqrt{1 + (f_x(x, y))^2 + (f_y(x, y))^2} dA.$$

3.2 Izračunavanje dvostrukog integrala

Problem izračunavanja dvostrukog integrala se svodi na izračunavajuje dva uzastopna određena integrala. Sledeća teorema se naziva Fubinijeva teorema.

Teorema 3.1. *Neka je funkcija f neprekidna na oblasti D .*

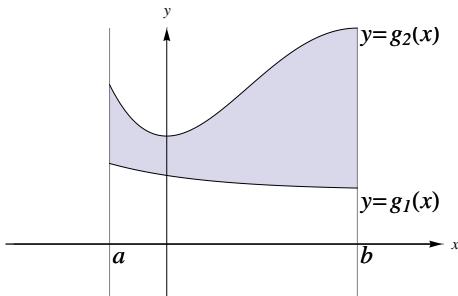
- i) *Ako je oblast D definisana sa $a \leq x \leq b$ i $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ gde su g_1 i g_2 neprekidne funkcije na $[a, b]$, tada je*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

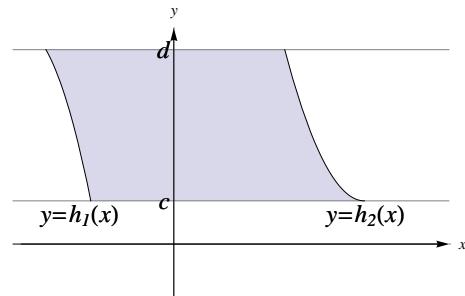
- ii) *Ako je oblast D definisana sa $c \leq y \leq d$ i $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$ gde su h_1 i h_2 neprekidne funkcije na $[c, d]$, tada je*

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Primeri oblasti D opisane u prethodnoj teoremi pod i) i ii) dati su na slici 3.10 i 3.11 respektivno.



Slika 3.10

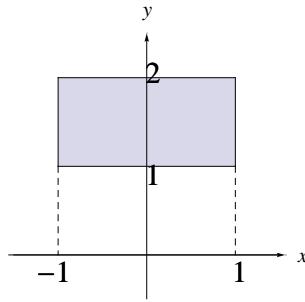


Slika 3.11

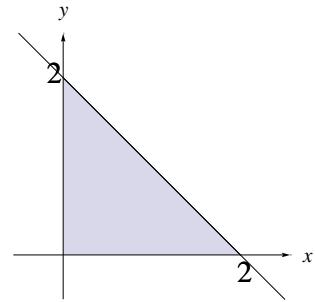
Primer 3.1. Izračunati integral $\iint_D (2x + y^2) dA$ ako je oblast D ograničena pravama $x = -1$, $x = 1$, $y = 1$ i $y = 2$.

Rešenje. Oblast D je data na slici 3.12. Data oblast može da se posmatra kao oblast opisana u teoremi 3.1 pod *i*) ili pod *ii*). Ako je posmatramo kao oblast pod *ii*) tada je

$$\begin{aligned} \iint_D (2x + y^2) dA &= \int_1^2 \left(\int_{-1}^1 (2x + y^2) dx \right) dy = \int_1^2 (x^2 + xy^2) \Big|_{-1}^1 dy \\ &= \int_1^2 (1 + y^2 - 1 + y^2) dy = \int_1^2 (2y^2) dy = \frac{14}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



Slika 3.12



Slika 3.13

Primer 3.2. Izračunati integral $\iint_D (x - 2y) dA$ ako je oblast D ogranična sa pravama $x = 0$, $y = 0$ i $x + y = 2$.

Rešenje. Oblast D je data na slici 3.13. Ako datu oblast posmatramo kao oblast opisanu u teoremi 3.1 pod *i*), tada je

$$\begin{aligned} \iint_D (x - 2y) dA &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x - 2y) dy \right) dx = \int_0^2 (xy - y^2) \Big|_0^{2-x} dx \\ &= \int_0^2 (x(2-x) - (2-x)^2) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx \\ &= -\frac{4}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

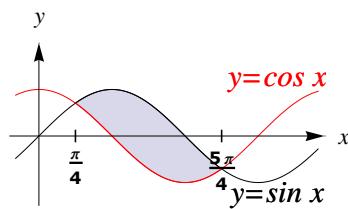
Primer 3.3. Izračunati površinu oblasti u xy -ravni koju ograničavaju grafici funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ dok $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Rešenje. Ako označimo sa $P(D)$ površinu date oblasti D , tada je

$$P(D) = \iint_D dA,$$

gde je oblast D data na slici 3.14.

U ovom slučaju je najjednostavnije da se dvostruki integral izračuna na sledeći način:



Slika 3.14

$$\begin{aligned} \iint_D dA &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \int_{\cos x}^{\sin x} dy dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} y \Big|_{\cos x}^{\sin x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx = 2\sqrt{2}. \blacksquare \end{aligned}$$

3.3 Smena promenljivih u dvostrukom integralu

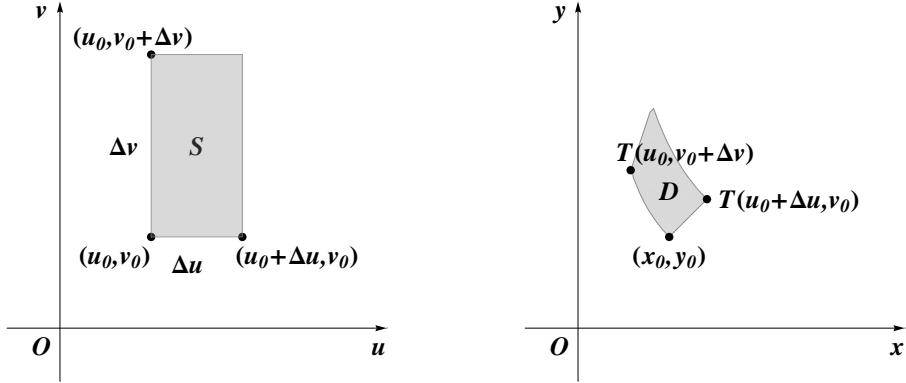
Dvostruki integral se može svesti na jednostavniji oblik za rešavanje pogodnom smenom promenljivih. Posmatrajmo smenu promenljivih

$$x = g(u, v), \quad y = h(u, v),$$

dok $(u, v) \in S$ i funkcije g i h imaju neprekidne prve parcijalne izvode na oblasti S . Obeležimo sa T transformaciju, koja preslikava pravougaonik S u uv -ravni na oblast D u xy -ravni (slike 3.15 i 3.16), datu sa

$$T(u, v) = (x, y) = (g(u, v), h(u, v)), \quad (u, v) \in S.$$

Dužine stranica pravougaonika S iznose Δu i Δv .



Slika 3.15

Slika 3.16

Neka vektori \vec{a} i \vec{b} imaju početnu tačku $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ i krajnju tačku $T(u_0 + \Delta u, v_0)$ i $T(u_0, v_0 + \Delta v)$ respektivno (slika 3.17). Kako je

$$T(u_0 + \Delta u, v_0) = (g(u_0 + \Delta u, v_0), h(u_0 + \Delta u, v_0))$$

i

$$T(u_0, v_0 + \Delta v) = (g(u_0, v_0 + \Delta v), h(u_0, v_0 + \Delta v)),$$

to je

$$\vec{a} = (g(u_0 + \Delta u, v_0) - g(u_0, v_0))\vec{i} + (h(u_0 + \Delta u, v_0) - h(u_0, v_0))\vec{j}$$

i

$$\vec{b} = (g(u_0, v_0 + \Delta v) - g(u_0, v_0))\vec{i} + (h(u_0, v_0 + \Delta v) - h(u_0, v_0))\vec{j}.$$

Iz Tejlorove formule sledi da je

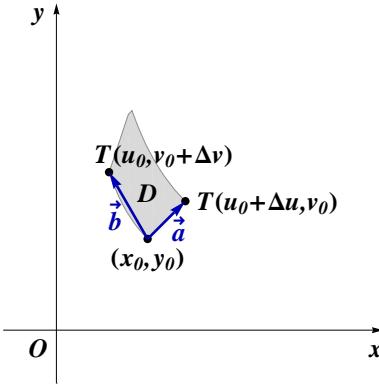
$$g(u_0 + \Delta u, v_0) - g(u_0, v_0) \approx g_u(u_0, v_0)\Delta u,$$

$$h(u_0 + \Delta u, v_0) - h(u_0, v_0) \approx h_u(u_0, v_0)\Delta u,$$

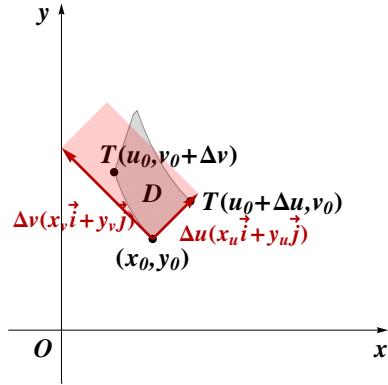
što se kraće može zapisati na sledeći način

$$g(u_0 + \Delta u, v_0) - g(u_0, v_0) \approx x_u\Delta u,$$

$$h(u_0 + \Delta u, v_0) - h(u_0, v_0) \approx y_u\Delta u.$$



Slika 3.17



Slika 3.18

Analogno se dobija da je

$$g(u_0, v_0 + \Delta v) - g(u_0, v_0) \approx x_v \Delta v,$$

$$h(u_0, v_0 + \Delta v) - h(u_0, v_0) \approx y_v \Delta v.$$

Dakle, prethodnim relacijama su približno određene koordinate vektora \vec{a} i \vec{b} te se površina oblasti D , u oznaci ΔA , može aproksimirati sa površinom paralelograma određenog vektorima

$$\Delta u(x_u \vec{i} + y_u \vec{j}) \text{ i } \Delta v(x_v \vec{i} + y_v \vec{j}),$$

(slika 3.18), tj.

$$\Delta A \approx |(\Delta u(x_u \vec{i} + y_u \vec{j})) \times (\Delta v(x_v \vec{i} + y_v \vec{j}))|.$$

S obzirom da je

$$\begin{aligned} (\Delta u(x_u \vec{i} + y_u \vec{j})) \times (\Delta v(x_v \vec{i} + y_v \vec{j})) &= \left((x_u \vec{i} + y_u \vec{j}) \times (x_v \vec{i} + y_v \vec{j}) \right) \Delta u \Delta v \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \\ &= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \vec{k} \Delta u \Delta v, \end{aligned}$$

važi

$$\left| (\Delta u(x_u \vec{i} + y_u \vec{j})) \times (\Delta v(x_v \vec{i} + y_v \vec{j})) \right| = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} |\vec{k}| \Delta u \Delta v.$$

Odakle sledi

$$\Delta A \approx |J(u, v)| \Delta u \Delta v,$$

gde je $|J(u, v)|$ apsolutna vrednost determinante $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$. Determinanta $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$ se naziva Jakobijeva determinanta (ili kraće Jakobijan).

Ako na opisan način aproksimiramo površinu svakog pravouganika P_i , $i = 1, \dots, n$ koji čine unutrašnju podelu oblasti D , dobijamo sledeće

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dA &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(g(u_i, v_i), h(u_i, v_i)) |J(u, v)| \Delta u_i \Delta v_i, \end{aligned}$$

gde se Jakobijeva determinanta izračunava u tački (u_i, v_i) . Poslednja suma je integralna suma koja odgovara integralu

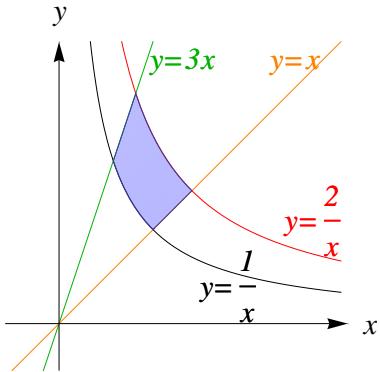
$$\iint_S f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Štaviše, važi sledeća teorema.

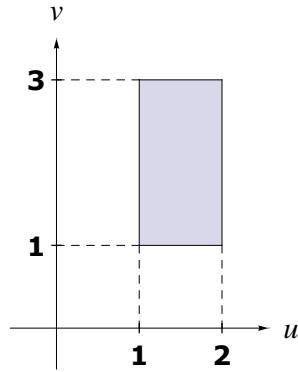
Teorema 3.2. Neka je S zatvorena i ograničena oblast čiji je rub po delovima glatka kriva, transformacija T data sa $T(u, v) = (g(u, v), h(u, v))$ bijekcija koja preslikava oblast S na oblast D i funkcije g i h imaju neprekidne prve parcijalne izvode na S . Ako je f neprekidna funkcija na D , onda je

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_S f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

Primer 3.4. Izračunati integral $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ gde je oblast D ograničena krivama $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ i $y = 2x$ za $x, y > 0$.



Slika 3.19



Slika 3.20

Rešenje. Oblast D je data na slici 3.19. Kako je oblast D ograničena krivama $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ i $y = 2x$ za $x, y > 0$, ona se može opisati sa

$$1 \leq xy \leq 2, \quad 1 \leq \frac{y}{x} \leq 3.$$

Neka je

$$u = xy \text{ i } v = \frac{y}{x} \text{ za } 1 \leq u \leq 2, \quad 1 \leq v \leq 3,$$

tada je

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}} \text{ i } y = \sqrt{uv}, \tag{3.3}$$

i Jakobijan transformacije date sa (3.3) je dat sa

$$|J(u, v)| = \frac{1}{2v}.$$

Na osnovu teoreme 3.2 imamo da je

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \iint_S \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{1}{2v} du dv,$$

gde je oblast S data na slici 3.20. Dalje je

$$\iint_S \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{1}{2v} du dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \int_1^3 (uv^{-2} + u) dv du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(u \frac{v^{-1}}{-1} + uv \right) \Big|_1^3 du = \frac{1}{2} \int_1^2 u \left(\frac{1}{-3} + 3 + 1 - 1 \right) du = \frac{4}{3} \left(\frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^2 \\
 &= 2. \blacksquare
 \end{aligned}$$

3.3.1 Polarne koordinate

Kada je oblast integracije krug, deo kruga ili podintegralna funkcija sadrži izraze oblika $x^2 + y^2$, uvođenjem polarnih koordinata dvostruki integral se obično svodi na jednostavniji oblik za rešavanje. Sistem jednačina

$$\begin{aligned}
 x &= \rho \cos \theta, \\
 y &= \rho \sin \theta
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

definiše transformaciju koordinata koja preslikava oblast

$$\{(\rho, \theta) | \rho \geq 0, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

u $\rho\theta$ -ravni na ceo \mathbb{R}^2 . Broj $\rho \geq 0$ predstavlja rastojanje tačke $A(x, y)$

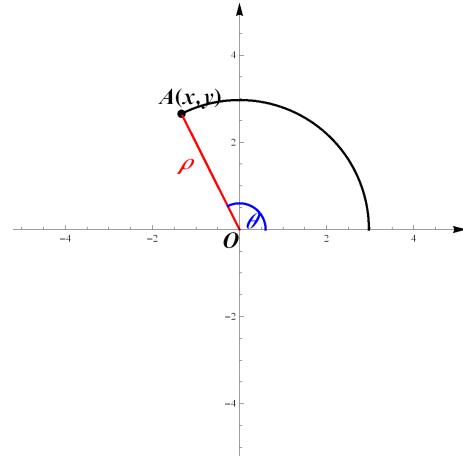
od koordinatnog početka O , a $\theta \in [0, 2\pi]$ ugao između pozitivnog smera x -ose i vektora \overrightarrow{OA} . Na interaktivnoj slici 3.21 pomoću datih klizača je moguće menjati θ i ρ . Jakobijeva determinanta transformacije (3.4) je

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

Primer 3.5. Pokazati da površina sfere poluprečnika r iznosi $4\pi r^2$.

Rešenje. Pomoću dvostrukog integrala izračunaćemo površinu sfere čija je jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Ako sa f označimo funkciju $f(x, y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ tada je grafik funkcije f polovina sfere koja se nalazi iznad xy -ravni (slika 4.11). Ako označimo sa P traženu površinu i sa P_1 površinu gornje polusfere, onda je $P = 2P_1$. Tada je

$$P_1 = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$$



Slika 3.21

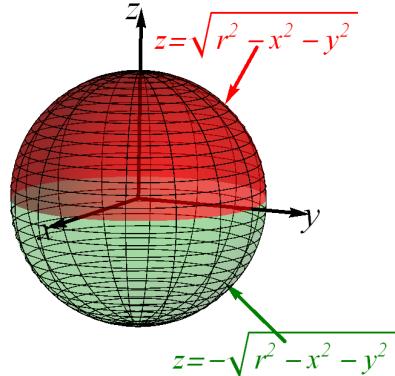
gde je D projekcija sfere na xy -ravan. Projekcija sfere na xy -ravan je krug sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom r . Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

površina polusfere je jednaka



Slika 3.22

$$\begin{aligned} P_1 &= \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Pomoću transformacije date sa $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ oblast D se preslikava u oblast $S = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ te se uvođenjem polarnih koordinata prethodni integral svodi na sledeći integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{r\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} r \left(-\sqrt{r^2 - \rho^2} \right) \Big|_0^r d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r^2.$$

Integral $\int \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho$ se rešava smenom $t = r^2 - \rho^2$ na sledeći način

$$\int \frac{\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} d\rho = \int \left(-\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \right) dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{r^2 - \rho^2} + C.$$

Sledi da je $P = 4\pi r^2$. ■

Primer 3.6. Izračunati integral $\iint_D x(x^2 + y^2) dx dy$ gde je D oblast ograničena kružnicom $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ i pravama $y = x$, $y = -x$.

Rešenje. Oblast D je data na slici 3.23. Kada se uvrsti $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ u jednačinu kružnice, dobija se jednačina $\rho = 4 \sin \theta$. Uzimajući u obzir da je oblast D ograničena pravama $y = x$, $y = -x$ koje zaklapaju ugao od $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$ respektivno sa pozitivnim delom x -ose, može se zaključiti da $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$. Oblast D je opisana pomoću polarnih koordinata sa $0 \leq \rho \leq 4 \sin \theta$ i $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$.

Sledi

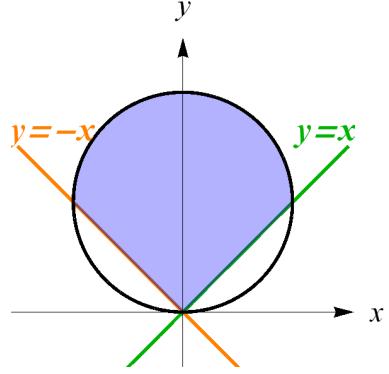
$$\begin{aligned} \iint_D x(x^2 + y^2) dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{4 \sin \theta} \rho \cos \theta \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{4 \sin \theta} \rho^4 \cos \theta d\rho d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left. \frac{\rho^5}{5} \right|_0^{4 \sin \theta} \cos \theta d\theta = \frac{4^5}{5} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^5 \theta \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Uvođenjem smene $t = \sin \theta$ dobijamo

$$\int \sin^5 \theta \cos \theta d\theta = \int t dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^6 \theta}{6} + C.$$

te je

$$\iint_D x(x^2 + y^2) dx dy = \frac{4^5}{5} \left(\frac{\sin^6 \theta}{6} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{4^5}{5 \cdot 6} \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^6 \right) = 0. \quad \blacksquare$$



Slika 3.23

3.3.2 Eliptične koordinate

Neka je oblast integracije elipsa čija je jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i njena unutrašnjost. Sistem jednačina

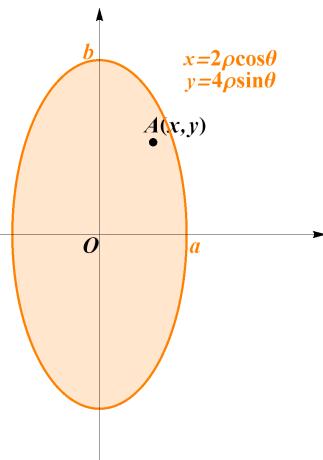
$$\begin{aligned} x &= a\rho \cos \theta, \\ y &= b\rho \sin \theta \end{aligned} \quad (3.5)$$

definiše transformaciju koordinata koja preslikava oblast

$$\{(\rho, \theta) | \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\}$$

u $\rho\theta$ -ravni na oblast

$$\{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$



Slika 3.24

u xy -ravan. Tački $A(x, y)$ odgovara $\rho = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$ i $\theta = \arctg \frac{ay}{bx}$ za $x \neq 0$. Na interaktivnoj slici 3.24 je moguće zadati vrednosti θ i ρ . Jakobijeva determinanta transformacije (3.5) je

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Primer 3.7. Izračunati zapreminu tela ograničenog elipsoidom

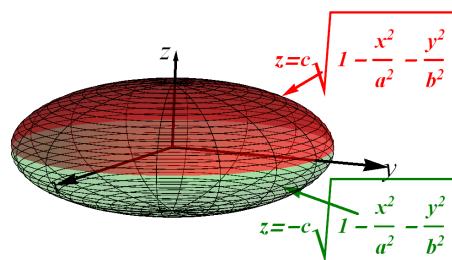
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0.$$

Rešenje. Izračunaćemo zapreminu V_1 tela ograničenog sa površi

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

i xy -ravni. Tada je tražena zapremina $V = 2V_1$, gde je

$$V_1 = \iint_D c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$



Slika 3.25

gde je D projekcija elipsoida na xy -ravan data sa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Ako uvedemo eliptične koordinate $x = a\rho \cos \theta$, $y = b\rho \sin \theta$, onda se oblast D preslikava u oblast $S = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ i važi

$$V_1 = c \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} ab\rho d\rho d\theta.$$

Integral $\int \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho$ se rešava smenom $t = 1 - \rho^2$ na sledeći način

$$\int \sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = \int \left(-\frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}} \right) dt = -\frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Sledi da je

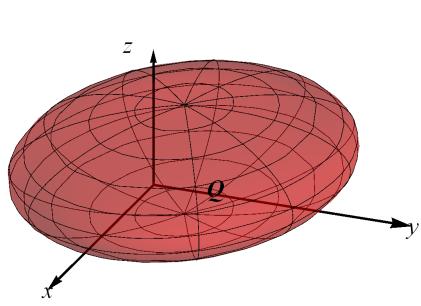
$$V_1 = abc \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 d\theta = \frac{2}{3} \pi abc,$$

odakle je $V = \frac{4}{3} \pi abc$. ■

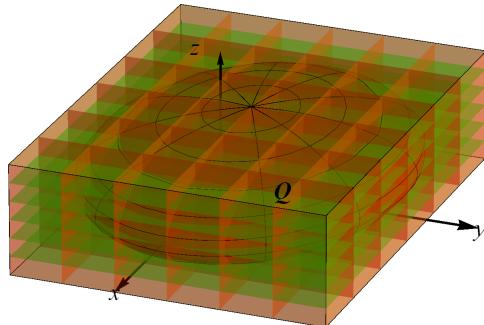
Glava 4

Trostruki integral

Trostruki integral se uvodi slično kao dvostruki i određeni integral. Neka je f funkcija tri promenljive definisana na zatvorenoj i ograničenoj oblasti $Q \subset \mathbb{R}^3$, čiji je rub po delovima glatka površ. Jedna takva oblast data je na slici 4.1. Kako je oblast Q ograničena, postoji kvadar P , koji je sadrži. Podela kvadra P se vrši pomoću ravnih koje su paralelne koordinatnim ravnim (slika 4.2). Unutrašnju podelu Δ oblasti Q čine kvadri Q_1, Q_2, \dots, Q_n koji su celi sadržani u Q .

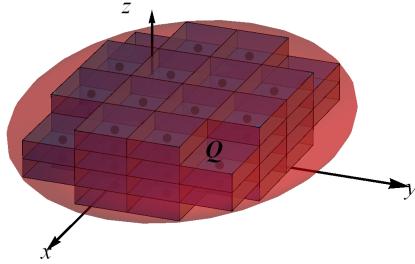


Slika 4.1



Slika 4.2

Na interaktivnoj slici 4.3 je data jedna unutrašnja podela oblasti Q . Označimo sa ΔV_i zapreminu kvadra Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ i sa $\|\Delta\|$ dužinu najduže dijagonale od svih dijagonala kvadara Q_i , $i = 1, 2, \dots, n$.



Slika 4.3

Rimanova suma funkcije f za datu unutrašnju podelu Δ je

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \nu_i) \Delta V_i,$$

gde je (ξ_i, η_i, ν_i) tačka u Q_i .

Definicija 4.1. Neka je funkcija f definisana na zatvorenoj i ograničenoj oblasti $Q \subset \mathbb{R}^3$, čiji rub je po delovima glatka površ. Ako za svaku podelu Δ oblasti Q i svaki izbor n tačaka (ξ_i, η_i, ν_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, sa osobinom $(\xi_i, \eta_i, \nu_i) \in Q_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, postoji uvek ista granična vrednost

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \nu_i) \Delta A_i,$$

onda je funkcija f Riman-integrabilna na oblasti Q , broj I se naziva trostruki integral funkcije f nad Q i obeležava se sa

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV \text{ ili } \iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz.$$

Iz definicije trostrukog integrala sledi da je trostruki integral funkcije f za koju važi $f(x, y, z) = 1$ za svako $(x, y, z) \in Q$, nad Q jednak zapremini V tela Q , tj.

$$V = \iiint_Q f(x, y, z) dV.$$

4.1 Izračunavanje trostrukog integrala

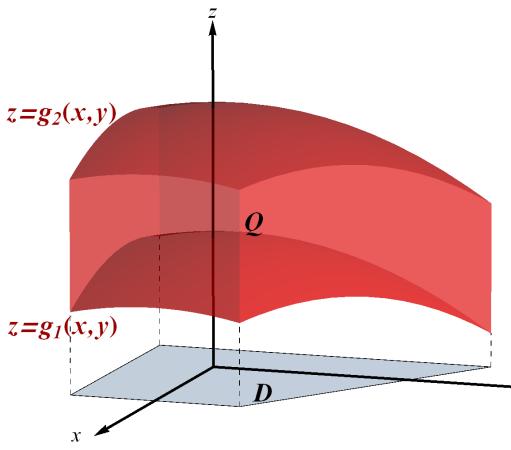
Prepostavićemo da je f neprekidna funkcija tri promenljive na zatvorenoj i ograničenoj oblasti Q . Posmatraćemo sledeća tri tipa oblasti Q :

I tip Neprekidne funkcije g_1 i g_2 na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ ispunjavaju sledeći uslov $g_1(x, y) \leq g_2(x, y)$ za sve $(x, y) \in D$. Oblast Q je data sa

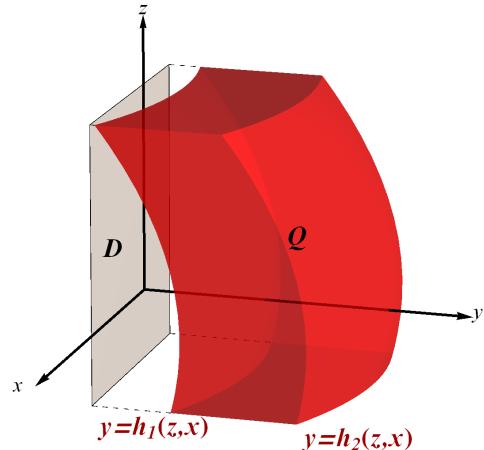
$$Q = \{(x, y, z) | (x, y) \in D, g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\}.$$

Jedna takva oblast je data na slici 4.4. Tada važi

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dA.$$



Slika 4.4



Slika 4.5

II tip Neprekidne funkcije h_1 i h_2 na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ ispunjavaju sledeći uslov:

$h_1(z, x) \leq h_2(z, x)$ za sve $(z, x) \in D$. Oblast Q je data sa

$$Q = \{(x, y, z) | (z, x) \in D, h_1(z, x) \leq y \leq h_2(z, x)\}.$$

Na slici 4.5 je dat primer ovog tipa oblasti.

U ovom slučaju važi

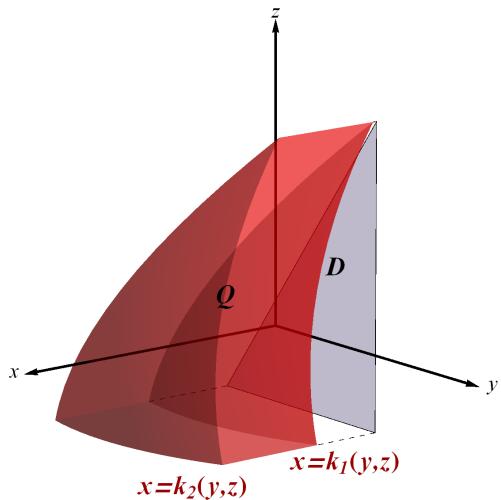
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{h_1(z,x)}^{h_2(z,x)} f(x, y, z) dy \right) dA.$$

III tip Neprekidne funkcije k_1 i k_2 na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ ispunjavaju sledeći uslov:

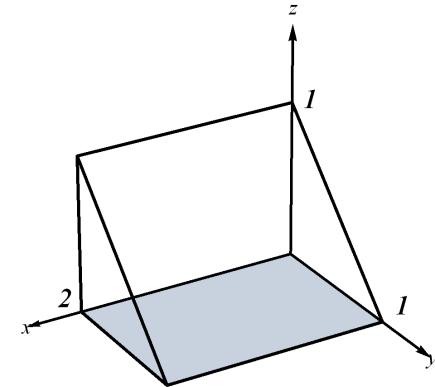
$k_1(y, z) \leq k_2(y, z)$ za sve $(x, z) \in D$. Oblast Q je data sa

$$Q = \{(x, y, z) | (y, z) \in D, k_1(y, z) \leq x \leq k_2(y, z)\}.$$

Primer ovog tipa oblasti je dat na slici 4.6.



Slika 4.6



Slika 4.7

U ovom slučaju važi

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{k_1(y,z)}^{k_2(y,z)} f(x, y, z) dx \right) dA.$$

Primer 4.1. Izračunati integral $\iiint_Q y dV$ gde je Q oblast ograničena površima $y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x = 2$.

Rešenje. Oblast Q je data na slici 4.7. Neka je sa D obeležen pravougaonik $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ u xy -ravni. Kako je $0 \leq z \leq 1 - y$ dok $(x, y) \in D$, to je

$$\iiint_Q y dV = \iint_D \left(\int_0^{1-y} y dz \right) dx dy = \iint_D (y - y^2) dx dy.$$

Sledi

$$\begin{aligned} \iint_D (y - y^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (y - y^2) dx \right) dy = \int_0^1 (y - y^2) x \Big|_0^2 dy \\ &= 2 \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.2 Smena promenljivih u trostrukom integralu

Smena promenljivih u trostrukom integralu se vrši analogno smeni promenljivih u dvostrukom integralu.

Teorema 4.1. Neka je S zatvorena i ograničena oblast čiji je rub po delovima glatka površ, transformacija T , data sa

$$T(u, v, w) = (x, y, z) = (g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)), \quad (u, v, w) \in S,$$

bijektivno preslikava oblast S na oblast Q i funkcije g, h i k imaju neprekidne prve parcijalne izvode na S . Ako je funkcija f neprekidna na oblasti Q , onda je

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iint_S f(g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

gde je

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Determinata $J(u, v, w)$ se naziva Jakobijeva determinanta transformacije T .

Cilindrične koordinate

Sistem jednačina

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \theta, \\y &= \rho \sin \theta, \\z &= z,\end{aligned}$$

pri čemu je

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R},$$

određuje transformaciju koordinata preko cilindričnih koordinata ρ , θ i z .

Neka je tačka $A'(x, y, 0)$ projekcija tačke $A(x, y, z)$. Tada je ρ rastojanje tačke A' od koordinatnog početka O , a θ ugao između pozitivnog smera x -ose i vektora $\overrightarrow{OA'}$. (interaktivna slika 4.8).

Jakobijeva determinanta koja odgovara ovoj transformaciji je

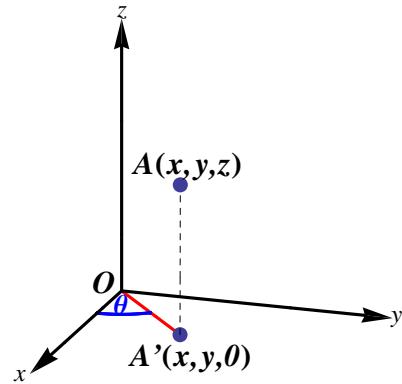
$$J(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\theta & x_z \\ y_\rho & y_\theta & y_z \\ z_\rho & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Primer 4.2. Izračunati integral $\iiint_Q xyz dV$ gde je oblast Q ograničena površima $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ i $z = 3 - y$.

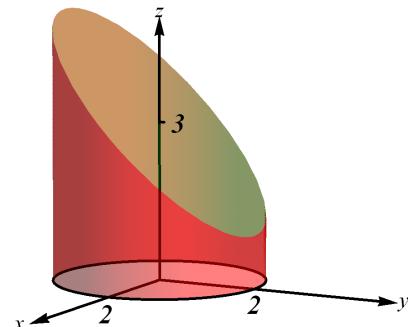
Rešenje. Oblast Q je data na slici

$$4.9. \quad \text{Neka je } I = \iiint_Q xyz dV.$$

Dati trostruki integral ćemo izračunati prelaskom na cilindrične koordinate ρ , θ i z . Zamenom $x = \rho \cos \theta$ i $y = \rho \sin \theta$ u jednačinu ravni $z = 3 - y$ dobijamo $z = 3 - \rho \sin \theta$. Oblast Q se preko cilindričnih koordinata opisuje sa $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq 2$



Slika 4.8



Slika 4.9

i $0 \leq z \leq 3 - \rho \sin \theta$. Ako primenimo teoremu 4.1, dobijamo

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{3-\rho \sin \theta} (\rho \cos \theta \rho \sin \theta z) \rho dz d\rho d\theta$$

Dalje imamo

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \left(\rho^3 \cos \theta \sin \theta \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{3-\rho \sin \theta} d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^3 \cos \theta \sin \theta (9 - 6\rho \sin \theta + \rho^2 \sin^2 \theta)) d\rho d\theta, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (9\rho^3 \cos \theta \sin \theta - 6\rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta + \rho^5 \cos \theta \sin^3 \theta) d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(9 \frac{2^4}{4} \cos \theta \sin \theta - 6 \frac{2^5}{5} \cos \theta \sin^2 \theta + \frac{2^6}{6} \cos \theta \sin^3 \theta \right) d\theta. \end{aligned}$$

Ako se svaki od prethodnih integrala reši smenom $t = \sin \theta$, dobija se

$$I = \frac{1}{2} \left(9 \frac{2^4}{4} \frac{\sin^2 \theta}{2} - 6 \frac{2^5}{5} \frac{\sin^3 \theta}{3} + \frac{2^6}{6} \frac{\sin^4 \theta}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \quad \blacksquare$$

Primer 4.3. Odrediti zapreminu tela ograničenog elipsoidom $x^2 + y^2 + \frac{25(z-9)^2}{36} = 9$ i ravni $z = 7$, datog na slici 4.10.

Rešenje. Potrebno je odrediti zapreminu oblasti Q ograničene sa donje strane elipsoidom

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{(z-9)^2}{9 \cdot \frac{36}{25}} = 1$$

i sa gornje strane sa ravni $z = 7$. Zapreminu V tela Q računamo pomoću formule

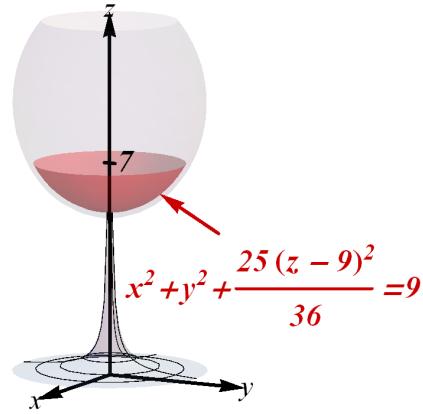
$$V = \iiint_Q dx dy dz.$$

Kada se $z = 7$ uvrsti u jednačinu elipsoida, dobija se jednačina kružnice $x^2 + y^2 = \frac{56}{9}$, koja predstavlja rub projekcije oblasti Q na xy -ravan. Deo elipsoida ispod ravni $z = 7$ je određen jednačinom $z = 9 - \frac{6}{5}\sqrt{9 - x^2 - y^2}$. Ako zamenimo $x = \rho \cos \theta$ i $y = \rho \sin \theta$ u prethodnu jednačinu dobijamo $z = 9 - \frac{6}{5}\sqrt{9 - \rho^2}$. Oblast Q se preko cilindričnih koordinata može opisati sa $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq \frac{2}{3}\sqrt{14}$ i $9 - \frac{6}{5}\sqrt{9 - \rho^2} \leq z \leq 7$. Sledi da je

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{14}} \int_{9 - \frac{6}{5}\sqrt{9 - \rho^2}}^7 \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{14}} \rho \left(-2 + \frac{6}{5}\sqrt{9 - \rho^2} \right) d\rho d\theta$$

Integral $\int \rho \left(\frac{6}{5}\sqrt{9 - \rho^2} \right) d\rho$ se rešava uvođenjem smene $t = 9 - \rho^2$, te je

$$V = \int_0^{2\pi} \left(-\rho^2 - \frac{6}{5} \frac{1}{3} \left(\sqrt{9 - \rho^2} \right)^3 \right) \Big|_0^{\frac{2}{3}\sqrt{14}} d\theta = \frac{736}{135}\pi. \quad \blacksquare$$



Slika 4.10

Sferne koordinate

Sistem jednačina

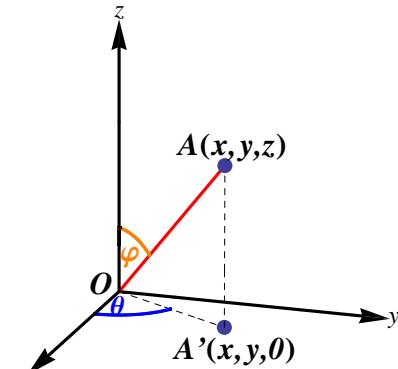
$$\begin{aligned} x &= \rho \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \rho \cos \varphi, \end{aligned}$$

gde je $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, određuje transformaciju koordinata preko sfernih koordinata ρ , θ i φ . Ako sa A' obeležimo projekciju tačke $A(x, y, z)$, ρ je rastojanje tačke A od koordinatnog početka O , φ je ugao

između pozitivnog smera z -ose i vektora \overrightarrow{OA} , a θ je ugao između pozitivnog smera x -ose i vektora $\overrightarrow{OA'}$ (interaktivna slika 4.11).

Jakobijan transformacije koju posmatramo je

$$\begin{aligned} J(\rho, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta - \rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

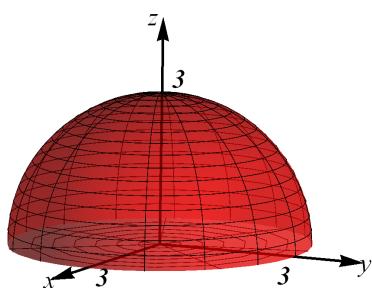


Slika 4.11

Primer 4.4. Izračunati integral $\iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$ gde je oblast Q data sa $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ i $z \geq 0$.

Rešenje. Oblast Q je data na slici 4.12. Kao posledicu teoreme 4.1 imamo da je

$$\begin{aligned} &\iiint_Q \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^3 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{3^4}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \, d\theta \end{aligned}$$



Slika 4.12

$$= \frac{81}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{81}{2}\pi. \quad \blacksquare$$

Glava 5

Vektorsko polje

Pored realnih funkcija više realnih promenljivih važan pojam u matematici je vektorsko polje.

Definicija 5.1. Preslikavanje koje svakom elementu skupa $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ dodeljuje tačno jedan element skupa $Y \subset \mathbb{R}^n$ se naziva vektorsko polje.

Dakle, vektorsko polje dodeljuje vektoru iz skupa X , vektor istih dimenzija iz skupa Y . U nastavku ćemo proučavati pojmove vezane za vektorska polja u ravni i u prostoru. Vektorsko polje u ravni se zapisuje na sledeći način

$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}, \quad (5.1)$$

gde su P i Q realne funkcije dve realne promenljive. Vektorsko polje dato sa (5.1) se kraće zapisuje u obliku

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}.$$

Slično, vektorsko polje u prostoru se zadaje u obliku

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

ili kraće

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

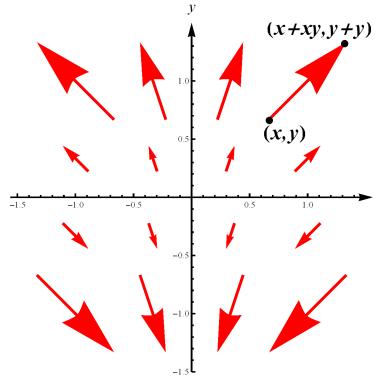
gde su P , Q i R realne funkcije tri realne promenljive. Funkcije P , Q i R se nazivaju komponentne funkcije vektorskog polja \vec{F} .

Za vektorsko polje se kaže da je neprekidno na skupu X ako su sve komponentne funkcije tog vektorskog polja neprekidne na X .

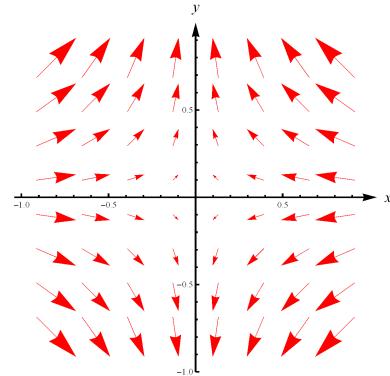
Vektorsko polje u ravni se grafički predstavlja skiciranjem vektora $\vec{F}(x, y)$ za nekoliko vrednosti x i y tako da je njegova početna tačka (x, y) . Na slikama 5.1 i 5.2 su dati grafički prikazi vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y) = xy\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{F}(x, y) = -x\vec{i} + y\vec{j},$$

respektivno.

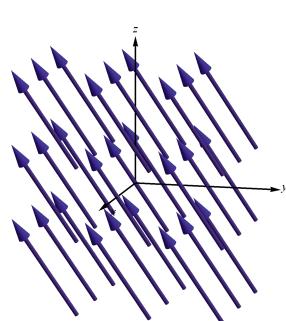


Slika 5.1

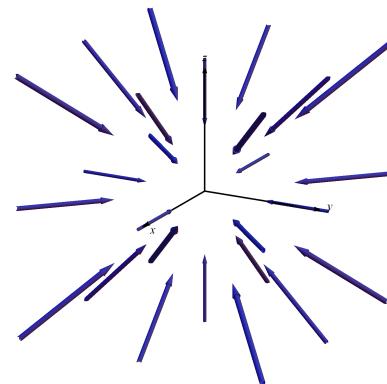


Slika 5.2

Analogno, vektorsko polje u prostoru se predstavlja u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu skiciranjem vektora $\vec{F}(x, y, z)$ za nekoliko vrednosti x , y i z tako da je njegova početna tačka (x, y, z) .



Slika 5.3



Slika 5.4

Vektorsko polje je konstantno na X ako su njegove komponentne funkcije jednake konstanti na X . Grafički prikaz konstantnog vektorskog polja u prostoru $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ je dat na slici 5.3, dok se na slici 5.4 nalazi grafički prikaz vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$.

U odeljku 2.10 smo proučavali gradijent funkcije. Gradijent funkcije je vektorsko polje. Vektorsko polje $\vec{F}(x, y) = -x\vec{i} + y\vec{j}$, čije je geometrijsko predstavljanje dato na slici 5.2, je gradijent funkcije

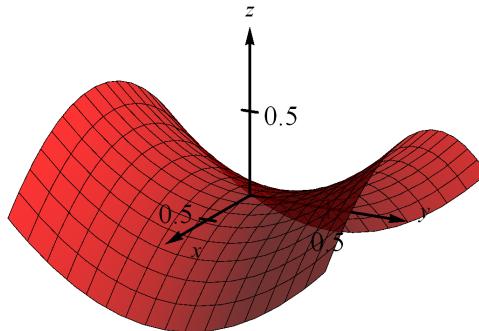
$$f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2.$$

Podsetimo se, gradijent funkcije u tački je vektor čiji pravac geometrijski predstavlja pravac po kome se funkcija najbrže menja u posmatranoj tački. Na slici 5.5 je data funkcija f za koju važi

$$\nabla f(x, y) = \vec{F}(x, y) = -x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Ako je vektorsko polje

$$\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2$$



Slika 5.5

takvo da postoji realna funkcija n promenljivih $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, koja zadovoljava jednakost

$$\vec{F} = \nabla f,$$

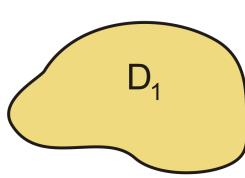
onda se kaže da je \vec{F} konzervativno ili potencijalno vektorsko polje sa funkcijom potencijala f .

U opštem slučaju vektorsko polje ne mora imati funkciju potencijala. Na primer, vektorsko polje \vec{F} dato na slici 5.1 nije konzervativno, tj. ne postoji funkcija f takva da je $\vec{F} = \nabla f$.

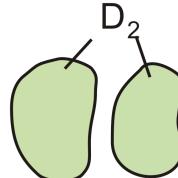
Pre nego što bude navedena teorema koja daje odgovor na pitanje kada je vektorsko polje u ravni konzervativno, uvećemo pojam povezanog i jednostruko povezanog skupa.

Skup D je povezan ako se svake dve tačke iz tog skupa mogu povezati po delovima glatkim krivom L tako da je L sadržana u D . Oblasti D_1 i D_3 date na slikama 5.6 i 5.8 su povezane, dok oblast D_2 na slici 5.7 nije povezana.

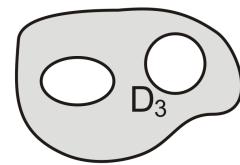
Za krivu C kažemo da je prosta kriva ako ne preseca sama sebe. Povezana oblast D u ravni je jednostruko povezana ako ima osobinu da svaka zatvorena prosta kriva u D ograničava skup tačaka koji pripada D . Na slici 5.6 je data jednostruko povezana oblast, dok oblasti D_2 i D_3 date na slikama 5.7 i 5.8 nisu jednostruko povezane.



Slika 5.6



Slika 5.7



Slika 5.8

Teorema 5.1. Neka funkcije P i Q imaju neprekidne prve parcijalne izvode na otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$. Vektorsko polje $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ je konzervativno na D ako i samo važi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

na D .

Primer 5.1. Ispitati da li je vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y) = (y^2 - 3x^2y + 1)\vec{i} + (2xy - x^3)\vec{j}$$

konzervativno. Ako jeste, odrediti funkciju potencijala.

Rešenje. Za komponentne funkcije

$$P(x, y) = y^2 - 3x^2y + 1 \quad \text{i} \quad Q(x, y) = 2xy - x^3$$

vektorskog polja \vec{F} važi

$$P_y = 2y - 3x^2 \quad \text{i} \quad Q_x = 2y - 3x^2.$$

Kako je $P_y = Q_x$ na \mathbb{R}^2 , na osnovu teoreme 5.1 možemo da zaključimo da je dato vektorsko polje konzervativno. Odredimo funkciju potencijala tog vektorskog polja.

Za funkciju potencijala f je potrebno da važi $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y + 1$, sledi

$$f(x, y) = \int (y^2 - 3x^2y + 1) dx = xy^2 - x^3y + x + g(y). \quad (5.2)$$

Diferenciranjem jednakosti $f(x, y) = xy^2 - x^3y + x + g(y)$ po y dobijamo

$$f_y(x, y) = 2xy - x^3 + g'(y). \quad (5.3)$$

Međutim, kako je potrebno da važi $f_y(x, y) = Q(x, y) = 2xy - x^3$, iz (5.3) se može zaključiti da je

$$g'(y) = 0.$$

Kad integralimo prethodnu jednakost po y dobijamo

$$g(y) = k.$$

Zamenom dobijene funkcije g u (5.2) dobijamo

$$f(x, y) = xy^2 - x^3y + x + k,$$

pri čemu k može biti bilo koji realan broj. ■

Teorema pomoću koje se može zaključiti da li je vektorsko polje u prostoru konzervativno biće navedena nakon što budu uvedeni pojmovi rotora i divergencije vektorskog polja.

5.1 Rotor i divergencija

Neka je $\vec{F} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^3$, vektorsko polje i

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k},$$

gde realne funkcije tri promenljive P, Q i R imaju parcijalne izvode na D .

Rotor vektorskog polja \vec{F} , u označi $\vec{\text{rot}} \vec{F}$, je

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

tj.

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Divergencija vektorskog polja \vec{F} , u označi $\text{div } \vec{F}$, je

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Primer 5.2. Odrediti rotor i divergenciju vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y) = x^2y^2\vec{i} + \frac{xz}{y}\vec{j} + xyz\vec{k},$$

za $x, y, z \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

Rešenje. Rotor datog vektorskog polja je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^2 & \frac{xz}{y} & xyz \end{vmatrix} \\ &= (xz - \frac{x}{y})\vec{i} - yz\vec{j} + (\frac{z}{y} - 2x^2y)\vec{k} \end{aligned}$$

Divergencija vektorskog polja F je

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial(x^2y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{xz}{y})}{\partial y} + \frac{\partial(xyz)}{\partial z} = 2xy^2 - \frac{xz}{y^2} + xy. \quad \blacksquare$$

Bezvrtložno vektorsko polje je vektorsko polje \vec{F} za koje važi

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$$

za svaku tačku $(x, y, z) \in D$. Pomoću teoreme koja sledi se može zaključiti da li je vektorsko polje u prostoru konzervativno.

Teorema 5.2. Neka funkcije P , Q i R imaju neprekidne prve parcijalne izvode na otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^3$. Vektorsko polje $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ je konzervativno na D ako i samo važi

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$$

na D .

Primer 5.3. Ispitati da li je vektorsko polje

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy + yz)\vec{i} + (x^2 + z + xz)\vec{j} + (y + xy)\vec{k}$$

konzervativno. Ako jeste, odrediti funkciju potencijala.

Rešenje. Odredimo rotor vektorsko polja \vec{F} . Kako je

$$\begin{aligned}\vec{\operatorname{rot}} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + yz & x^2 + z + xz & y + xy \end{vmatrix} \\ &= (1 + x - (1 + x)) \vec{i} - (y - y) \vec{j} + (2x + z - (2x + z)) \vec{k} = \vec{0},\end{aligned}$$

na osnovu teoreme 5.2 možemo da zaključimo da je \vec{F} konzervativno vektorsko polje. Sada ćemo odrediti funkciju potencijala f datog vektorskog polja. Za funkciju potencijala f vektorskog polja \vec{F} je potrebno da važi

$$f_x(x, y, z) = 2xy + yz, \quad (5.4)$$

$$f_y(x, y, z) = x^2 + z + xz, \quad (5.5)$$

$$f_z(x, y, z) = y + xy. \quad (5.6)$$

Integraljenjem jednakosti (5.4) po promenljivoj x dobijamo

$$f(x, y, z) = \int (2xy + yz) dx = x^2y + xyz + \varphi(y, z). \quad (5.7)$$

Ako diferenciramo prethodno dobijenu jednakost $f(x, y, z) = x^2y + xyz + \varphi(y, z)$ po y dobijamo

$$f_y(x, y, z) = x^2 + xz + \varphi_y(y, z). \quad (5.8)$$

Iz (5.5) i (5.8) sledi da je

$$\varphi_y(y, z) = z,$$

odakle je

$$\varphi(y, z) = \int z dy = zy + \psi(z).$$

Ako zamenimo dobijenu funkciju φ u (5.7), dobijamo

$$f(x, y, z) = x^2y + xyz + zy + \psi(z).$$

Kada diferenciramo po z prethodnu jednakost, dobijamo sledeće

$$f_z(x, y, z) = xy + y + \psi'(z).$$

S obzirom da je potrebno da je ispunjeno (5.6), sledi da je $\psi'(z) = 0$ što važi kada je $\psi(z) = k$, gde je k bilo koji realan broj. Dakle, funkcija potencijala vektorskog polja \vec{F} ima oblik $f(x, y, z) = x^2y + xyz + zy + k$. ■

Glava 6

Krivolinijski integral

U ovom poglavlju će biti date definicije i osobine krivolinijskog integrala skalarne funkcije i krivolinijskog integrala vektorskog polja.

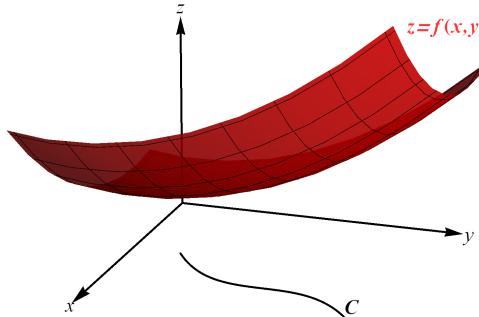
6.1 Krivolinijski integral skalarne funkcije

Neka je C po delovima glatka kriva u xy -ravni koja je zadata parametarski

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in [a, b] \quad (6.1)$$

i f realna funkcija dve promenljive definisana na oblasti D koja sadrži krivu C (slika 6.1).

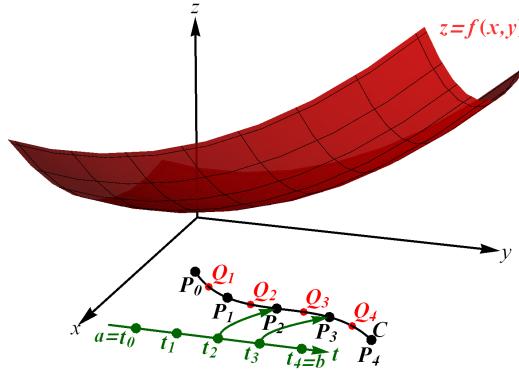
Vršimo podelu krive C , tako što prvo podelimo interval $[a, b]$ na n podintervala na sledeći način:



Slika 6.1

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Tačke P_i sa koordinatama $(g(t_i), h(t_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$ dele krivu C na n krivih-lukova (slika 6.2). Neka je sa Δs_i označena dužina luka $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ i sa $||\Delta||$ dužina najdužeg luka između svih lukova $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na svakom od lukova $P_{i-1}P_i$ izaberimo proizvoljnu tačku $Q_i(u_i, v_i)$ (interaktivna slika 6.2).



Slika 6.2

Rimanova suma funkcije f za posmatranu podelu je

$$\sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta s_i.$$

Definicija 6.1. Neka je f realna funkcija dve promenljive definisana na oblasti D koja sadrži krivu C . Ako za svaku podelu krive C i svaki izbor tačaka $Q_i(u_i, v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, postoji uvek ista granična vrednost

$$\lim_{||\Delta|| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i) \Delta s_i,$$

tada se ta granična vrednost naziva krivolinijski integral funkcije f duž krive C i označava se sa

$$\int_C f(x, y) ds.$$

Krivolinijski integral skalarne funkcije se naziva još i krivolinijski integral prve vrste.

Krivolinijski integral realne funkcije tri promenljive se definiše analogno krivolinijskom integralu realne funkcije dve promenljive. U ovom slučaju se polazi od glatke krive C u \mathbb{R}^3 čija je parametrizacija

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t), \quad t \in [a, b] \quad (6.2)$$

i funkcije f tri promenljive, definisane nad $D \subset \mathbf{R}^3$ pri čemu je kriva C sadržana u D .

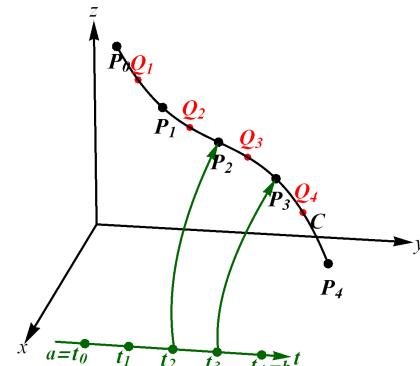
Podjela krive C se vrši na lukove $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, sličnim postupkom kojim smo delili krivu u ravni (interaktivna slika 6.3). Sa Δs_i se označava dužina luka $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ i sa $\|\Delta\|$ dužina najdužeg luka od svih lukova. Na svakom od lukova $P_{i-1}P_i$ se izabere proizvoljna tačka Q_i sa koordinatama (u_i, v_i, w_i) .

Definicija 6.2. Neka je f realna funkcija tri promenljive definisana na oblasti D koja sadrži krivu C . Ako za svaku podelu krive C i svaki izbor tačaka $Q_i(u_i, v_i, w_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, postoji uvek ista granična vrednost

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(u_i, v_i, w_i) \Delta s_i,$$

tada se ta granična vrednost naziva krivolinijski integral funkcije f duž krive C i označava se sa

$$\int_C f(x, y, z) ds.$$



Slika 6.3

6.1.1 Osobine krivolinijskog integrala skalarne funkcije

Neka su f i g funkcije tri promenljive definisane na krivoj $C \subset \mathbf{R}^3$ i pretpostavimo da postoje krivolinijski integrali $\int_C f(x, y, z) ds$ i $\int_C g(x, y, z) ds$.

Tada važi

- $\int_C (\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)) ds = \alpha \int_C f(x, y, z) ds + \beta \int_C g(x, y, z) ds$,
gde su α i β realni brojevi.

- $\int_C f(x, y, z) ds = \int_{C_1} f(x, y, z) ds + \int_{C_2} f(x, y, z) ds$, gde je kriva C unija krivih C_1 i C_2 , a krive C_1 i C_2 imaju samo jednu zajedničku tačku.

- $\int_C f(x, y, z) ds = \int_{-C} f(x, y, z) ds$, gde je C kriva sa početnom tačkom A i krajnjom tačkom B , a $-C$ kriva koja se sastoji od istih tačaka kao C , ali je njena početna tačka B , a krajnja tačka A .

6.1.2 Izračunavanje krivolinijskog integrala skalarne funkcije

Ako je f funkcija dve promenljive takva da je $f(x, y) = 1$ za svako $(x, y) \in C$, tada je krivolinijski integral funkcije f duž krive C dužina luka krive C . Dužina luka krive u ravni date parametarski sa

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in [a, b]. \quad (6.3)$$

se može odrediti pomoću određenog integrala na sledeći način:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt.$$

U skladu sa tim, pod pretpostavkom da je f neprekidna funkcija na krivoj C , datoju parametarskom obliku sa (6.3), krivolinijski integral funkcije f duž krive C se računa pomoću formule

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(g(t), h(t)) \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2} dt.$$

Ako je C kriva u prostoru određena sa (6.2) i funkcija tri promenljive f neprekidna na C , tada se krivolinijski integral funkcije f duž krive C izračunava pomoću sledeće formule:

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t)) \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2 + (k'(t))^2} dt.$$

Primer 6.1. Izračunati $\int_C (x - 1)(y + 1) ds$ gde krivu C čine deo elipse $\frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1$ od tačke $(4, -1)$ do tačke $(1, 1)$, deo prave od tačke $(1, 1)$ do tačke $(1, -1)$ i deo prave od tačke $(1, -1)$ do tačke $(4, -1)$.

Rešenje. Obeležimo sa C_1 deo elipse $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$ od tačke $(4, -1)$ do tačke $(1, 1)$, sa C_2 deo prave od tačke $(1, 1)$ do tačke $(1, -1)$ i sa C_3 deo prave od tačke $(1, -1)$ do tačke $(4, -1)$ (slika 6.4). Neka je

$$I_1 = \int_{C_1} (x-1)(y+1) ds,$$

$$I_2 = \int_{C_2} (x-1)(y+1) ds$$

$$\text{i } I_3 = \int_{C_3} (x-1)(y+1) ds.$$

Tada je

$$\int_C (x-1)(y+1) ds = I_1 + I_2 + I_3.$$

Kriva C_1 se može parametrizovati na sledeći način

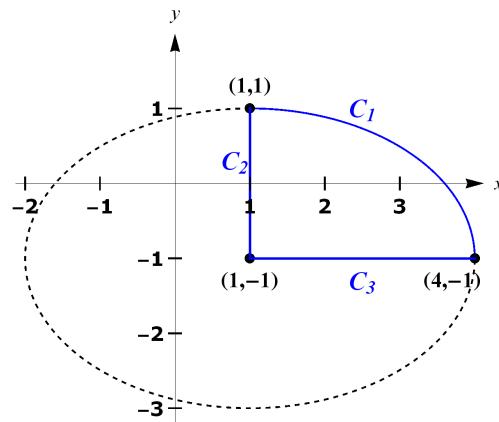
$$x = 1 + 3 \cos t, \quad y = -1 + 2 \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Ako iskoristimo formulu za izračunavanje krivolinijskog integrala, dobijamo

$$I_1 = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt.$$

Uzimajući u obzir da je $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$, dobijamo integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t \sqrt{9 - 5 \cos^2 t} dt$$



Slika 6.4

koji se može rešiti uvođenjem smene $u = 9 - 5 \cos^2 t$. Tada je $du = 10 \cos t \sin t dt$ i

$$I_1 = \frac{6}{10} \int_4^9 \sqrt{u} du = \frac{3}{5} \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_4^9 = \frac{2}{5} (27 - 8) = \frac{38}{5}.$$

Kriva C_2 se parametarski može predstaviti sa $x = 1$, $y = t$, $t \in [-1, 1]$, te je

$$I_2 = \int_{-1}^1 0 \cdot (t+1) \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} dt = 0.$$

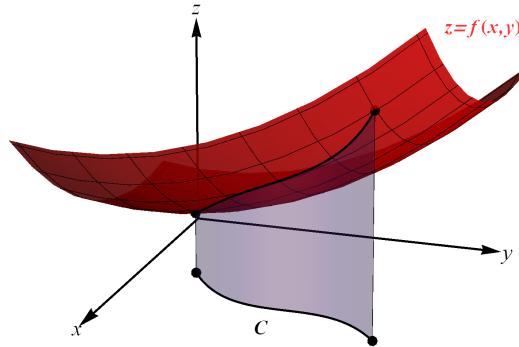
Kriva C_3 ima parametarski oblik $x = t$, $y = -1$, $t \in [1, 4]$. Sledi

$$I_3 = \int_1^4 (t-1) \cdot 0 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} dt = 0.$$

Imamo da je $\int_C (x-1)(y+1) ds = \frac{38}{5}$. ■

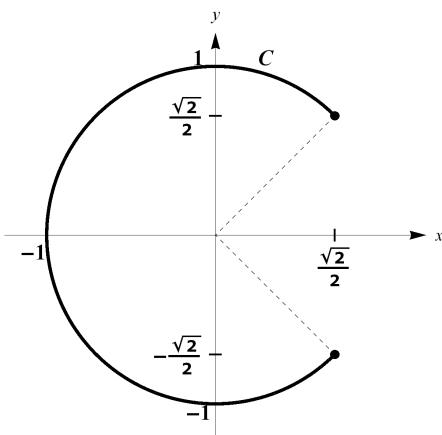
6.1.3 Geometrijska interpretacija krivolinijskog integrala skalarne funkcije

Neka je f nenegativna funkcija dve promenljive na krivoj $C \subset \mathbb{R}^2$. Tada krivolinijski integral funkcije f duž krive C predstavlja površinu cilindrične površi čija je projekcija na xy -ravan kriva C i čije su dužine izvodnica jednake vrednosti funkcije f u svakoj od tačaka krive C (slika 6.5). Detaljnije objašnjenje vezano za geometrijsku interpretaciju krivolinijskog integrala nenegativne funkcije f duž krive C se može videti na interaktivnoj slici koja se otvara klikom na sliku 6.5.

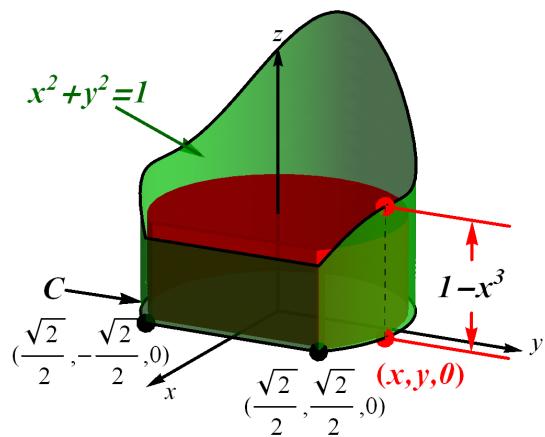


Slika 6.5

Primer 6.2. Neka je kriva C deo kružnice $x^2 + y^2 = 1$ od tačke $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ do tačke $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ kao na slici 6.6. Izračunati površinu cilindrične površi čija je projekcija na xy -ravan kriva C i čije su dužine izvodnica jednake vrednosti funkcije $f(x, y) = 1 - x^3$ u svakoj od tačaka krive C (slika 6.7).



Slika 6.6



Slika 6.7

Rešenje. Obeležimo traženu površinu sa P . Važi

$$P = \int_C (1 - x^3) ds.$$

Kriva C , tj. deo kružnice sa slike 6.6 se parametrizuje na sledeći način

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

Ako iskoristimo formulu za izračunavanje krivolinijskog integrala, dobijamo

$$P = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (1 - \cos^3 t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt.$$

Sledi da je

$$\begin{aligned}
 P &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (1 - \cos^3 t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} dt - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} (1 - \sin^2 t) \cos t dt \\
 &= \frac{3\pi}{2} - \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} = \frac{3\pi}{2} + \frac{5}{6}\sqrt{2}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

6.2 Krivolinijski integral vektorskog polja

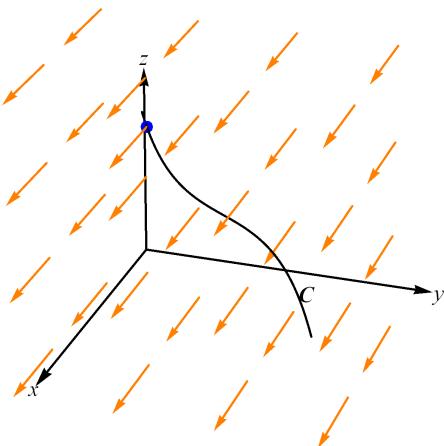
Neka je

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

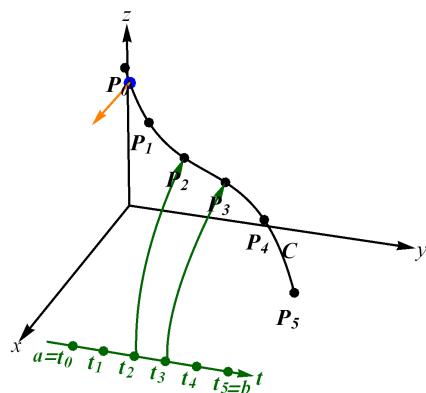
vektorsko polje gde su P , Q i R neprekidne funkcije na D i C glatka kriva sadražana u D (slika 6.8) data sa

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad z = k(t), \quad t \in [a, b]$$

Neka $\vec{F}(x, y, z)$ predstavlja silu koja deluje u tački (x, y, z) . Prepostavimo



Slika 6.8



Slika 6.9

da ta sila deluje na česticu koja se kreće po krivoj C . Odredićemo rad koji vrši sila \vec{F} po krivoj C . Rad W koji izvrši konstantna sila \vec{F} nad česticom pri pomjeraju za \overrightarrow{AB} je skalarni proizvod sile \vec{F} i pređenog puta, tj.

$$W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (6.4)$$

S obzirom da jednakost (6.4) važi samo kada je putanja čestice prava linija, izvršićemo podelu krive C na više delova koji liče na prave linije. Neka su $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ tačke iz intervala $[a, b]$ koje zadovoljavaju sledeće uslove

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

Tačke P_i čije su koordinate $(g(t_i), h(t_i), k(t_i))$, $i = 1, 2, \dots, n$ dele krivu C na lukove $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (interaktivna slika 6.9).

Neka je sa Δs_i označena dužina luka $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Na svakom od lukova $P_{i-1}P_i$ izaberimo proizvoljnu tačku $Q_i(u_i, v_i, w_i)$ i obeležimo sa $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)$ jedinični tangentni vektor krive C u tački Q_i . Na slici 6.10 vektor $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)$ je plave boje dok je $\vec{F}(u_i, v_i, w_i)$ narandžaste. S obzirom da je $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)$ jedinični vektor, to vektor $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)\Delta s_i$ ima isti smer i pravac kao vektor $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)$ dok mu je intenzitet jednak Δs_i . Korišteći formulu 6.4 možemo zaključiti da za rad W_i koji izvrši konstantna sila $\vec{F}(u_i, v_i, w_i)$ po pravolinijskoj putanji u pravcu vektora $\vec{T}(u_i, v_i, w_i)$, dužine Δs_i , važi

$$W_i = \vec{F}(u_i, v_i, w_i) \cdot \vec{T}(u_i, v_i, w_i)\Delta s_i$$

Sledi da za rad W sile koja deluje na česticu duž cele krive C važi sledeća aproksimacija

$$W \approx \sum_{i=1}^n W_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}(u_i, v_i, w_i) \cdot \vec{T}(u_i, v_i, w_i)\Delta s_i.$$

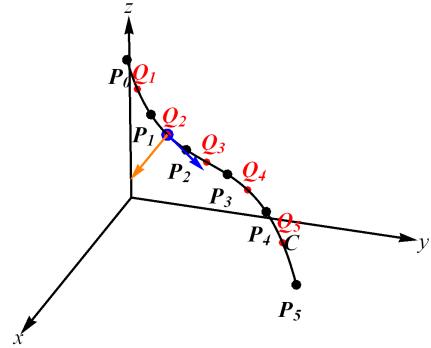
Što je broj n veći to je prethodna aproksimacija bolja. U skladu sa prethodnim, rad W koji čini sila \vec{F} po krivoj C je

$$W = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}(u_i, v_i, w_i) \cdot \vec{T}(u_i, v_i, w_i)\Delta s_i,$$

gde je $\|\Delta\|$ dužina najdužeg luka između svih lukova $P_{i-1}P_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Iz definicije krivolinijskog integrala skalarne funkcije sledi da je

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds.$$



Slika 6.10

Kako je

$$\vec{T} = \frac{g'(t)\vec{i} + h'(t)\vec{j} + k'(t)\vec{k}}{\sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2 + (k'(t))^2}} \text{ i } ds = \sqrt{(g'(t))^2 + (h'(t))^2 + (k'(t))^2} dt,$$

to je

$$W = \int_a^b \vec{F}(g(t), h(t), k(t)) \cdot (g'(t)\vec{i} + h'(t)\vec{j} + k'(t)\vec{k}) dt.$$

Definicija 6.3. Neka je \vec{F} neprekidno vektorsko polje definisano na glatkoj krivoj C datoj sa $\vec{r}(t) = g(t)\vec{i} + h(t)\vec{j} + k(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$. Krivolinijski integral vektorskog polja \vec{F} nad krivom C je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(g(t), h(t), k(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Krivolinijski integral vektorskog polja se naziva još i krivolinijski integral druge vrste.

Ako vektorsko polje \vec{F} ima oblik

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

tada se krivolinijski integral vektorskog polja \vec{F} nad krivom C zapisuje i na sledeći način

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Za razliku od krivolinijskog integrala skalarne funkcije, krivolinijski integral vektorskog polja zavisi od orijentacije krive. Naime,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

gde je C kriva sa početnom tačkom A i krajnjom tačkom B , a $-C$ kriva koja se sastoji od istih tačaka kao C , ali je njena početna tačka B , a krajnja tačka A .

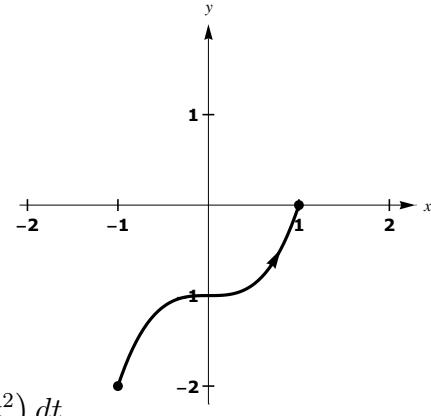
Primer 6.3. Izračunati $\int_C (2x^3 - 3y) dx + y dy$ gde je C kriva $y = x^3 - 1$ od tačke $(-1, -2)$ do tačke $(1, 0)$.

Rešenje. Kriva C je data na slici 6.11 i njena parametrizacija je

$$x = t, \quad y = t^3 - 1, \quad t \in [-1, 1].$$

Iz definicije krivolinijskog integrala vektorskog polja sledi

$$\begin{aligned} & \int_C (2x^3 - 3y) dx + y dy \\ &= \int_{-1}^1 ((2t^3 - 3(t^3 - 1)) \cdot 1 + (t^3 - 1) \cdot 3t^2) dt, \end{aligned}$$



Slika 6.11

tj.

$$\begin{aligned} \int_C (2x^3 - 3y) dx + y dy &= \int_{-1}^1 (3t^5 - t^3 - 3t^2 + 3) dt \\ &= \left(3\frac{t^6}{6} - \frac{t^4}{4} - 3\frac{t^3}{3} + 3t \right) \Big|_{-1}^1 = 4. \end{aligned}$$

Primer 6.4. Izračunati krivolinijski integral vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

duž krive C dobijene u preseku površi $z = 1 + x^2 + y^2$ i $z = 2y + 1$, orijentisane u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu posmatrano iz tačke $(0, 0, 5)$.

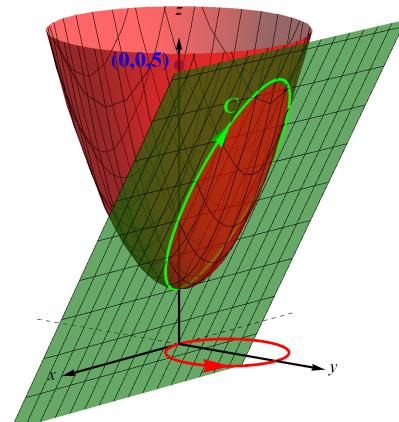
Rešenje. Na slici 6.12 data je kriva C i njena projekcija na xy -ravan. Projekcija krive C na xy -ravan se dobija iz jednakosti

$$1 + x^2 + y^2 = 2y + 1.$$

Prethodna jednakost je jednačina kružnice u xy -ravni

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

čija je parametrizacija
 $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$



Slika 6.12

Kako za tačku (x, y, z) sa krive C važi $z = 2y + 1$, to je $z = 3 + 2 \sin t$. Dakle, parametrizacija krive C je

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad z = 3 + 2 \sin t,$$

dok $t \in [0, 2\pi]$. Sledi

$$\begin{aligned} \int_C (y+z) dx + (2z-x) dy + (x-y) dz &= \int_0^{2\pi} ((4 + \sin t + 2 \sin t)(-\sin t) \\ &\quad + (6 + 4 \sin t - \cos t)(\cos t) + (\cos t - 1 - \sin t)(2 \cos t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos t - 4 \sin t + 2 \cos 2t + \sin 2t - 1) = -2\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

6.2.1 Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

U ovom odeljku ćemo videti u kom slučaju krivolinijski integral vektorskog polja ne zavisi od putanje integracije. Krenućemo od primera krivolinijskog integrala konzervativnog vektorskog polja duž tri različite putanje čije su početna i krajnja tačka u sva tri slučaja iste.

Primer 6.5. Odrediti rad koji vrši sila $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\vec{i} + \frac{1}{4}x^2\vec{j}$ na česticu koja se kreće od tačke $(0, 0)$ do tačke $(1, 1)$ duž krive:

- a) $C_1 : y = x$, b) $C_2 : y = x^2$, c) $C_3 : y = 6x^5 - 8x^3 + 3x$.

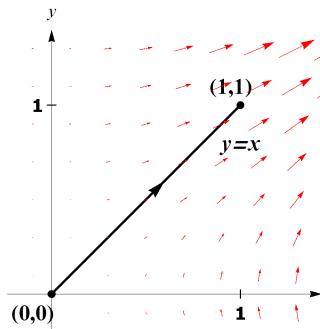
Rešenje. Krive C_1 , C_2 , C_3 su date redom na slikama 6.13, 6.14, 6.15.

a) Kriva C_1 ima oblik $x = t$, $y = t$, $t \in [0, 1]$ te je

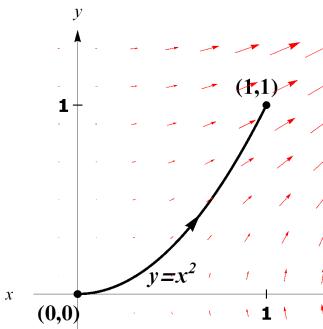
$$W = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

b) Kriva C_2 ima parametraski oblik $x = t$, $y = t^2$, $t \in [0, 1]$ odakle je

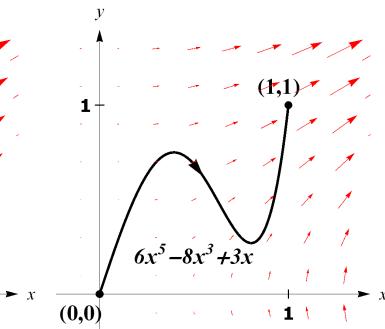
$$W = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}t^2 \right) dt = \frac{3}{4} \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$



Slika 6.13



Slika 6.14



Slika 6.15

c) Kriva C_3 se može opisati na sledeći način: $x = t$, $y = 6t^5 - 8t^3 + 3t$, $t \in [0, 1]$ odakle je

$$W = \int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left(\frac{21}{2}t^6 - 10t^4 + \frac{9}{4}t^2 \right) dt = \left(\frac{3}{2}t^7 - 2t^5 + \frac{3}{4}t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{4}x^2 \right) = \frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2}xy \right) = \frac{1}{2}x,$$

za svako $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, na osnovu teoreme 5.1 vektorsko polje \vec{F} , dato u primeru 6.5, je konzervativno. U opštem slučaju, ako pretpostavimo da je C glatka kriva u otvorenoj oblasti D data sa

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad t \in [a, b]$$

i ako postoji funkcija f takva da je

$$\vec{F}(x, y) = f_x(x, y)\vec{i} + f_y(x, y)\vec{j}$$

na D , tada je

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(g(t), h(t)) \cdot (g'(t)\vec{i} + h'(t)\vec{j}) dt \\ &= \int_a^b (f_x(g(t), h(t))g'(t) + f_y(g(t), h(t))h'(t)) dt. \end{aligned}$$

Na osnovu formule za izvod složene funkcije (2.6) imamo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \frac{d}{dt} (f(g(t), h(t))) dt.$$

Primenjujući Njutn-Lajbnicovu formulu koja važi za određeni integral dobijamo

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(g(t), h(t))|_a^b = f(g(b), h(b)) - f(g(a), h(a)).$$

Ovim smo pokazali da sa navedenim pretpostavkama krivolinijski integral konzervativnog vektorskog polja zavisi samo od vrednosti funkcije potencijala tog vektorskog polja u počenoj i krajnjoj tački krive C .

Dakle, dokazali smo sledeće tvrđenje:

Teorema 6.1. *Neka je C glatka kriva sadržana u otvorenoj oblasti D čija je početna tačka $A(a_1, a_2)$ i krajnja tačka $B(b_1, b_2)$. Ako su funkcije P i Q neprekidne na D i $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ konzervativno vektorsko polje na D , tada*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(b_1, b_2) - f(a_1, a_2).$$

gde je f funkcija potencijala vektorskog polja \vec{F} .

Vratimo se na primer 6.5. Za vektorsko polje $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{2}xy\vec{i} + \frac{1}{4}x^2\vec{j}$ funkcija potencijala je $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2y$, te se krivolinijski integral duž krive C_1 , C_2 i C_3 sa početnom tačkom $(0, 0)$ i krajnjom tačkom $(1, 1)$ može izračunati i na sledeći način:

$$\int_{C_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 1) - f(0, 0) = \frac{1}{4},$$

za $i = 1, 2, 3$.

U prostoru važi sledeće tvrđenje koje se može analogno pokazati kao teorema 6.1.

Teorema 6.2. Neka je C glatka kriva sadržana u otvorenoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^3$ čija je početna tačka $A(a_1, a_2, a_3)$ i krajnja tačka $B(b_1, b_2, b_3)$. Ako su funkcije P, Q i R neprekidne na D i $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ konzervativno vektorsko polje na D , tada

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(b_1, b_2, b_3) - f(a_1, a_2, a_3).$$

gde je f funkcija potencijala vektorskog polja \vec{F} .

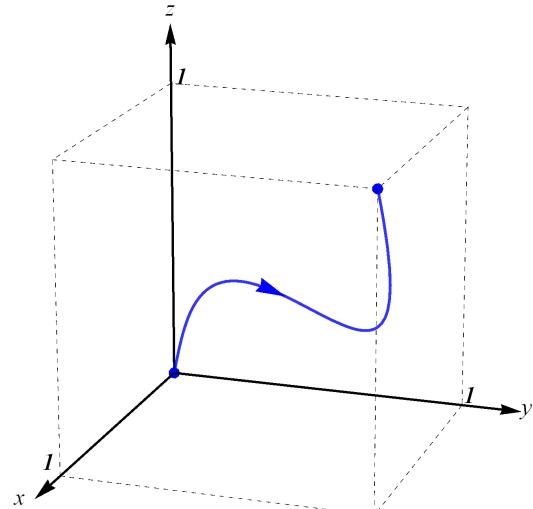
Primer 6.6. Izračunati krivolinijski integral vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = 2xy\vec{i} + (x^2 + z^2)\vec{j} + 2yz\vec{k}$ duž glatke krive sa početnom tačkom $(0, 0, 0)$ i krajnjom tačkom $(1, 1, 1)$ date na slici 6.16.

Rešenje. Vektorsko polje \vec{F} je konzervativno što se može proveriti primenom teoreme 5.2. Prvo ćemo odrediti funkciju potencijala datog vektorskog polja. S obzirom da je potrebno da za funkciju potencijala f važi $f_x(x, y, z) = 2xy$, sledi

$$f(x, y, z) = \int 2xy dx = x^2y + \varphi(y, z). \quad (6.5)$$

Diferenciranjem prethodne jednakosti $f(x, y, z) = x^2y + \varphi(y, z)$ po y dobijamo

$$f_y(x, y, z) = x^2 + \varphi_y(y, z). \quad (6.6)$$



Slika 6.16

Međutim, kako je potrebno da važi $f_y(x, y, z) = x^2 + z^2$, iz (6.6) se može zaključiti da je

$$\varphi_y(y, z) = z^2,$$

što kad integralimo po y dobijamo

$$\varphi(y, z) = z^2y + \psi(z).$$

Ako zamenimo dobijenu funkciju φ u (6.5), dobijamo

$$f(x, y, z) = x^2y + z^2y + \psi(z).$$

Kada diferenciramo po z prethodnu jednakost, dobijamo sledeće

$$f_z(x, y, z) = 2zy + \psi'(z).$$

Pošto je potrebno da je ispunjeno $f_z(x, y, z) = 2yz$, sledi da je $\psi'(z) = 0$ što je ispunjeno kada je $\psi(z) = 0$. Jedna funkcija potencijala vektorskog polja \vec{F} je $f(x, y, z) = x^2y + z^2y$. Iz teoreme 6.2 sledi

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1, 1, 1) - f(0, 0, 0) = 2. \quad \blacksquare$$

Ako za svake dve proizvoljne tačke A i B iz oblasti D i za svake dve po delovima glatke krive C_1 i C_2 čije su tačka A početna i B krajnja tačka, važi

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

tada se kaže da krivolinijski integral vektorskog polja \vec{F} ne zavisi od putanje integracije u D . Teorema koja sledi daje potreban i dovoljan uslov za nezavisnost krivolinijskog integrala vektorskog polja od putanje integracije.

Teorema 6.3. *Ako je \vec{F} neprekidno vektorsko polje na otvorenoj i povezanoj oblasti D , tada krivolinijski integral vektorskog polja \vec{F} ne zavisi od putanje integracije ako i samo ako je \vec{F} konzervativno vektorsko polje.*

6.3 Grinova teorema

Teorema, koja daje vezu između dvostrukog integrala nad jednostruko povezanoj oblasti D u ravni i krivolinijskog integrala vektorskog polja duž ruba oblasti D , se naziva Grinova teorema.

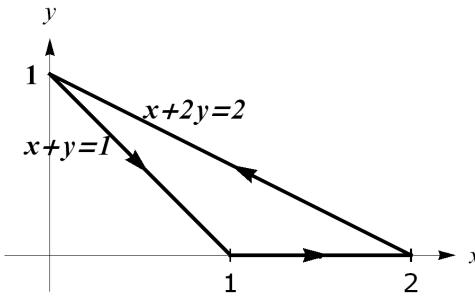
Podsetimo se, za krivu C kažemo da je prosta kriva ako ne preseca sama sebe. Povezana oblast D u ravni je jednostruko povezana ako ima osobinu da svaka zatvorena prosta kriva ograničava skup koji pripada D .

Teorema 6.4. (Grinova teorema) *Neka je D jednostruko povezana oblast čiji je rub po delovima glatka kriva C , pozitivno orijentisana, tj. orijentisana*

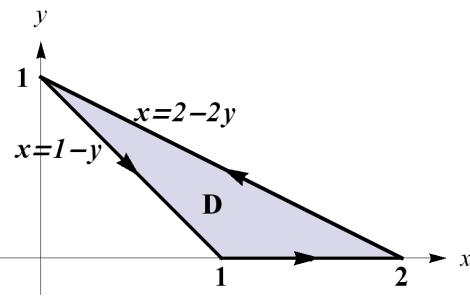
suprotno kretanju kazaljke na satu. Ako funkcije P i Q imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekoj otvorenoj oblasti koja sadrži D , tada je

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (Q_x(x, y) - P_y(x, y)) dA.$$

Primer 6.7. Kriva C je data na slici 6.17 i čine je deo prave $x + y = 1$ od tačke $(0, 1)$ do tačke $(1, 0)$, deo prave $y = 0$ od tačke $(1, 0)$ do tačke $(2, 0)$ i deo prave $x + 2y = 2$ od tačke $(2, 0)$ do tačke $(0, 1)$. Pomoću Grinove teoreme izračunati krivolinijski integral vektorskog polja $\vec{F}(x, y) = 2y\vec{i} - x^2\vec{j}$ duž krive C .



Slika 6.17



Slika 6.18

Rešenje. Ovde je $P(x, y) = 2y$ i $Q(x, y) = -x^2$. Pošto je $Q_x = -2x$ i $P_y = 2$, kao posledicu Grinove teoreme dobijamo sledeće

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D (-2x - 2) dxdy,$$

gde je D oblast ograničena krivom C (slika 6.18). Dvostruki integral rešićemo prelaskom na dva uzastopna integrala

$$\begin{aligned} \iint_D (-2x - 2) dxdy &= \int_0^1 \int_{1-y}^{2-2y} (-2x - 2) dxdy = \int_0^1 (-x^2 - 2x) \Big|_{1-y}^{2-2y} dy \\ &= \int_0^1 (-3y^2 + 8y - 5) dy = (-y^3 + 4y^2 - 5y) \Big|_0^1 = -2. \end{aligned}$$

■

Glava 7

Površinski integral

7.1 Površinski integral skalarne funkcije

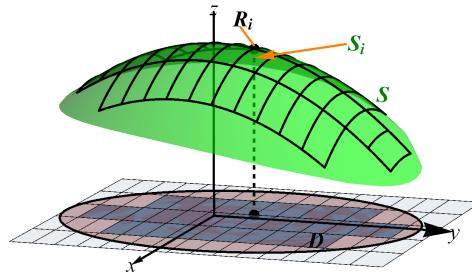
Neka je f funkcija tri promenljive čiji domen sadrži površ S opisanu jednačinom $z = g(x, y)$, gde $(x, y) \in D$. Prepostavimo da funkcija g ima neprekidne prve parcijalne izvode na D . Izvršićemo podelu površi S postupkom opisanim u poglavљu 3.1.2 (slika 7.1).

Dakle, ako pravougaonici A_i , $i = 1, \dots, n$ čine unutrašnju podelu oblasti D , tada površi S_i , $i = 1, \dots, n$, čije su projekcije na xy -ravan redom pravougaonici A_i , $i = 1, \dots, n$, čine podelu površi S (slika 7.1). Kao u odeljku 3.1.2 izaberimo tačku (x_i, y_i) u pravougaoniku A_i , za svako $i = 1, \dots, n$. Tada tačka $R_i(x_i, y_i, g(x_i, y_i))$ pripada površi S_i , za svako $i = 1, \dots, n$. Formirajmo sumu

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, g(x_i, y_i)) \Delta S_i,$$

gde je ΔS_i površina površi S_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Podsetimo se, u odeljku 3.1.2 je data sledeća aproksimacija

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + (g_x(x_i, y_i))^2 + (g_y(x_i, y_i))^2} \Delta A_i.$$



Slika 7.1

Ako postoji granična vrednost

$$I = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, g(x_i, y_i)) \Delta S_i,$$

tada se broj I naziva površinski integral funkcije f nad površi S i obeležava se sa

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

Površinski integral skalarne funkcije se izračunava svodenjem na dvostruki integral pomoću formule date u teoremi koja sledi.

Teorema 7.1. *Neka je površ S opisana jednačinom $z = g(x, y)$ dok $(x, y) \in D$ i funkcija g ima neprekidne prve parcijalne izvode na D . Ako je funkcija tri promenljive f neprekidna na S , tada*

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + (g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2} dA.$$

Ako za funkciju f važi $f(x, y, z) = 1$ za svako $(x, y, z) \in S$, tada je

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D \sqrt{1 + (g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2} dA,$$

što je formula za izračunavanje površine površi S date u odeljku 3.1.2. Ako je površ S zadata pomoću jednačine $y = g(z, x)$ ili $x = g(y, z)$, važe analogna tvrđenja teoremi 7.1. Naime, važi:

- ako je površ S data sa $y = g(z, x)$ i D je njena projekcija na zx -ravan, tada

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, g(x, z), z) \sqrt{1 + (g_x(z, x))^2 + (g_z(z, x))^2} dA,$$

- ako je površ S data sa $x = g(y, z)$ i D je njena projekcija na yz -ravan, tada

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(g(y, z), y, z) \sqrt{1 + (g_y(y, z))^2 + (g_z(y, z))^2} dA.$$

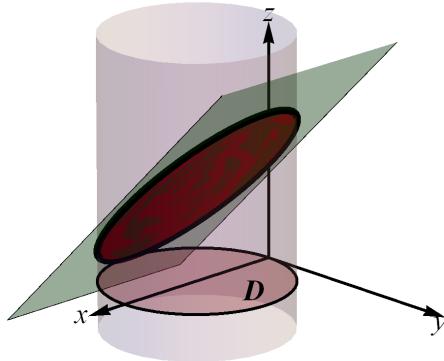
Primer 7.1. Izračunati površinski integral funkcije $f(x, z, y) = y + z$ nad delom ravni $z = 1 + y$ koji se nalazi unutar cilindra $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Rešenje. Obeležimo sa S deo ravni $z = 1 + y$ koji se nalazi unutar cilindra $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ i sa $g(x, y) = 1 + y$. Projekcija površi S na xy -ravan je krug D dat nejednačinom $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ (slika 7.2). Iz

$$g_x(x, y) = 0 \quad \text{i} \quad g_y(x, y) = 1,$$

sledi

$$\sqrt{1 + (g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2} = \sqrt{2}.$$



Slika 7.2

Kako su zadovoljeni svi uslovi teoreme 7.1, dobijamo

$$I = \iint_S (y + z) dS = \iint_D (y + 1 + y) \sqrt{2} dx dy = \sqrt{2} \iint_D (2y + 1) dx dy.$$

Transformacijom datom preko polarnih koordinata $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ oblast D se preslikava u oblast $D' = \{(\rho, \theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta\}$. Sledi da se uvođenjem polarnih koordinata prethodni dvostruki integral svodi na sledeće uzastopne integrale

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \theta} (2\rho \sin \theta + 1) \rho d\rho d\theta = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\rho^3}{3} 2 \sin \theta + \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} \cos^3 \theta \sin \theta + 2 \cos^2 \theta \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3} \cos^3 \theta \sin \theta + 1 + \cos 2\theta \right) d\theta \\ &= \sqrt{2} \left(-\frac{16}{3} \frac{\cos^4 \theta}{4} + \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.2 Površinski integral vektorskog polja

Pre nego što definišemo površinski integral vektorskog polja uvešćemo pojam dvostrane površi.

Dvostrana površ i njena orijentacija

Posmatrajmo površ S datu jednačinom $z = g(x, y)$ dok $(x, y) \in D$ i funkcija g ima neprekidne prve parcijale izvode na D .

Dakle, S je glatka površ, što znači da u svakoj tački te površi postoji tangentna ravan i dva jedinična vektora normale na tu površ. Ako je \vec{n} jedan jedinični vektor normale na S u tački P_0 , tada je drugi vektor suprotan vektoru \vec{n} , odnosno to je vektor $-\vec{n}$ (slika 7.3).

Izaberimo proizvoljnu zatvorenu krivu C na površi S koja ne sadrži rubne tačke površi S . Posmatrajmo

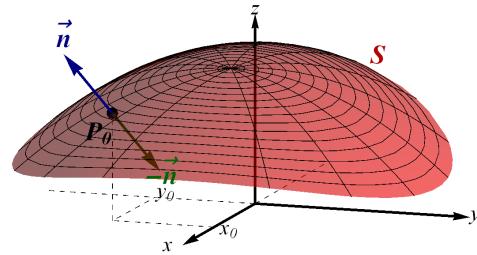
tačku P koja se kreće po krivoj C . Početna tačka kretanja tačke P je tačka P_0 (interaktivna slika 7.4 i 7.5). Odaberimo jedinični vektor normale $\vec{n}(P_0)$ na površ S u tački P_0 i neka je na početku kretanja tačke P : $\vec{n}(P_0) = \vec{n}(P)$ gde je sa $\vec{n}(P)$ označen vektor normale na S u tački P . Kada se tačka P krećući se po krivoj C nemenjujući smer kretanja vrati u početnu tačku P_0 , moguća su dva slučaja. Jedan je da se vektor normale na S u P poklopi sa $\vec{n}(P_0)$, a drugi je da je jednak sa $-\vec{n}(P_0)$.

Ako se za svaku krivu C sa površi S koja ne sadrži nijednu rubnu tačku te površi i svaku početnu tačku P_0 na C , jedinični vektor normale $\vec{n}(P)$ u krajnjoj tački P_0 kretanja tačke P po krivoj C poklopi sa vektorom normale $\vec{n}(P_0)$ u početnoj tački kretanja P_0 , tada je S dvostrana površ. Na interaktivnoj slici 7.4 je dat primer dvostrane površi. Mebijusova traka nije dvostrana površ što se može videti pomoću interaktivne slike 7.5.

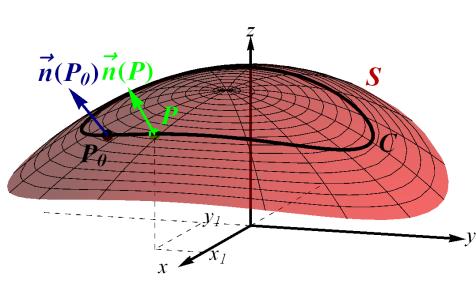
Prepostavimo da je S dvostrana površ data jednačinom $z = g(x, y)$. Podsetimo se (odeljak 2.10.1), gradijent funkcije

$$G(x, y, z) = z - g(x, y)$$

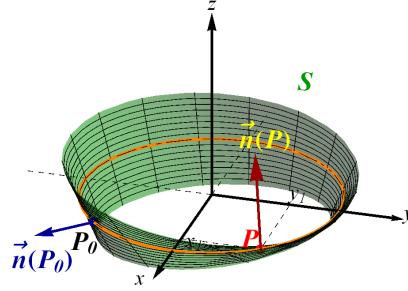
je vektor normalan na površ S u tački $(x, y, g(x, y))$. S obzirom da je



Slika 7.3



Slika 7.4



Slika 7.5

$$\nabla G(x, y, z) = -g_x(x, y)\vec{i} - g_y(x, y)\vec{j} + \vec{k},$$

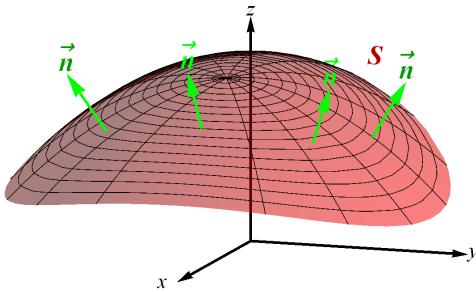
jedan jedinični vektor normale na S u tački (x, y) je

$$\vec{n}_1 = \frac{\nabla G(x, y, z)}{|\nabla G(x, y, z)|} = \frac{-g_x(x, y)\vec{i} - g_y(x, y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + (g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2}}, \quad (7.1)$$

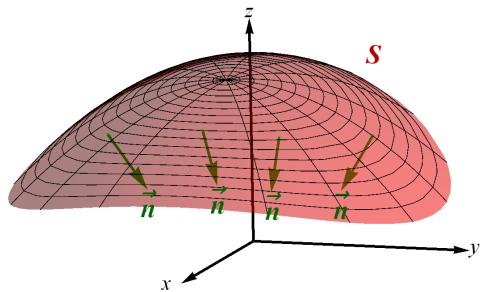
a drugi je

$$\vec{n}_2 = -\frac{\nabla G(x, y, z)}{|\nabla G(x, y, z)|} = \frac{g_x(x, y)\vec{i} + g_y(x, y)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + (g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2}}. \quad (7.2)$$

Jedinični vektori normale određuju orijentaciju dvostrane površi. Naime, dvostrana površ S se orijentiše tako što se izabere vektor \vec{n}_1 ili \vec{n}_2 . Na slici 7.6 orijentacija površi S je određena vektorom normale $\vec{n} = \vec{n}_1$, a na slici 7.7 vektorom normale $\vec{n} = \vec{n}_2$.



Slika 7.6



Slika 7.7

Jedinični vektor normale \vec{n} , se može napisati u sledećem obliku

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k},$$

gde su α, β i γ uglovi koje vektor normale \vec{n} zaklapa sa pozitivnim smerom x, y i z -ose.

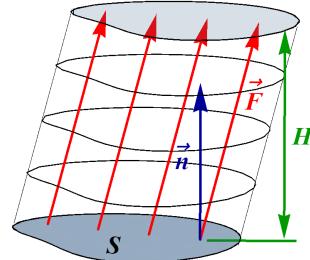
Za određene dvostrane površi je moguće uvesti pojam spoljašnje i unutrašnje strane te površi. Spoljašnja strana površi je ona strana koja ima osobinu da se u svakoj tački površi, tangentna ravan nalazi između vektora normale i same površi. Ako se u svakoj tački površi površ nalazi između tangentne ravni i vektora normale, tada je ta strana unutrašnja strana površi.

Fluks vektorskog polja

Opisacemo način na koji se može odrediti protok fluida kroz površ. Pod protokom fluida se podrazumeva zapremina fluida koja prođe kroz površ u jedinici vremena. Ovaj protok se naziva fluks fluida kroz površ.

Pretpostavimo da je brzina fluida data vektorskim poljem \vec{F} . Neka je S površ čija je orijentacija određena jediničnim vektorom normale \vec{n} tako da je ugao između vektora \vec{F} i \vec{n} oštar.

Podimo od najjednostavnijeg slučaja, a to je kada je vektorsko polje \vec{F} konstantno i površ S leži u nekoj ravni. Neka je \vec{n} jedinični vektor normale površi S i ΔS površina te površi. U ovom slučaju je fluks kroz površ S zapremina cilindričnog tela (slika 7.8), čija je baza površ S i visina $H = \vec{F} \cdot \vec{n}$. Tada je fluks kroz površ S jednak proizvodu površine baze $B = \Delta S$ i visine tog tela, tj.



Slika 7.8

$$\text{fluks kroz } S = B \cdot H = \vec{F} \cdot \vec{n} \Delta S. \quad (7.3)$$

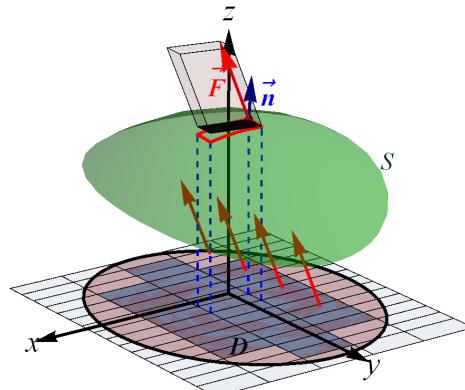
U slučaju da vektorsko polje \vec{F} nije konstantno i površ S ne leži ni u jednoj ravni, tada se kao u odeljku 3.1.2 vrši podela površi S na manje površi S_i , $i = 1, \dots, n$. Površine površi S_i se mogu aproksimirati površinama delova njenih tangentnih ravnih T_i kao u odeljku 3.1.2. Ovaj postupak je prikazan

na interaktivnoj slici 7.9. Ako pretpostavimo da je \vec{F} konstantno na T_i i $\vec{F} = \vec{F}_i$ na T_i iz (7.3) sledi

$$\text{fluks kroz } S_i \approx \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i,$$

gde je \vec{n}_i vektor normale na S u tački $(x_i, y_i, z_i) \in S_i$ i $\vec{F}_i = \vec{F}(x_i, y_i, z_i)$. Ako na isti način aproksimiramo fluks kroz S_i za svako $i = 1, \dots, n$, tada je

$$\text{fluks kroz } S \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i.$$



Slika 7.9

Sledi da je

$$\text{fluks kroz } S = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i.$$

Dakle, posmatrani fluks fluida kroz površ smo doveli u vezu sa površinskim integralom skalarne funkcije $\vec{F} \cdot \vec{n}$ nad površi S , tj.

$$\text{fluks kroz } S = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Površinski integral skalarne funkcije $\vec{F} \cdot \vec{n}$ nad površi S se naziva površinski integral vektorskog polja \vec{F} nad površi S . Analogno se definiše površinski integral vektorskog polja \vec{F} u opštem slučaju, tj. kada \vec{F} ne mora da predstavlja brzinu fluida.

Definicija 7.1. Neka je

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k} \quad (7.4)$$

vektorsko polje i funkcije P , Q i R imaju neprekidne parcijalne izvode na S čija je orijentacija određena jediničnim vektorom normale \vec{n} . Površinski integral vektorskog polja \vec{F} nad S je

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS,$$

u oznaci $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$.

Za površinski integral vektorskog polja \vec{F} datog sa (7.4) nad S se takođe koristi i sledeća oznaka

$$\iint_S P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy.$$

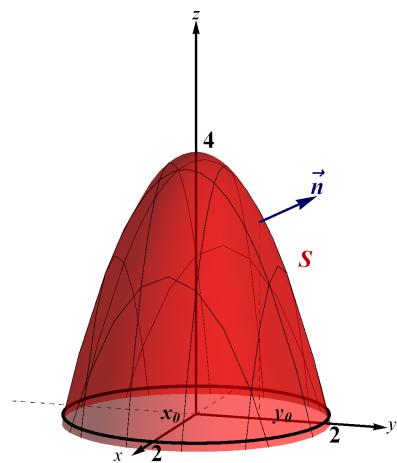
Primer 7.2. Izračunati površinski integral vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ nad spoljašnjom stranom površi S date sa $z = 4 - x^2 - y^2$ i $z \geq 0$.

Rešenje. Ako koristimo oznake sa početka ovog odeljka, tada je

$$g(x, y) = 4 - x^2 - y^2.$$

Na interaktivnoj slici 7.10 se može videti da normale \vec{n} na spoljašnju stranu površi u svakoj tački te površi zaklapaju oštar ugao sa pozitivnim delom z -ose. Odakle sledi da je treća koordinata vektora \vec{n} nenegativna što znači da možemo da iskoristimo formulu 7.1. Sledi da je

$$\vec{n} = \frac{2x\vec{i} + 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$



Slika 7.10

Imamo

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \frac{2x^2 + 2y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} dS.$$

Kada iskoristimo vezu između površinskog integrala skalarne funkcije i dvostrukog integrala dobijamo

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{2x^2 + 2y^2 + 4 - x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2 + 4) dx dy, \end{aligned}$$

gde je D projekcija površi S na xy -ravan, tj. krug $x^2 + y^2 \leq 4$. Kako je oblast D opisana pomoću polarnih koordinata $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ sa $0 \leq \rho \leq 2$ i $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tada je

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^2 + 4) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (\rho^3 + 4\rho) d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} + 4\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_0^2 d\theta = 24\pi. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.2.1 Teorema o divergenciji

Teorema o divergenciji daje vezu između trostrukog integrala nad oblasti $O \subset \mathbb{R}^3$ i površinskog integrala nad po delovima glatkoj površi koja je rub površi O . Za površ kažemo da je glatka po delovima ako se može podeliti na konačno mnogo glatkih površi.

Teorema 7.2. *Neka je $O \subset \mathbb{R}^3$ oblast ograničena sa po delovima glatkim zatvorenom površi S , orijentisanoj ka spolja i $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektorsko polje takvo da funkcije P , Q i R imaju neprekidne prve parcijalne izvode na nekom otvorenom skupu koji sadrži O i S . Tada je*

$$\iiint_O \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Prethodna teorema se naziva još i teorema Gausa i Ostrogradskog.

Primer 7.3. Neka je oblast V ograničena ravnima $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ i $z = 3 - y$. Izračunati površinski integral vektorskog polja $\vec{F}(x, y, z) = x^2\vec{i} + y\vec{j} + (x - z)\vec{k}$ nad spoljašnjom stranom površi S koja ograničava oblast V .

Rešenje. Površ S je zatvorena, po delovima glatka jer se sastoji od šest glatkih površi: $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ i $z = 3 - y$ (slika 7.11) i orijentisana ka spolja. Funkcije $P(x, y, z) = x^2$, $Q(x, y, z) = y$ i $R(x, y, z) = x - z$ imaju neprekidne parcijalne izvode na \mathbb{R}^3 . Dakle, zadovoljeni su svi uslovi teoreme o divergenciji. Kako je

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x(x, y, z) + Q_y(x, y, z) + R_z(x, y, z) = 2x + 1 - 1 = 2x,$$

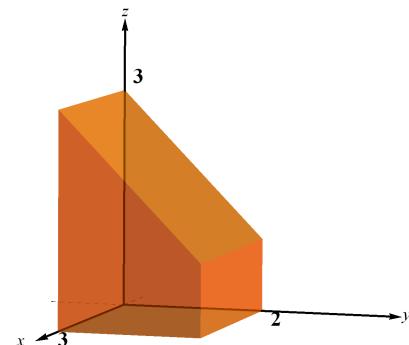
iz teoreme o divergenciji sledi

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V 2xdV.$$

Trostruki integral $\iiint_V 2xdV$ se može rešiti na sledeći način

$$I = 2 \int_0^3 \int_0^2 \int_0^{3-y} x dz dy dx$$

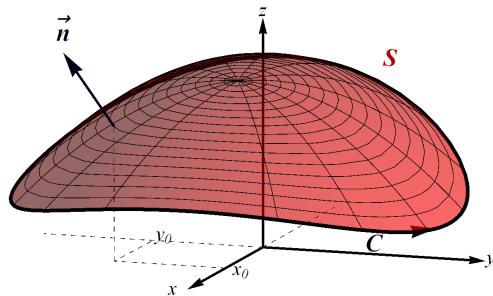
$$= 2 \int_0^3 \int_0^2 x(3-y) dy dx = 2 \int_0^3 x \left(3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3 dx = 8 \int_0^3 x dx = 36. \blacksquare$$



Slika 7.11

7.2.2 Stoksova teorema

Prepostavimo da je površ S ograničena krivom C i da su orijentisane tako da zadovoljavaju pravilo desne šake. To znači da ako palac desne šake pokazuje smer vektora normale na površ, tada prsti pokazuju smer orijentacije krive. Na slici 7.12 je dat primer orijentacije površi S i krive C koje zadovoljavaju prethodno pravilo. Teorema koja sledi se naziva Stoksova teorema i ona daje odgovor na pitanje kada je površinski integral nad površi S jednak krivolinijskom integralu duž krive C koja predstavlja rub te površi.



Slika 7.12

Teorema 7.3. Neka je S dvostrana po delovima glatka površ ograničena po delovima glatkog krivom C koja sama sebe ne preseca i orijentacije površi S i krive C zadovoljavaju pravilo desne šake. Ako je $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ vektorsko polje takvo da funkcije P, Q i R imaju neprekidne parcijalne izvode

na nekom otvorenom skupu koji sadrži S , tada je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Sada ćemo izračunati krivolinijski integral vektorskog polja datog u primeru 6.4 pomoću Stoksove teoreme. Podsetimo se primera 6.4.

Primer 7.4. Izračunati krivolinijski integral vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z)\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

duž krive C dobijene u preseku površi $z = 1 + x^2 + y^2$ i $z = 2y + 1$, orijentisane u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu posmatrano iz tačke $(0, 0, 5)$.

Rešenje. Neka je S deo ravni

$$z = 2y + 1$$

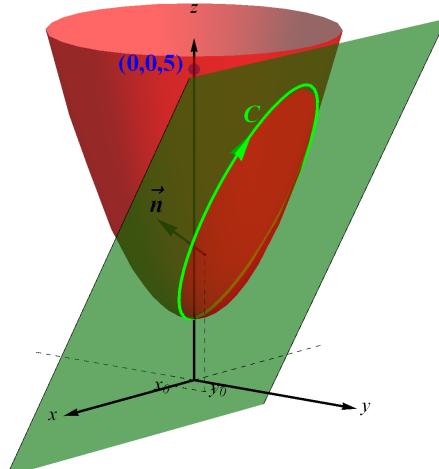
koji ograničava kriva C dobijena u preseku površi $z = 1 + x^2 + y^2$ i te ravni. Kako je

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & 2z-x & x-y \end{vmatrix} \\ &= -3\vec{i} - 2\vec{k}, \end{aligned}$$

iz Stoksove teoreme sledi

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

Slika 7.13



pri čemu je površ S orijentisana kao na interaktivnoj slici 7.13. Jedinični vektor normale koji određuje orijentaciju površi S je

$$\vec{n} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}.$$

Sledi

$$I = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \right) dS = -2 \iint_D dxdy,$$

gde je D krug $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Kako je $\iint_D dxdy$ površina oblasti D , to je

$$I = -2\pi.$$

Napomenimo da se isti rezultat dobija i ako se za površ, koju ograničava kriva C , izabere deo paraboloida $z = 1 + x^2 + y^2$ ograničen krivom C . Aktiviranjem interaktivne slike 7.13 i odabirom odgovarajućeg polja za čekiranje se može videti odgovarajući vektor normale na tu površ. U ovom slučaju je

$$\vec{n} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}.$$

Na osnovu Stoksove teoreme imamo

$$I = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D (6x - 2) dxdy,$$

gde je D krug $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$. Uvođenjem polarnih koordinata dobijamo

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} (6\rho \cos\theta - 2) \rho d\rho d\theta = -2\pi. \quad \blacksquare$$

Prethodna napomena je posledica Stoksove teoreme. Naime, ako imamo dve površi S_1 i S_2 , koje ograničava ista kriva C i koje zadovoljavaju uslove Stoksove teoreme, tada je

$$\iint_{S_1} \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} \vec{\text{rot}} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Primer 7.5. Izračunati krivolinijski integral vektorskog polja

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y + z)\vec{i} + y\vec{j} + 2z\vec{k}$$

duž krive C dobijene u preseku površi $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $x^2 + y^2 = 1$, orijentisane u smeru kretanja kazaljke na satu posmatrano od gore.

Rešenje. Neka je S deo ravni $z = 1$ koji ograničava kriva C . Imamo

$$\vec{\text{rot}} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + z & y & 2z \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{k}.$$

Iz Stoksove teoreme sledi

$$I = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

gde je površ S orijentisana kao na interaktivnoj slici 7.14. Jedinični vektor normale koji određuje orijentaciju površi S je

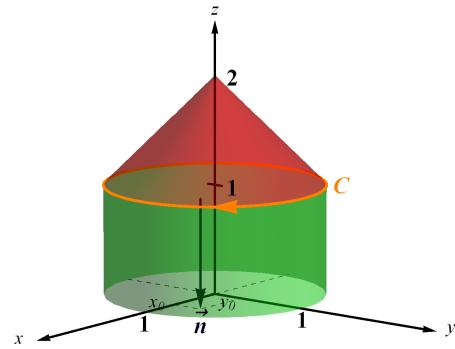
$$\vec{n} = -\vec{k}.$$

Sledi

$$I = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S dS = \iint_D dxdy,$$

gde je D krug $x^2 + y^2 \leq 1$. Kako je $\iint_D dxdy$ površina oblasti D , to je

$$I = \pi. \blacksquare$$



Slika 7.14

Literatura

- [1] J. Aleksić, Predavanja iz Analize 2, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2013.
- [2] O. Hadžić, Đ. Takači, Matematičke metode za studente prirodnih nauka, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, 2000.
- [3] R. Larson, B. Edwards, Calculus, 10th Edition, Brooks/Cole, Boston, 2014.
- [4] E. Pap, I. Štajner Papuga, Analiza II za informatičare, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad, 2005.
- [5] B. Rašajski, Analitička geometrija, Građevinska knjiga, Beograd, 1973.
- [6] J. Stewart, Calculus, 7th edition, Brooks/Cole, Belmont, 2012.
- [7] G. B. Thomas Jr., M. D. Weir, J. Hass, Thomas' Calculus: Early Transcendentals, 12th Edition, Addison-Wesley, Boston, 2010.