

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада¹.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



¹ Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

"Сва права задржава издавач. Забрањена је свака употреба или трансформација електронског документа осим оних који су експлицитно дозвољени Creative Commons лиценцом која је наведена на почетку публикације."

"Sva prava zadržava izdavač. Zabranjena je svaka upotreba ili transformacija elektronskog dokumenta osim onih koji su eksplicitno dozvoljeni Creative Commons licencom koja je navedena na početku publikacije."



Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i
informatiku



Sanja Ružičić

Srđan Trifunović

Matematika 1 za studente fizike

Novi Sad, 2025

Predgovor

Udžbenik *Matematika 1 za studente fizike* je prvenstveno namenjen studentima fizike, a mogu ga koristiti i studenti drugih prirodnih i tehničkih nauka. Sadržaj ovog udžbenika je u potpunosti usklađen sa kursom *Matematika 1* svih modula fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu i u sebi sadrži fundamentalne matematičke pojmove koji se koriste na studijama fizike.

Sastoji se iz sedam poglavlja iz oblasti analize, linearne algebre i analitičke geometrije. Svako poglavlje u sebi sadrži niz definicija i teorema, uglavnom bez dokaza, koje su praćene i ilustrirane brojnim primerima i slikama. Na ovaj način, akcenat je stavljen na razumevanje koncepta vizuelno i kroz primenu.

Zahvaljujemo se recenzentima, prof. dr Marku Kostiću i dr Maji Jolić, koji su svojim sugestijama doprineli kvalitetu i jasnoći udžbenika.

U Novom Sadu, 12.11.2025.

Sanja Ružičić i Srđan Trifunović

Sadržaj

1	Kompleksni brojevi	7
1.1	Prikaz kompleksnih brojeva u ravni	8
1.2	Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva	9
2	Nizovi	11
2.1	Granična vrednost niza	12
2.2	Osobine konvergentnih nizova	14
2.3	Monotoni nizovi	18
3	Funkcije	21
3.1	Realne funkcije	21
3.1.1	Elementarne funkcije	25
3.2	Granična vrednost funkcije	28
3.2.1	Jednostrane granične vrednosti	34
3.2.2	Neprekidnost funkcije i tačke prekida	36
3.3	Asimptote	39
3.3.1	Vertikalne asimptote	40
3.3.2	Horizontalne asimptote	41
3.3.3	Kose asimptote	42
4	Izvodi	45
4.1	Pojam izvoda	46
4.2	Izvod složene funkcije	50
4.3	Izvod inverzne funkcije	51
4.4	Tablica izvoda	52
4.5	Izvodi višeg reda	52
4.6	Izvod parametarski zadate funkcije	54
4.7	Izvod implicitno zadate funkcije	56
4.8	Primena izvoda	58
4.8.1	Lopitalovo pravilo	58
4.8.2	Monotonost funkcije	59
4.8.3	Minimum i maksimum funkcije	60
4.8.4	Rolova teorema srednje vrednosti	62
4.8.5	Lagranžova teorema srednje vrednosti	62
4.8.6	Konveksnost i konkavnost funkcije	63
4.9	Aproksimacija funkcija polinomom	66
4.9.1	Aproksimacija linearnom funkcijom	66
4.9.2	Aproksimacija polinomom drugog ili višeg reda	67
4.9.3	Ocena greške Tejlorovog polinoma	70
4.10	Asimptotska notacija	71
4.10.1	Veliko “ O ”	71
4.10.2	Malo “ o ”	72
4.10.3	Približno ponašanje “ $\sim$ ”	73

5	Integrali	75
5.1	Određeni integral	75
5.1.1	Fundamentalna teorema analize (Njutn-Lajbnicova formula)	78
5.2	Neodređeni integral	79
5.2.1	Metod smene	80
5.2.2	Parcijalna integracija	81
5.3	Osobine određenog integrala	82
5.3.1	Metod smene i parcijalne integracije kod određenog integrala	83
5.4	Primena određenih integrala	85
5.4.1	Površina oblasti između dve krive	85
5.4.2	Zapremina obrtnog tela oko x -ose	87
5.4.3	Zapremina obrtnog tela oko y -ose	89
5.4.4	Teorema srednje vrednosti za integrale	90
5.4.5	Dužina luka krive	91
5.5	Nesvojstveni integral	93
6	Linearna algebra	95
6.1	Matrice i determinante	95
6.1.1	Elementarne operacije sa matricama	96
6.1.2	Transponovana matrica	98
6.1.3	Pojam determinante	99
6.1.4	Osobine determinanti	100
6.1.5	Inverzna matrica	102
6.2	Sistemi linearnih jednačina	104
6.2.1	Gausova metoda eliminacije	104
6.2.2	Kramerovo pravilo	106
6.2.3	Karakteristični koreni i vektori	108
7	Vektorska algebra	111
7.1	Predstavljanje vektora u Dekartovom koordinatnom sistemu	112
7.2	Skalarni proizvod	115
7.3	Vektorski proizvod	116
7.4	Mešoviti proizvod	119
7.5	Linearno zavisni i nezavisni vektori	120
8	Analitička geometrija	123
8.1	Jednačina prave	123
8.2	Jednačina ravni	125
8.3	Krive drugog reda u ravni	126
8.3.1	Jednačina elipse	127
8.3.2	Jednačina parabole	128
8.3.3	Jednačina hiperbole	129
	Literatura	133

1 | Kompleksni brojevi

Motivacija. Znamo da kvadratna jednačina $ax^2 + bx + c = 0$, za $a \neq 0$, ima sledeća rešenja

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

U slučaju kada je diskriminanta negativna, tj. $b^2 - 4ac < 0$, tada nemamo rešenja u skupu realnih brojeva. Na primer, u jednačini $x^2 + x + 1 = 0$ imamo da je diskriminanta jednaka -3 i ne možemo da je rešimo u skupu realnih brojeva. Da bi mogli da rešimo ovu jednačinu, moramo da proširimo skup realnih brojeva koji će uključivati i takva rešenja. To radimo preko sledećeg skupa:

Definicija 1.1

Skup kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ definišemo kao skup svih brojeva oblika $a + bi$, gde su a i b realni brojevi a i je imaginarna jedinica definisana izrazom $i^2 = -1$. Matematički, taj skup zapisujemo kao

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sada jednačina $x^2 + x + 1 = 0$ ima rešenja $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Primetimo takođe da za imaginarnu jedinicu i važi:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

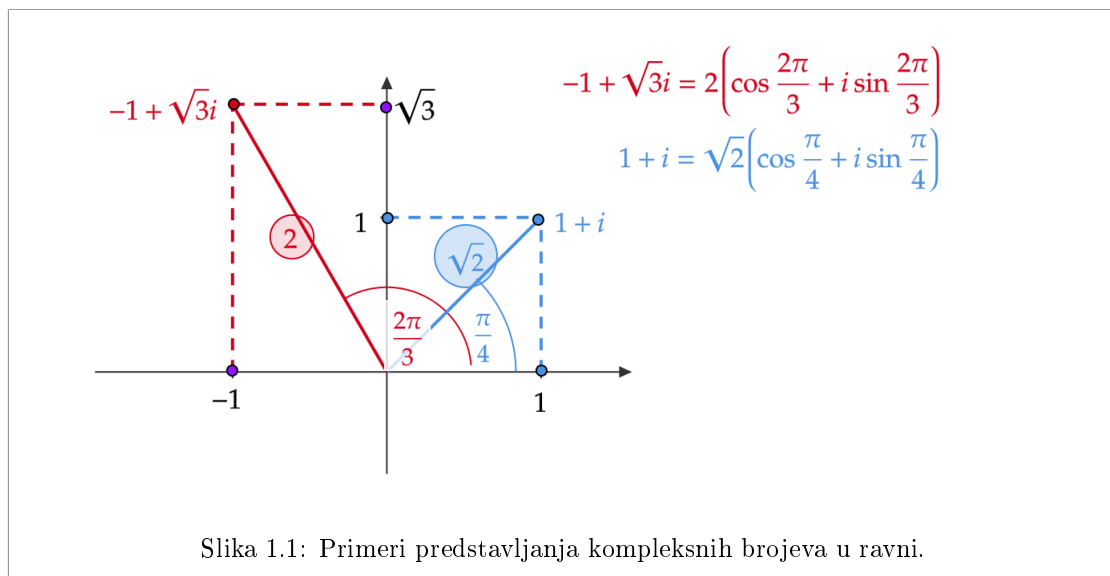
Definicija 1.2

- Za kompleksan broj $z = a + bi$, broj a nazivamo **realni deo** kompleksnog broja z (oznaka $\operatorname{Re} z$), a broj b nazivamo **imaginarni deo** kompleksnog broja z (oznaka $\operatorname{Im} z$);
- Kompleksan broj $a - ib$ se naziva **konjugovano kompleksan broj** kompleksnog broja $z = a + ib$ i označava se sa $\bar{z} = a - ib$.
- Dva kompleksna broja $a_1 + ib_1$ i $a_2 + ib_2$ su jednaka ako i samo ako su im realni i kompleksni delovi jednaki, tj. važi $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$;
- Za bilo koja dva kompleksna broja $a_1 + ib_1$ i $a_2 + ib_2$, definišemo operacije:
 - Sabiranje: $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$;
 - Oduzimanje: $(a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$;
 - Množenje: $(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$;
 - Deljenje:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \quad \text{za } z_2 \neq 0.$$

1.1 Prikaz kompleksnih brojeva u ravni

Svakom kompleksnom broju $a + ib$ se jednoznačno može pridružiti tačka $A(a, b)$ u xy -ravni i obratno:



Zapis $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ nazivamo **trigonometrijski oblik**, broj ρ nazivamo **moduo** kompleksnog broja z i označavamo ga $\rho = |z|$, a ugao $\varphi = \arg z \in [0, 2\pi)$ nazivamo **argument** kompleksnog broja z . Za $z = a + ib$, računamo ih na sledeći način:

- Moduo:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2};$$

- Argument:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg\left(\frac{b}{a}\right), & a > 0 \text{ i } b > 0, \\ \arctg\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & a < 0, \\ \arctg\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi, & a > 0 \text{ i } b < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a = 0 \text{ i } b > 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & a = 0 \text{ i } b < 0, \\ \text{nije definisan,} & a = b = 0. \end{cases}$$

Napomena 1. *Primetimo da $\arctg(x)$ vraća ugao u intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dok je za ugao φ željeni interval $[0, 2\pi)$. To znači da ukoliko $\arctg(\frac{b}{a}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, ugao mora biti korigovan sa π (drugi kvadrant $a < 0, b > 0$) ili 2π (četvrti kvadrant $a < 0, b < 0$). U slučaju trećeg kvadranta $a > 0, b < 0$, imamo da $\arctg(\frac{b}{a}) \in (0, \frac{\pi}{2})$, što znači da ugao mora biti korigovan za π .*

Kompleksan broj $z = a + ib = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ možemo zapisati i u eksponencijalnom obliku koristeći Ojlerov identitet $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, tj. imamo:

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

1.2 Stepenovanje i korenovanje kompleksnih brojeva

Predstavljanje kompleksnih brojeva u eksponencijalnom obliku nam znatno olakšava stepenovanje i korenovanje. Prvo, kada stepenujemo, argument se množi sa stepenom, a moduo stepenuje.

Moavrova formula za stepenovanje kompleksnog broja:

$$\text{Za } z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \text{ i } n \in \mathbb{N} \quad \text{važi} \quad z^n = \rho^n e^{in\varphi} = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Primer 1.3

Za $z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ imamo po Moavrovoj formuli

$$z^2 = (\sqrt{2})^2 \left(\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Ovo takođe možemo i direktno da izračunamo $z^2 = (1 + i)(1 + i) = 1 - 1 + i + i = 2i$, što se poklapa sa gornjim izrazom.

Iako stepenovanjem jednog kompleksnog broja dobijamo drugi kompleksni broj, kod korenovanja to ipak nije slučaj. Preciznije, kompleksni n -ti koren vraća skup od n brojeva koje dobijamo preko sledeće formule.

Komentar. Moramo da razlikujemo realni koren od kompleksnog, iako ih isto obeležavamo. Naime, realni koren je funkcija koja je definisana isključivo za $x \geq 0$ kada je n parno i za sve $x \in \mathbb{R}$ kada je n neparno.

Za $z = \rho e^{i\varphi} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ i $n \in \mathbb{N}$, važi **formula za korenovanje**:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right), \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Primer 1.4

Za $z = -8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$, možemo da izračunamo

$$\sqrt[3]{z} = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi + 2k\pi}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2,$$

tj.

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}, & \text{slučaj } k = 0, \\ 2 \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = -2, & \text{slučaj } k = 1, \\ 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3}, & \text{slučaj } k = 2. \end{cases}$$

2 | Nizovi

Definicija 2.1

Brojni niz je numerisani skup realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$, tj. $\{a_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N}\}$ ili $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dok je **opšti član** niza a_n .

Nizovi mogu biti zadati direktno preko formule u kojoj a_n zavisi od n i u tom slučaju ih nazivamo **eksplicitno zadatim**, ili **rekurentno** ako se a_n definiše preko prethodnih članova niza $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$.

Primer 2.2

EksPLICITNO zadati nizovi:

- Niz neparnih brojeva: $a_n = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$;
- Niz parnih brojeva: $a_n = 2n, n \in \mathbb{N}$;
- $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$.

Nizovi zadati rekurentnom vezom (implicitno):

- $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad n \geq 2$;
- Fibonačijev niz: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, n \in \mathbb{N}$, gde su $a_1 = a_2 = 1$.

Niz je stacionaran ako su svi njegovi članovi međusobno jednaki ($a_n = a$, za neki broj $a \in \mathbb{R}$ i za sve $n \in \mathbb{N}$).

Definicija 2.3

Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je:

- **Ograničen sa gornje strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \leq M;$$

- **Ograničen sa donje strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n \geq M;$$

- **Ograničen** ako je ograničen sa gornje i donje strane, tj.

$$(\exists M, m \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad m \leq a_n \leq M.$$

Primer 2.4

Niz zadat opštim članom $a_n = n^2$ nije ograničen, dok niz sa opštim članom $b_n = \sin(n)$ jeste ograničen jer je $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Niz zadat sa $c_n = e^n$ je ograničen od dole sa e , ali nije ograničen od gore.

2.1 Granična vrednost niza**Definicija 2.5**

Broj $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost (ili limes) niza** $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Pišemo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i kažemo da je niz **konvergentan** ili da konvergira ka a . Ako granična vrednost niza ne postoji, onda kažemo da je niz **divergentan**. Specijalno, kažemo da niz divergira ka $+\infty$ ($-\infty$), $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ($-\infty$), ako

$$(\forall M > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M \quad (< -M).$$

Možemo reći da $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira ka $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako se u svakoj ε -okolini tačke a (tj. $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$) nalaze svi članovi niza izuzev najviše konačno mnogo članova tog niza, odnosno, proizvoljnoj ε -okolini tačke a pripadaju “skoro svi” članovi niza $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Dakle, niz se sve više i više približava graničnoj vrednosti kako n raste.

Primer 2.6

Granična vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

ne postoji, što se lako može dokazati po definiciji. Naime, uvek možemo pronaći dovoljno malu okolinu tačke 1 (ili -1) tako da se beskonačno mnogo članova tog niza ne nalazi u toj okolini. Kažemo još i da niz $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ima dve tačke nagomilavanja, -1 i 1.

Sledeći limesi se lako mogu izračunati po definiciji, a smatraju se tabličnim limesima.

Tablični limesi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad |q| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Takođe, lako se može izračunati

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^a} = 0, \quad a > 0,$$

što se može zaključiti i iz skale divergentnih nizova koja će biti data kasnije.

Definicija 2.7

Brojni niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ takav da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

se naziva nula niz.

Teorema 2.8 (Teorema o uklještenim nizovima ili o dva žandara)

Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ i $a_n \leq b_n \leq c_n$ počevši od nekog $n \in \mathbb{N}$, tada važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Primer 2.9

Neka su dati nizovi $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n} \sin(\frac{1}{n})$ i $c_n = \frac{1}{n}$. Kako je $-1 \leq \sin(\frac{1}{n}) \leq 1$, imamo da je

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n},$$

tj.

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Uzimajući u obzir da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$, po teoremi o dva žandara dobijamo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0$. Ovo se može pokazati i koristeći sledeću teoremu koja nam govori da je nula puta ograničen niz takođe nula niz, jer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \quad \left| \sin \frac{1}{n} \right| \leq 1.$$

Teorema 2.10

Neka je $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nula niz i $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ograničen niz, tj. postoji $M > 0$ takvo da

$$|b_n| \leq M, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Tada

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

2.2 Osobine konvergentnih nizova

Može se pokazati da, ukoliko limesi postoje, onda su kompatibilni sa sledećim operacijama i funkcijama (tj. limes može da „izađe ispred” ili „uđe pod” operaciju ili neprekidnu funkciju).

Pravila limesa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^k = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^k, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (m \cdot a_n) = m \cdot a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (\text{za parno } k \text{ moramo dodatno da pretpostavimo } a_n \geq 0)$$

Primer 2.11

Važi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n \cdot 2025} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n \left(\frac{1}{n} + 2025 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + 2025} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + 2025} = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Prilikom izračunavanja limesa brojnih nizova često se koristi **skala divergentnih nizova** koji su poređani “po veličini” na sledeći način:

$$\ln n \prec n^a \prec n^b \prec p^n \prec q^n \prec n! \prec n^n$$

za

$$0 < a < b, \quad 1 < p < q,$$

gde

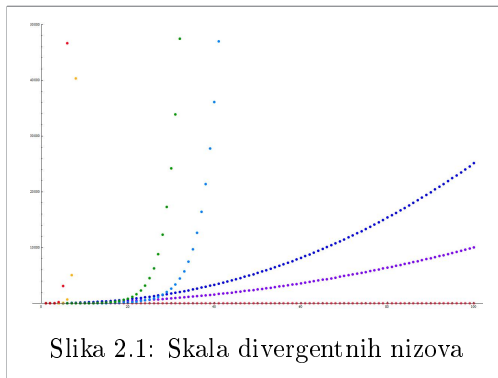
$$a_n \prec b_n \text{ znači da } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \infty.$$

To znači da, na primer, važi.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{\ln n} = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^a} = \infty, \quad a > 0,$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n^n} = 0, \quad p > 1, a > 0.$$



Slika 2.1: Skala divergentnih nizova

Primer 2.12

Izračunajmo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{n^5}{\ln n}}}{\operatorname{tg}^2 n + 1}$. Prvo, niz sa opštim članom

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 n + 1} = \frac{1}{\frac{\sin^2 n + \cos^2 n}{\cos^2 n}} = \cos^2 n$$

je ograničen. Koristeći skalu divergentnih nizova dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n^5}{\ln n} \right) = -\infty.$$

Dalje, limes može da uđe pod neprekidnu funkciju, pa važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n^5}{\ln n}} = e^{-\infty} = 0,$$

odakle konačno imamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{n^5}{\ln n}}}{\operatorname{tg}^2 n + 1} = 0$$

kao proizvod nula i ograničenog niza.

U primerima gore smo posmatrali granične vrednosti brojnih nizova koji su dati kao količnik dva divergentna niza (kažemo da je izraz kojim je dat opšti član niza oblika “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”). Takav izraz zovemo neodređenim, jer odgovarajući brojni niz može da konvergira ili divergira, što se utvrđuje daljim sređivanjem izraza. Sa druge strane, brojni niz čiji je opšti član dat kao proizvod dva divergentna niza uvek divergira, pa za izraz oblika “ $\infty \cdot \infty$ ” kažemo da je određen. Sa desne strane je data lista određenih izraza.

ODREĐENI IZRAZI:

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\frac{1}{\pm \infty} = 0$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$0^{+\infty} = 0$$

$$(0^+)^{-\infty} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

NEODREĐENI IZRAZI:

$$\infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0$$

U nastavku navodimo primere za svaki od neodređenih izraza tako što dajemo po dva limesa istog tipa sa različitim ishodom.

$\infty - \infty$

Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{1+n^2}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{1+n^2}) \frac{\sqrt{n^2} + \sqrt{1+n^2}}{\sqrt{n^2} + \sqrt{1+n^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1 + n^2}{\sqrt{n^2} + \sqrt{1+n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n^2} + \sqrt{1+n^2}} = 0 \end{aligned}$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - n) = -\infty.$$

Dakle,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2} - \sqrt{1+n^2}) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2).$$

$\frac{\infty}{\infty}$

Prvi limes dobijamo deljenjem^a imenioca i brojioca sa n^3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{5n^2 + 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^3}}{5\frac{1}{n} + 3\frac{1}{n^2}} = \frac{5}{0^+} = +\infty.$$

Drugi limes prvo transformišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-2^{n+1}}{1-2}}{\frac{1-5^{n+1}}{1-5}} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 5^{n+1}}$$

koristeći formule za opšti član geometrijske progresije,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad q \neq 1,$$

gde daljim deljenjem imenioca i brojioca sa 5^{n+1} dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n} = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5^{n+1}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5^{n+1}} - 1} = 4 \cdot \frac{0}{0 - 1} = 0.$$

Zaključujemo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{5n^2 + 3n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n}.$$

^aLimesi oblika $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_m(n)}{R_k(n)}$, gde su $Q_m(n)$ i $R_k(n)$ polinomi stepena m i k redom, se rešavaju deljenjem imenioca i brojioca sa n^p , gde je $p = \max\{m, k\}$.

0 · ∞

Imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{1}{n}.$$

Limesi ovog tipa se često mogu interpretirati i kao tip “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, što se vidi i na datim primerima.

 $\frac{0}{0}$

Imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \infty \neq 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}}.$$

Ovaj tip limesa se rešava na sličan način kao “ $\frac{\infty}{\infty}$ ” i obično se mogu svesti na taj oblik.

 1^∞

Imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\frac{2}{\sqrt{n}}}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^2 = 1.$$

Najpoznatiji limesi ovog tipa su oni koji se rešavaju pomoću tabličnog limesa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

kojim ćemo se baviti u nastavku (videti Primere 2.17 i 2.18). Dakle, u ovom slučaju imamo tri različita limesa za izraz oblika 1^∞ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^{\sqrt{n}} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

 0^0

Imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq e^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\frac{1}{n}}.$$

∞^0

Imamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq e = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^n)^{\frac{1}{n}}.$$

2.3 Monotoni nizovi

Definicija 2.13

1. Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je **monotono rastući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \leq a_{n+1}$ za sve $n \geq n_0$.
2. Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je **monotono opadajući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n \geq a_{n+1}$ za sve $n \geq n_0$.
3. Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je **strogo monotono rastući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n < a_{n+1}$ za sve $n \geq n_0$.
4. Niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je **strogo monotono opadajući** ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $a_n > a_{n+1}$ za sve $n \geq n_0$.

Primer 2.14

Niz zadat opštim članom $a_n = n$ je strogo monotono rastući niz, dok je niz zadat sa $b_n = 1/n$ strogo opadajući niz.

Teorema 2.15

Svaki rastući sa gornje strane ograničen niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentan i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \min\{a \in \mathbb{R} \mid a_n \leq a \text{ za sve } n \in \mathbb{N}\}.$$

Svaki opadajući sa donje strane ograničen niz $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentan i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \max\{b \in \mathbb{R} \mid b_n \geq b \text{ za sve } n \in \mathbb{N}\}.$$

Kako je svaki konvergentan niz i ograničen, važi:

Teorema 2.16

Monoton niz je konvergentan ako i samo ako je ograničen.

Primer 2.17

Da je niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zadat opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergentan sledi iz činjenice da je rastući i ograničen. Prvo, dati niz je monotono rastući jer

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^n = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1}\right)^n \\ &= \frac{n+1}{n+2} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n} \leq \frac{n+1}{n+2} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - n} = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n^3 + 3n^2 + 3n + 2} < 1, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

gde smo u drugom redu primenili sledeću nejednakost na imenilac razlomka

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \geq 1 + n \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2},$$

koja sledi iz Bernulijeve nejednakosti

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > -1.$$

Jasno, $a_n > 1$ za svako n , a korišćenjem Binomne formule

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

nejednakosti

$$n! \geq 2^{n-1}, \quad n \geq 1$$

i formule za n -ti član geometrijske progresije,

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \\ &\leq 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \leq 3, \end{aligned}$$

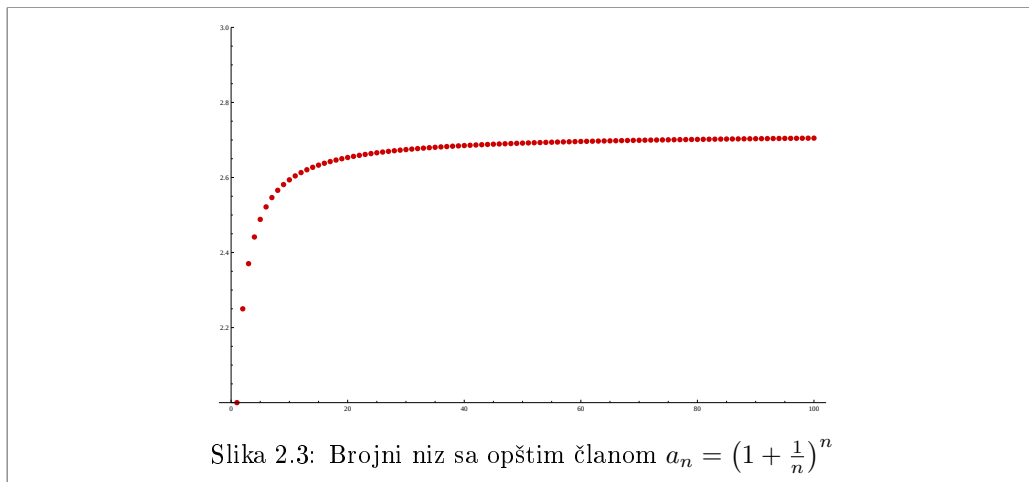
gde smo koristili

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2) \cdots n}{k!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{n-k+1}{n} \frac{n-k+2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{k!}.$$

Pokazali smo da je niz monoton i ograničen, pa po prethodnoj teoremi konvergira, i njegov limes je poznata Ojlerova konstanta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2.71828\dots$$

čime je dobijen još jedan limes neodređenog oblika “ 1^∞ ” koji se smatra tabličnim.



Slika 2.3: Brojni niz sa opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Primer 2.18

Koristeći tablični limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

odnosno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{d(n)}\right)^{d(n)} = e, \quad \text{ako } \lim_{n \rightarrow \infty} d(n) = \pm\infty,$$

može se pokazati da

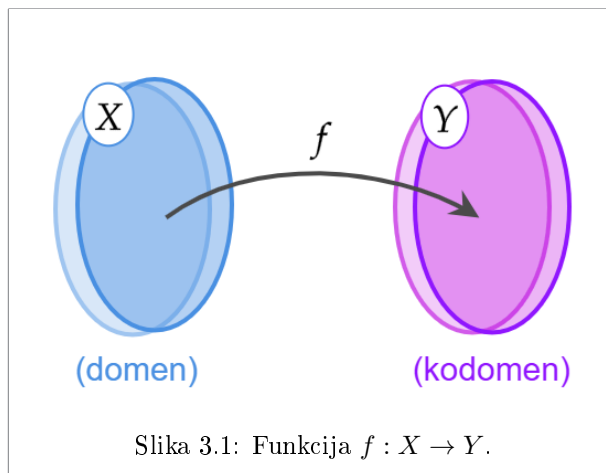
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} = 0,$$

i to na sledeći način:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{-2} \cdot \frac{-2}{n+1} \cdot n^2} \\ &= e^{-2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1}} = e^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

3 | Funkcije

Motivacija. Funkcije u fizici služe da bi se opisale fizičke veličine u određenoj tački u prostoru ili momentu u vremenu. Na primer, svakoj tački u prostoru u svakom momentu u vremenu možemo pridružiti temperaturu i gustinu materije koja ispunjava taj prostor. Dakle, funkcija je osnovni pojam pomoću kojeg opisujemo sve oko nas.



Definicija 3.1

Funkcija iz skupa X u skup Y je pravilo dodeljivanja elemenata iz X u elemente skupa Y . Skup X zovemo **domen**, a Y **kodomen** funkcije. Pišemo $f : X \rightarrow Y$ i kažemo da f slika X u Y . Svakom elementu x skupa X , funkcija f pridružuje tačno jedan element y skupa Y i pišemo $y = f(x)$.

3.1 Realne funkcije

Definicija 3.2

Realna funkcija jedne realne promenljive je svaka funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, gde je $X \subseteq \mathbb{R}$, dok:

- za domen uzimamo najširi podskup od $\mathbb{R}$ za koji izraz kojim je data funkcija dobro definisan - taj skup se naziva **prirodni domen** funkcije f , u oznaci D_f ;
- za kodomen uzimamo najčešće ceo skup $\mathbb{R}$.

Primer 3.3

Prirodni domen za sledeće funkcije su:

1. Za $f(x) = x^2$ imamo $D_f = \mathbb{R}$;
2. Za $g(x) = \sqrt{x}$ imamo $D_g = [0, \infty)$;

3. Za $h(x) = \frac{1}{x}$ imamo $D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
4. Za $r(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ imamo $D_r = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Definicija 3.4

Za funkcije $f : X \rightarrow Y$ i $g : Y \rightarrow Z$, funkcija $g \circ f : X \rightarrow Z$ data sa

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \text{za sve } x \in X,$$

naziva se **kompozicija funkcija** f i g (ili složena funkcija od f i g).

Primer 3.5

Za $f(x) = e^x$ i $g(x) = x^2$ imamo $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{x^2}$, dok je $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (e^x)^2 = e^{2x}$.

Definicija 3.6

Funkcija $f : X \rightarrow Y$ je:

- **Injekcija** ("1-1") ako se nijedna dva različita elementa $x_1, x_2 \in X$ ne slikaju u isti element $y \in Y$, tj.

$$(\forall x_1, x_2 \in X) (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2);$$

- **Surjekcija** ("na") ukoliko se u svaki element $y \in Y$ slika bar jedan element $x \in X$, tj.

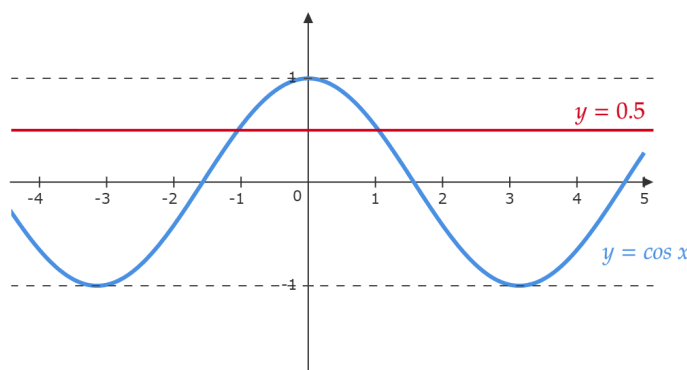
$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x);$$

- **Bijekcija** ako i samo ako je i injekcija i surjekcija

Napomena 2. Na grafiku se lako može uočiti da li je neka funkcija injekcija: funkcija je injekcija ako i samo ako svaka horizontalna prava seče njen grafik najviše jednom.

Primer 3.7

Funkcija $y = \cos x$ nije injekcija jer svaka prava $y = a$, $a \in [-1, 1]$ seče grafik funkcije više od jednog puta (Slika 3.2).

Slika 3.2: Funkcija $y = \cos x$.**Primer 3.8**

Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ data sa $f(x) = x^2$. Ova funkcija nije "1-1" jer je $f(1) = f(-1)$ (štaviše važi $f(x) = f(-x)$ za sve x). Sa druge strane, jeste "na" jer za svako $y \in [0, \infty)$ postoji x takvo da je $f(x) = y$ i to $x = \pm\sqrt{y}$.

Neke funkcije koje se često koriste su definisane kao inverze funkcije (u odnosu na kompoziciju) nekih dobro poznatih funkcija.

Definicija 3.9

Za datu funkciju $f : X \rightarrow Y$, njoj inverzna funkcija $f^{-1} : Y \rightarrow X$ je definisana tako da važi

$$(\forall x \in X) (f^{-1} \circ f)(x) = x \quad i \quad (\forall y \in Y) (f \circ f^{-1})(y) = y,$$

Teorema 3.10

Funkcija $f : X \rightarrow Y$ ima inverznu funkciju $f^{-1} : Y \rightarrow X$ ako i samo ako je bijekcija.

Napomena 3. Ako postoji inverzna funkcija $x = f^{-1}(y)$, njen grafik je simetričan grafiku funkcije $y = f(x)$ u odnosu na pravu $y = x$.

Primer 3.11

Za $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ datu kao $f(x) = \ln x$, imamo da je f "1-1" jer ako je $\ln x = \ln y$, onda je $x = e^{\ln x} = e^{\ln y} = y$. Takođe, f je "na" jer za svako $y \in \mathbb{R}$ postoji $x \in (0, \infty)$ takvo da je $\ln x = y$, i to $x = e^y$. Dakle f je bijekcija, stoga ima i inverznu funkciju koja je e^x .

Definicija 3.12

Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je **ograničena sa gornje strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \leq M.$$

Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ je **ograničena sa donje strane** ako

$$(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in X) f(x) \geq M.$$

Funkcija je **ograničena** ako i samo ako je ograničena i sa gornje i sa donje strane.

Primer 3.13

- (a) Funkcija $f(x) = x^2$ je ograničena sa donje strane sa 0, ali ne i sa gornje strane.
 (b) Pokažimo da je funkcija $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ ograničena. Razbijanjem funkcije na razliku

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

i korišćenjem nejednakosti

$$0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2,$$

očigledno sledi ograničenost $1 > g(x) \geq -1$.

Definicija 3.14

Za skup $X \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je **simetričan** (u odnosu na koordinatni početak) ako za sve $x \in X$ važi i da $-x \in X$.

Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definisana na simetričnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$ je **parna** ako $(\forall x \in X) f(-x) = f(x)$, a **neparna** ako $(\forall x \in X) f(-x) = -f(x)$.

Bitno je napomenuti:

- Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na y -osu, a grafik neparne u odnosu na koordinatni početak!
- Ako domen funkcije nije simetričan (u odnosu na koordinatni početak), onda ona nije ni parna ni neparna.

Primer 3.15

Važi

$$\cos(x) = \cos(-x) \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R},$$

što znači da je $\cos(x)$ parna funkcija, dok sa druge strane

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R},$$

pa je $\sin(x)$ neparna funkcija.

Primer 3.16

(a) Funkcija $f(x) = x^2 - x$ nije ni parna ni neparna, jer

$$f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x \neq \pm f(x);$$

(b) Funkcija $g(x) = x^3 - x$ je neparna, jer

$$g(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -g(x);$$

(c) Funkcija $h(x) = x^4 - x^2$ je parna, jer

$$h(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 = x^4 - x^2 = h(x).$$

Definicija 3.17

Za funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je **periodična** ako postoji pozitivan broj T takav da za sve $x \in X$ i $x + T \in X$ važi da je $f(x + T) = f(x)$. Broj T nazivamo **periodom** funkcije f , a najmanji period se naziva **osnovni period** funkcije f .

Primer 3.18

Funkcije $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ su periodične funkcije sa periodom 2π , ali $\sin x$ i $\cos x$ imaju prirodni period 2π , dok $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ imaju prirodni period π .

3.1.1 Elementarne funkcije

Motivacija. U prirodi, elementarni fenomeni su opisani elementarnim funkcijama. Na primer, razne oscilacije (matematičko klatno, dužina obdanice u toku dana, elastična žica) su opisane preko funkcija $\sin(x)$ i $\cos(x)$, nekontrolisani rast populacije ili zaraženih od bolesti preko eksponencijalne funkcije e^x , subjektivni doživljaj jačine zvuka preko $\log_a(x)$, površina i zapremina lopte preko stepenih funkcija x^2 i x^3 (tj. $r^2\pi$ i $\frac{4}{3}r^3\pi$) itd.

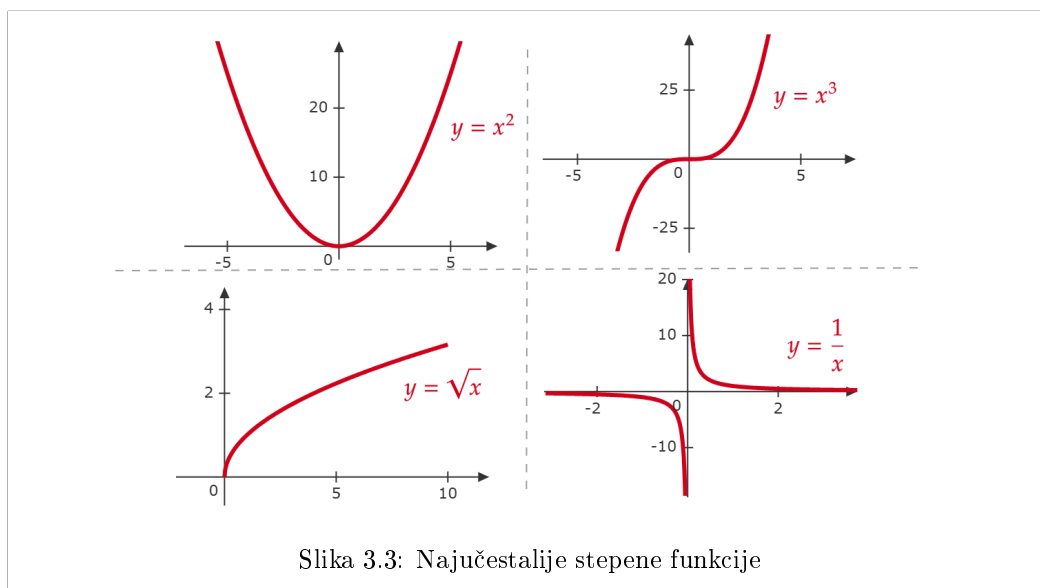
OSNOVNE ELEMENTARNE FUNKCIJE su:

* konstantna: $f(x) = c = \text{const}$;

* stepena $f(x) = x^a$, gde je:

$$- a = n, n \in \mathbb{Z},$$

$$- a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \text{ (korena funkcija } f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x});$$



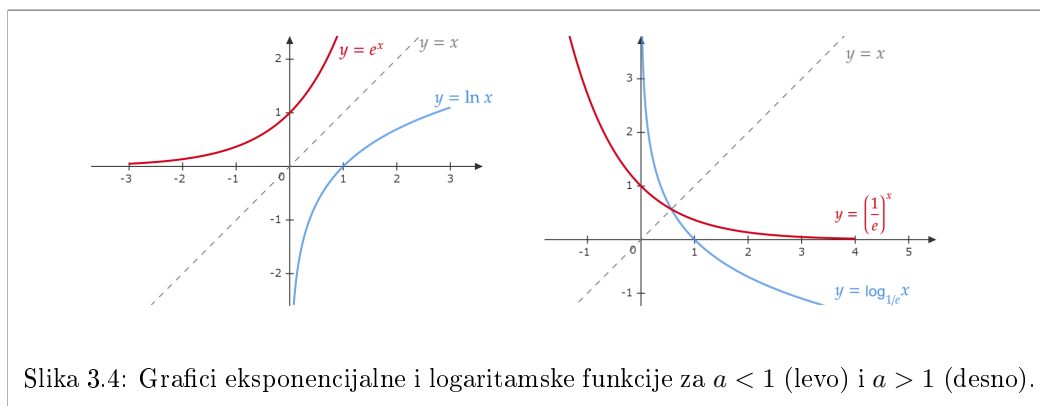
Slika 3.3: Najučestalije stepene funkcije

* eksponencijalna:

$$f(x) = a^x, \quad a > 0;$$

* logaritamska:

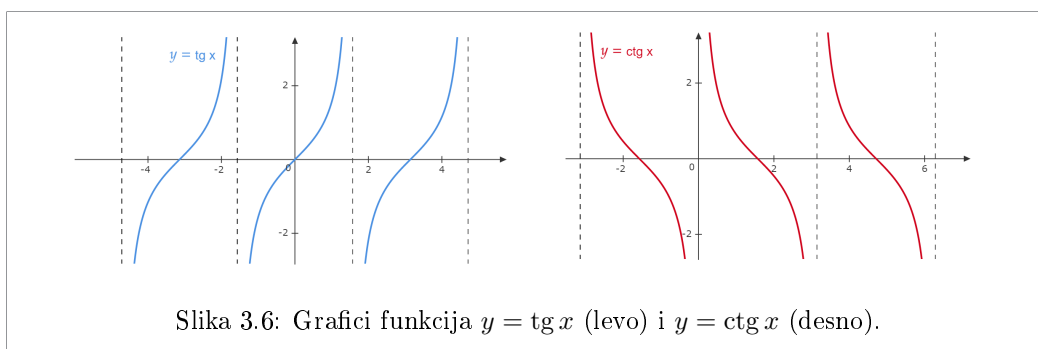
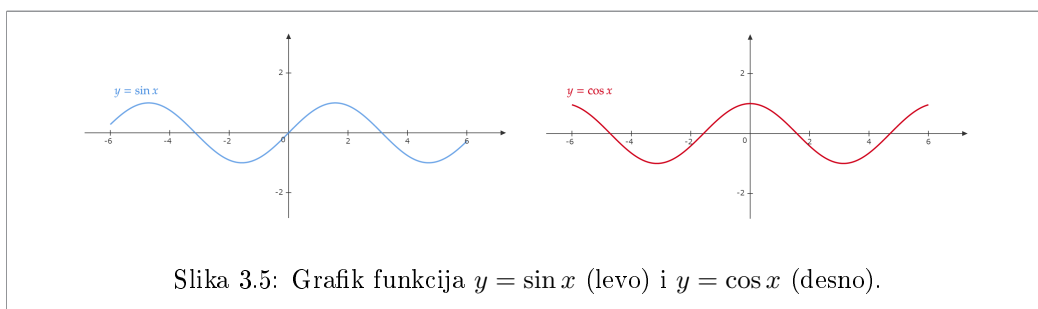
$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0;$$

Slika 3.4: Grafici eksponencijalne i logaritamske funkcije za $a < 1$ (levo) i $a > 1$ (desno).

Logaritamska i eksponencijalna funkcija su međusobno inverzne.

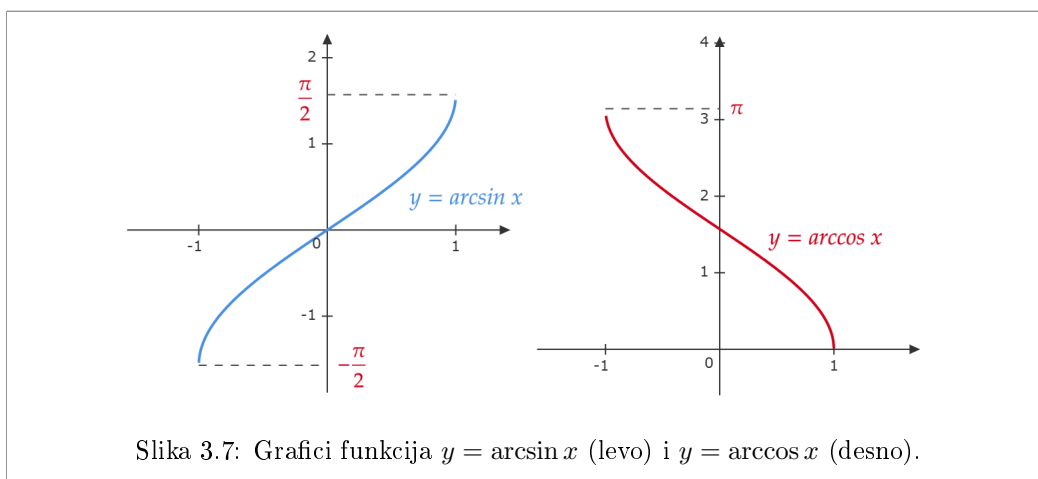
* trigonometrijske:

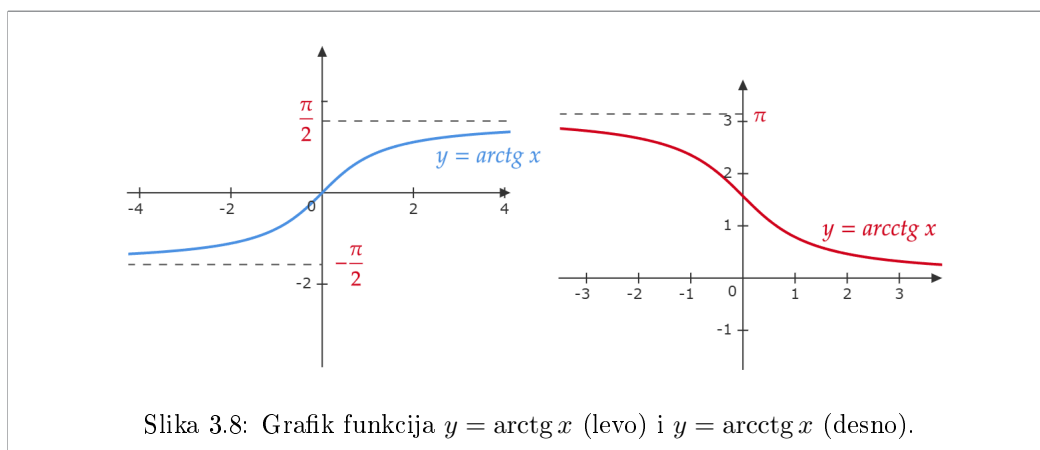
$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad k(x) = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x};$$



* inverzne trigonometrijske funkcije:

$$f(x) = \arcsin x, \quad g(x) = \arccos x, \quad h(x) = \operatorname{arctg} x, \quad k(x) = \operatorname{arcctg} x;$$





Napomena 4. *Primetimo da trigonometrijske funkcije nisu bijekcija na celom domenu. Inverzne trigonometrijske funkcije dobijamo restrikcijom domena trigonometrijskih funkcija tako da dobijena funkcija jeste bijekcija, a zatim traženjem njene inverzne. Na primer, funkcija $y = \cos x$ jeste bijekcija na intervalu $[0, \pi]$, pa se funkcija $y = \arccos x$ dobija traženjem inverzne funkcije njene restrikcije na $[0, \pi]$, tj. imamo*

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Istim postupkom dobijamo i ostale inverzne trigonometrijske funkcije arcsin, $x \operatorname{arctg} x$ i $\operatorname{arcctg} x$.

Sve ostale elementarne funkcije dobijaju se od osnovnih elementarnih funkcija primenom konačno mnogo operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicija. Na primer:

- polinomi (linearne, kvadratne funkcije):

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad a_n \neq 0;$$

- racionalne funkcije:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ i } Q(x) \text{ su polinomi, } Q(x) \neq 0;$$

- po delovima definisane funkcije, kao što je:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

3.2 Granična vrednost funkcije

Motivacija. Želimo da uvedemo koncept limesa za funkcije da bismo mogli da ispitujemo asimptote, neprekidnost i izvode funkcija. Kod nizova smo određivali kako se opšti član niza a_n ponaša kada se n neograničeno povećava. Sada želimo da definišemo granične vrednosti kod funkcija čiji su domeni podskupovi skupa realnih brojeva i da vidimo kako se funkcije ponašaju u okolini neke tačke.

Prvo ćemo dati dve ekvivalentne definicije granične vrednosti funkcije.

Definicija 3.19 (Preko nizova)

Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ granična vrednost (limes) funkcije f u tački a i pišemo

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = L,$$

ako za svaki niz $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ takav da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $a \notin \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ važi

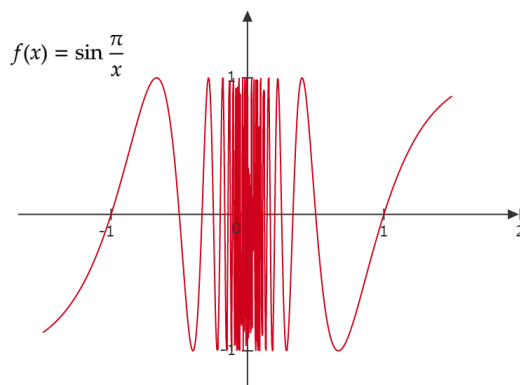
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = L.$$

Primer 3.20

Koristeći definiciju preko nizova, da bismo ispitali limes u $x = 0$, nije dovoljno proveriti da za samo jedan niz a_n takav da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ važi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$. Na primer, za funkciju $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$, koja nije definisana u 0, možemo da uzmemo niz $a_n = \frac{1}{n}$ i imaćemo

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \dots f\left(\frac{1}{n}\right) = \dots = 0.$$

odakle sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$. Bitno je napomenuti da odavde ne možemo da zaključimo da li je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ jednak 0, jer je limes proveren samo za jedan niz. Štaviše, za niz $b_n = \frac{1}{2n + \frac{1}{2}}$, imamo da je $f(b_n) = \sin\left((2n + \frac{1}{2})\pi\right) = 1$, odakle direktno sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 1$. Dakle, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ne postoji. Ako pogledamo grafik $f(x)$, to je naravno očekivano jer $f(x)$ beskonačno osciluje oko $x = 0$.



Slika 3.9: Funkcija $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ nema limes u nuli.

Definicija 3.21 (Preko okolina)

Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da je $L \in \mathbb{R}$ granična vrednost (limes) funkcije f u tački a i pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ako za svaku ε -okolinu tačke L (tj. za svaki interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ gde je $\varepsilon > 0$) postoji δ -okolina tačke a (tj. postoji interval $(a - \delta, a + \delta)$ gde je $\delta > 0$) takva da

$$x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Tačka a je tačka nagomilavanja skupa X (u svakoj okolini te tačke se nalazi beskonačno mnogo elemenata skupa X), ali ona ne mora biti element skupa X .

Funkcija može težiti i ka beskonačnosti kada $x \rightarrow a$. U tom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$. Takođe, a može biti $\pm\infty$ pa u tom slučaju pišemo $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ili $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

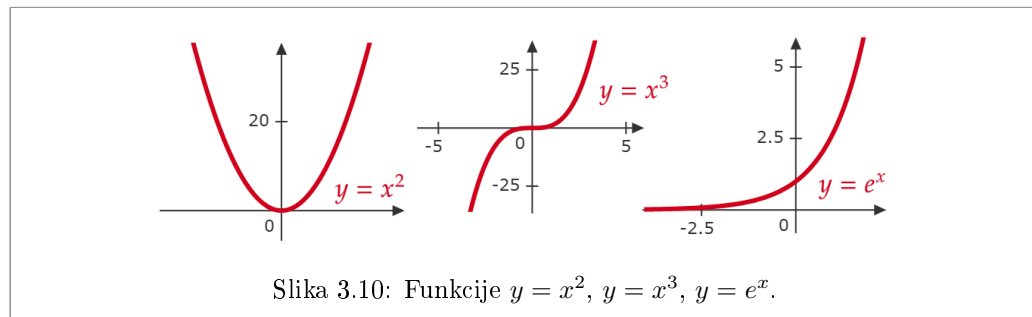
Primer 3.22

Granične vrednosti nekih elementarnih funkcija su

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0,$$

što se lako vidi na graficima tih funkcija.

**Primer 3.23**

Dokažimo po definiciji da je $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$. Prvo, neka je dato $\varepsilon > 0$. Tražimo $\delta > 0$ takvo da

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |(2x - 1) - 3| < \varepsilon.$$

Kako je $|(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2|$, želimo

$$0 < |x - 2| < \delta \implies 2|x - 2| < \varepsilon.$$

To će važiti ako uzmemo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dakle, za proizvoljno $\varepsilon > 0$, pronašli smo δ ($\delta = \frac{\varepsilon}{2}$) takvo da iz $|x - 2| < \delta$ sledi $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$.

Sledeći limesi se smatraju tabličnim, a većina se može pokazati po definiciji ili korišćenjem ostalih tabličnih limesa.

Tablica limesa:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2}, & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} &= e \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} &= 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \ln a, a \in \mathbb{R}^+, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} &= \alpha, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

I kod graničnih vrednosti funkcija važe ista pravila koja važe kod graničnih vrednosti nizova.

Neka je $c \in \mathbb{R}$ konstanta. Pretpostavimo da sledeći limesi postoje

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Tada važe sledeća **pravila limesa**:

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$, ako $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$.

Primer 3.24

Sledeće limese možemo izračunati kombinovanjem tabličnih limesa i osobina navedenih gore.

1. Imamo

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(4\pi x)}{(x - 1) \sin(5\pi x)} \arcsin(x - 1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(4\pi x)}{\sin(5\pi x)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x - 1)}{x - 1}.$$

Uvođenjem smene $t = x - 1$ dobijamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(4\pi x)}{\sin(5\pi x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(4\pi(t+1))}{\sin(5\pi(t+1))} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(4\pi t)}{\sin(5\pi t + \pi)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(4\pi t)}{-\sin(5\pi t)} \\ &= -\frac{4}{5} \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(4\pi t)}{4\pi t}}_{=1} \underbrace{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-5\pi t}{-\sin(5\pi t)}}_{=1} = -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin(t)}{t} = 1.$$

Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(4\pi x)}{(x-1)\sin(5\pi x)} \arcsin(x-1) = -\frac{4}{5}.$$

2. Da bismo pokazali da je

$$\lim_{x \rightarrow e} (x - (e-1))^{\frac{1}{x^2 - e^2}} = e^{\frac{1}{2e}}$$

koristimo smenu $t = x - e$ i limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

i onda dobijamo

$$\lim_{x \rightarrow e} (x - (e-1))^{\frac{1}{x^2 - e^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t} \frac{1}{t+2e}} = e^{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t+2e}} = e^{\frac{1}{2e}}.$$

Teorema 3.25

Ako je $f(x) < g(x)$ za $x \in (a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$, i $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ postoje, tada važi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Primer 3.26

Za funkcije $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^3$ imamo da važi $f(x) > g(x)$ na $(-1, 1) \setminus \{0\}$, ali je $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Dakle, limes može da naruši strogu nejednakost.

Teorema 3.27 (O dva žandara)

Ako je $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ za svako x u nekoj okolini tačke a , osim možda u a i

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L,$$

tada je

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

Primer 3.28

Pokazaćemo da je $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$. Primitimo prvo da ne smemo da koristimo da je limes proizvoda jednak proizvodu limesa jer $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ne postoji. Međutim, važi

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

i znamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0,$$

pa iz prethodne teoreme sledi

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Primer 3.29

Koristeći Teoremu o dva žandara i geometrijski pristup moguće je pokazati da važi tablični limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Prvo, imamo da za $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ važi

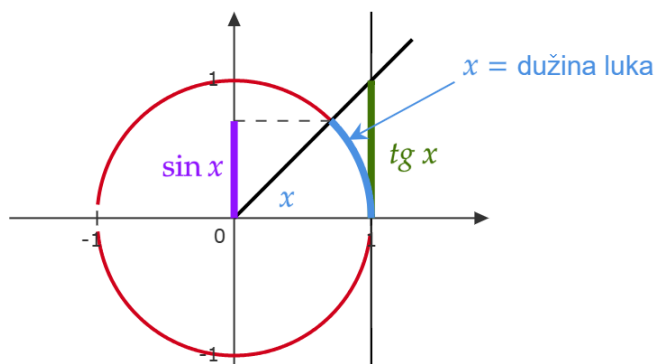
$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x,$$

pa je

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Množenjem ove nejednakosti sa $\sin x$ dobijamo

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \cos x$$



Slika 3.11: Geometrijski prikaz trigonometrijskih funkcija.

Sa druge strane, za $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ imamo

$$\sin(x) \geq x \geq \operatorname{tg} x,$$

pa je

$$\frac{1}{\sin x} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

odakle opet množenjem sa $\sin x$ sledi ista nejednakost (znak se promeni jer je na $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ funkcija $\sin x$ negativna). Oдавde imamo da za sve $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ ваži

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x.$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, po teoremi o dva žandara sledi da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3.2.1 Jednostrane granične vrednosti

Ako je domen funkcije f interval (a, b) na realnoj pravoj, onda ima smisla posmatrati jedino jednostrane granične vrednosti u tačkama $x = a$ i $x = b$. Takođe, neke funkcije imaju različite jednostrane limese.

Primer 3.30

Signum funkcija se definiše na sledeći način:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Vidimo da ваži sledeće:

- Kada x prilazi 0 sa leve strane, funkcija sgn teži 0. To zapisujemo sa $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.
- Kada x prilazi 0 sa desne strane, funkcija sgn teži 1. To zapisujemo sa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$.

Međutim, $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$ ne postoji.

Definicija 3.31

Neka je $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$. Vrednost

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

nazivamo **desnom graničnom vrednošću** funkcije f u tački a , dok vrednost

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

nazivamo **levom graničnom vrednošću** funkcije f u tački a .

Ako je funkcija f definisana sa obe strane tačke a , granična vrednost te funkcije kada $x \rightarrow a$ postoji ako i samo ako su leva i desna granična vrednost u toj tački jednake.

Teorema 3.32

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{ako i samo ako} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Primer 3.33

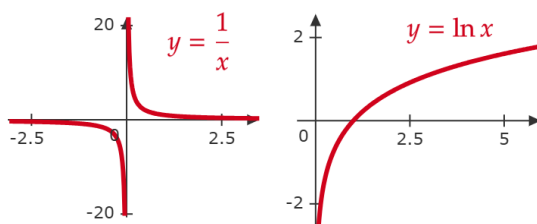
Granične vrednosti funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ u nuli su

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Vidimo da ova funkcija ima različite jednostrane granične, vrednosti, pa $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ne postoji. Takođe, kod funkcije $g(x) = \ln x$ imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty.$$

Njen domen je skup pozitivnih realnih brojeva, pa ima smisla posmatrati samo desnu graničnu vrednost u 0.

Slika 3.12: Funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \ln x$.

3.2.2 Nепрекидност funkcije i таčke prekida

Definicija 3.34

Kažemo da je funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **непрекидна** u tački $a \in X$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Funkcija je непрекидна ako je непрекидна u svakoj tački $a \in X$.

Napomena 5. Funkcija je непрекидна ako njen grafik možemo nacrtati bez podizanja olovke sa papira, naravno ukoliko je domen interval na realnoj pravoj.

Primer 3.35

Sve elementarne funkcije su непрекидне na svom domenu.

Definicija 3.36

Za funkciju $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je непрекидна sa leve strane (sa desne strane) u tački $a \in X$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \quad (\text{odnosno} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)).$$

Teorema 3.37

Ako je funkcija g непрекидна u a i f je непрекидна u $g(a)$, onda je i njihova kompozicija $f \circ g$ такође непрекидна u a .

Primer 3.38

Funkcija $f(x) = \sin(x^3)$ je neprekidna jer je kompozicija dve neprekidne funkcije: $g(x) = \sin(x)$ i $h(x) = (x^3)$, tj. važi $f(x) = g(h(x))$.

Teorema 3.39

Neka je f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i neka je N broj između $f(a)$ i $f(b)$. Tada postoji $c \in (a, b)$ takvo da $f(c) = N$.

Primer 3.40

Pokažimo da postoji realan koren jednačine $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$. Ideja je da nađemo dve tačke u kojima funkcija ima različit znak, npr. $f(0) = -2$ dok je $f(2) = 12$, pa važi $f(0) < 0 < f(2)$. Koristeći prethodnu teoremu, dobijamo da postoji $c \in (0, 2)$ takvo da je $f(c) = 0$.

Teorema 3.41

Neka je funkcije f neprekidna na svom domenu i neka je $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$. Tada

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b).$$

Kažemo: limes može da uđe pod neprekidnu funkciju.

Definicija 3.42

Za tačku $a \in X$ kažemo da je tačka prekida funkcije $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ako f nije neprekidna u toj tački.

Bitno je napomenuti:

- tačka u kojoj funkcija nije definisana ne može biti njena tačka prekida! (npr. tačka $x = 0$ NIJE tačka prekida funkcije $f(x) = 1/x$)
- kada tačka $a \in X$, moguće su dve opcije: ili $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ postoji u $\mathbb{R}$, ali nije jednak $f(a)$ ili $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ne postoji u $\mathbb{R}$ (u terminima leve i desne granične vrednosti, to znači da ili obe postoje u $\mathbb{R}$, ali su različite, ili bar jedna od njih ne postoji u $\mathbb{R}$);

Primer 3.43

Neka je

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

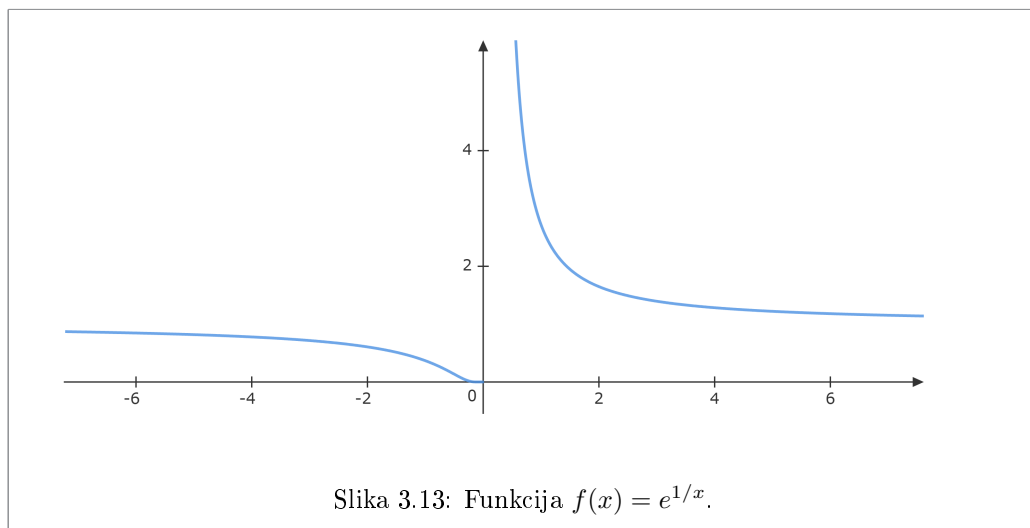
Jednostrane granične vrednosti funkcije f u 0 su

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}\right)} = 0 = f(0),$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}\right)} = +\infty \neq f(0).$$

Dakle, jednostrane granične vrednosti nisu iste, pa $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$ ne postoji i $f(x)$ nije neprekidna u $x = 0$, tako da je $x = 0$ tačka prekida. Primetimo da $f(x)$ jeste neprekidna sa leve strane u $x = 0$.



Slika 3.13: Funkcija $f(x) = e^{1/x}$.

KLASIFIKACIJA TAČAKA PREKIDA:

(i) a je tačka **otklonjivog (privednog) prekida** ako

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}, \text{ ali } L \neq f(a)$$

Primer: Funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$ ima otklonjiv prekid u $x = 2$, jer

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} (x + 1) = 3 \neq f(2);$$

(ii) a je tačka **prekida prve vrste** ako postoje konačne granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \text{ i } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \text{ ali su različite.}$$

Primer: Hevisajdova funkcija $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ili $f(x) = \operatorname{sgn} x$ imaju prekid prve vrste u $x = 0$.

(iii) a je tačka **prekida druge vrste** u svim ostalim slučajevima

Primer: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ima tačku prekida druge vrste jer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

a $f(0) = 1$.

Primer 3.44

Posmatramo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} (B+1)e^x, & x \in (-\infty, 0) \\ A, & x = 0 \\ \frac{\ln(x+1)}{x^{1/2}}, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

i želimo da odredimo konstante A i B takve da je data funkcija neprekidna na $\mathbb{R}$.

Na $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ funkcija f je neprekidna kao zbir, razlika, proizvod, količnik i kompozicija elementarnih funkcija, bez obzira na vrednost konstante B . Preostaje da pronađemo konstante A i B tako da f bude neprekidna i u 0. Treba da važi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = A.$$

Jednostrane granične vrednosti u 0 su

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (B+1)e^x = B+1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^{1/2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} x^{1/2} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, f je neprekidna ako

$$B+1 = 0 = A,$$

tj. $A = 0$, $B = -1$.

3.3 Asimptote

Jedan od važnih koraka u ispitivanju toka neke funkcije je određivanje njenih asimptota čije se postojanje ispituje u tačkama u kojima funkcija nije definisana i na rubnim tačkama domena. Može se reći da su asimptote prave u čijoj blizini se deo grafika funkcije nalazi i kojima se asimptotski približava u nekoj tački ili u beskonačnosti. Razlikujemo vertikalne, horizontalne i kose asimptote.

3.3.1 Vertikalne asimptote

Definicija 3.45

Prava $x = a$ je **vertikalna asimptota** grafika krive $y = f(x)$ ako je bar jedan od sledećih iskaza tačan

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, & \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty. \end{array}$$

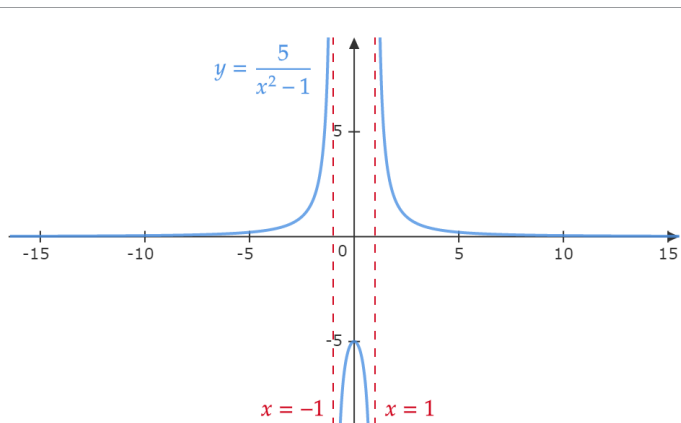
Primer 3.46

Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota grafika funkcije $y = 1/x$ jer važi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Primer 3.47

Prave $x = -1$ i $x = 1$ su vertikalne asimptote grafika funkcije $y = \frac{5}{x^2 - 1}$.



3.3.2 Horizontalne asimptote

Definicija 3.48

Prava $y = L$ je **horizontalna asimptota** grafika funkcije $y = f(x)$ ako

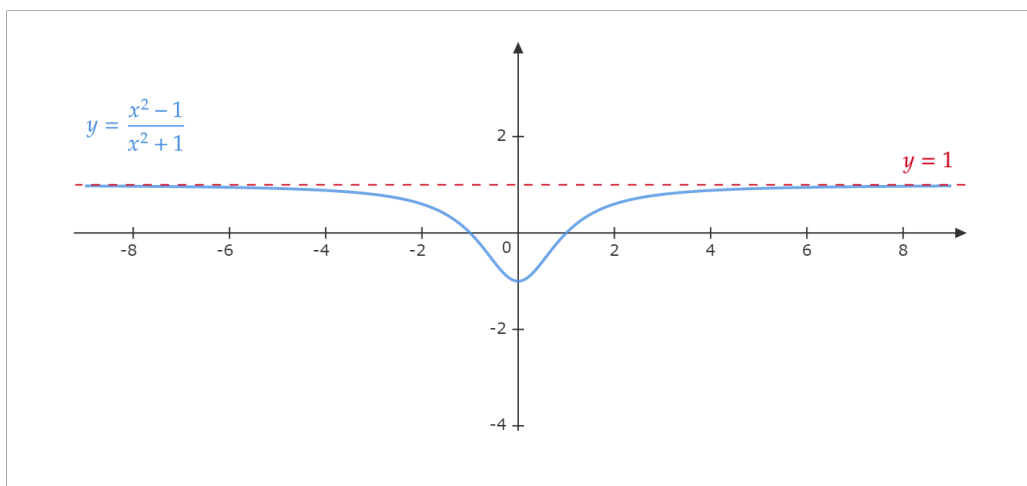
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L.$$

Primer 3.49

Kao što se vidi na grafiku funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ za dovoljno veliko $|x|$, funkcija će imati vrednosti blizu 1. To zapisujemo sa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Dakle, prava $y = 1$ je horizontalna asimptota grafika funkcije $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.



Primer 3.50

Za $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$, imamo da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) = -\frac{\pi}{2},$$

pa je $y = \frac{\pi}{2}$ horizontalna asimptota kada $x \rightarrow +\infty$, a $y = -\frac{\pi}{2}$ horizontalna asimptota kada $x \rightarrow -\infty$.

3.3.3 Kose asimptote

Definicija 3.51

Neka je funkcija f definisana za sve $x > M$ ($x < M$). Ako postoje brojevi $k \neq 0$ i n takvi da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (f(x) - (kx + n)) = 0,$$

prava $y = kx + n$ naziva se **kosa asimptota** grafika funkcije $y = f(x)$ kada $x \rightarrow +\infty(-\infty)$.

Brojevi k i n se određuju pomoću formula

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty(-\infty)} (f(x) - kx).$$

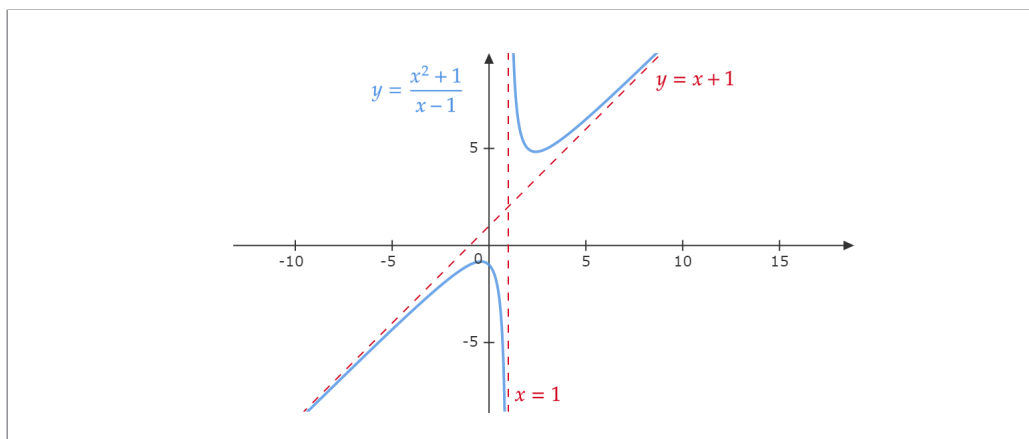
Funkcija ne može da ima istovremeno i kosu i horizontalnu asimptotu kada $x \rightarrow +\infty$ (ili kada $x \rightarrow -\infty$). Štaviše, funkcija ne može da ima više horizontalnih ili kosih asimptota u istoj beskonačnosti.

Primer 3.52

Pokažimo da je prava $y = x + 1$ je kosa asimptota grafika funkcije $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$. Kada $x \rightarrow +\infty$, imamo

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - x)}{x - 1} = 1,$$

a slično se dobija i da je $y = x + 1$ kosa asimptota kada $x \rightarrow -\infty$. Primetimo da je $x = 1$ vertikalna asimptota grafika funkcije $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.



Primer 3.53

Neka je data funkcija $f(x) = \frac{x}{\operatorname{arctg}(x)}$. Prvo, ispitujemo

$$k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}(x)} = \frac{2}{\pi},$$

dok je

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{\operatorname{arctg}(x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg}(x)} = -\frac{2}{\pi}.$$

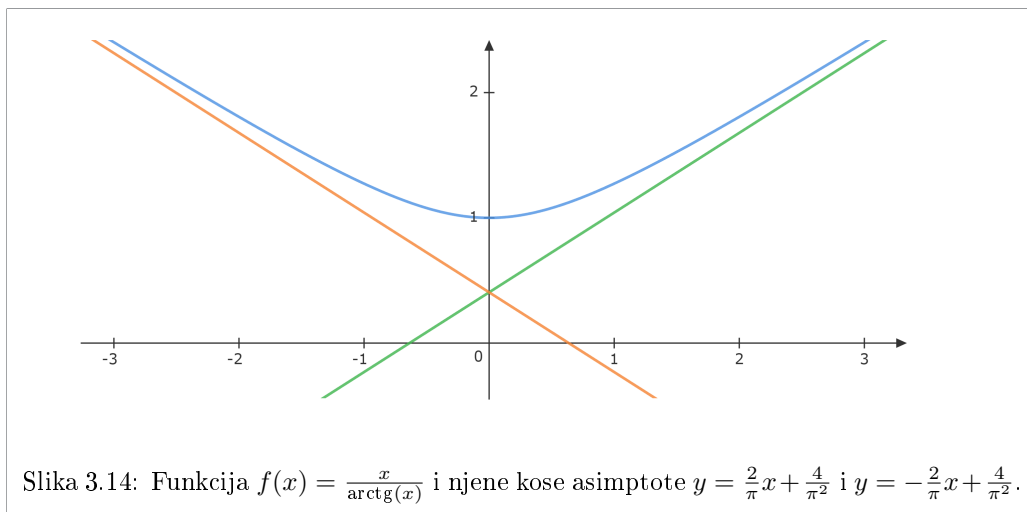
Dalje, tražimo

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\operatorname{arctg}(x)} - \frac{2}{\pi}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi}x \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x)}{\operatorname{arctg}(x)} \right) = \frac{4}{\pi^2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arctg}(x)$$

jer je $\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x) = \operatorname{arctg}(x)$ za $x > 0$. Sada, možemo primetiti da ako napišemo $y = \operatorname{arctg}(x)$, onda je $x = \operatorname{ctg}(y)$ i kada $x \rightarrow +\infty$ onda $y \rightarrow 0^+$, pa ovaj limes možemo zapisati kao

$$n_1 = \frac{4}{\pi^2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \operatorname{ctg}(y)y = \frac{4}{\pi^2} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\operatorname{tg}(y)} = \frac{4}{\pi^2},$$

gde smo koristili tablični limes. Na isti način se može pokazati i da je $n_2 = \frac{4}{\pi^2}$. Dakle, prava $y = \frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ je kosa asimptota kada $x \rightarrow +\infty$, a prava $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{4}{\pi^2}$ je kosa asimptota kada $x \rightarrow -\infty$.



Primer 3.54

Data je funkcija

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}}.$$

Želimo da odredimo sve njene asimptote. Kako je domen funkcije f $D_f = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup (2, +\infty)$, vertikalne asimptote tražimo u tački 0 i 2, ali ne u 1 jer je funkcija definisana u toj tački i važi $f(1) = 0$. Računamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{+\infty} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}} &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\infty} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}} &= \sqrt{\frac{1}{0^+}} e^{-\frac{5}{2}} = +\infty.\end{aligned}$$

Funkcija f ima vertikalne asimptote $x = 0$ i $x = 2$.

Dalje, tražimo horizontalne asimptote kada $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}} &= 1 \cdot e^0 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} e^{-\frac{5}{x}} &= 1 \cdot e^0 = 1.\end{aligned}$$

Dakle, $y = 1$ je horizontalna asimptota funkcije f kada $x \rightarrow \pm\infty$. Pošto f ima horizontalnu asimptotu i kada $x \rightarrow -\infty$ i $x \rightarrow +\infty$, onda ona ne može imati kose asimptote.

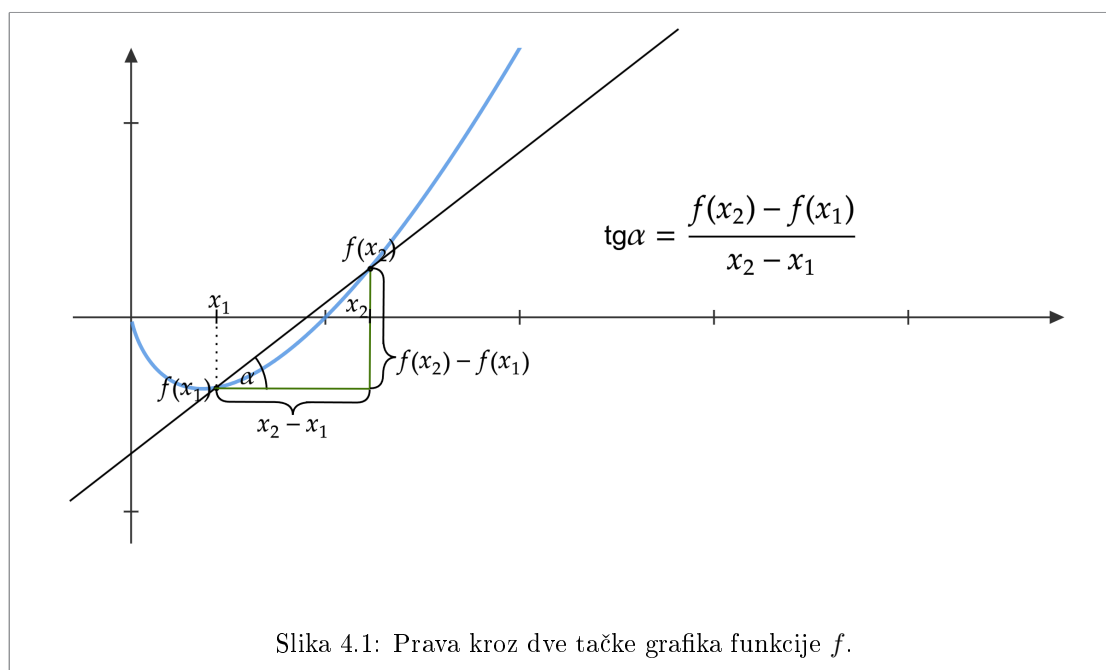
4 | Izvodi

Motivacija. U prirodi, razlike diktiraju ponašanje fizičkih sistema. Na primer, razlika pritiska rezultuje silom koja gura vazduh sa mesta višeg na mesto nižeg pritiska, razlika temperature rezultuje difuzijom toplote i ona prelazi sa toplijeg na hladnije mesto itd. Naravno, kako su fizički zakoni uglavnom lokalnog karaktera, tj. opisuju ponašanje sistema u infinitezimalno malom prostoru i vremenu, potreban nam je pojam koji opisuje lokalne razlike (tj. promene). Taj pojam nazivamo *izvodom* i on je jedan od ključnih matematičkih pojmova koji se koriste u fizici.

Da bismo objasnili pojam izvoda geometrijski, potrebno je da uvedemo pojam tangente na grafik. Neka je data funkcija $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ i tačke $x_1, x_2 \in A$ takve da $x_1 \neq x_2$. Prava koja prolazi kroz tačke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ je data preko jednačine

$$y - f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x_2 - x_1),$$

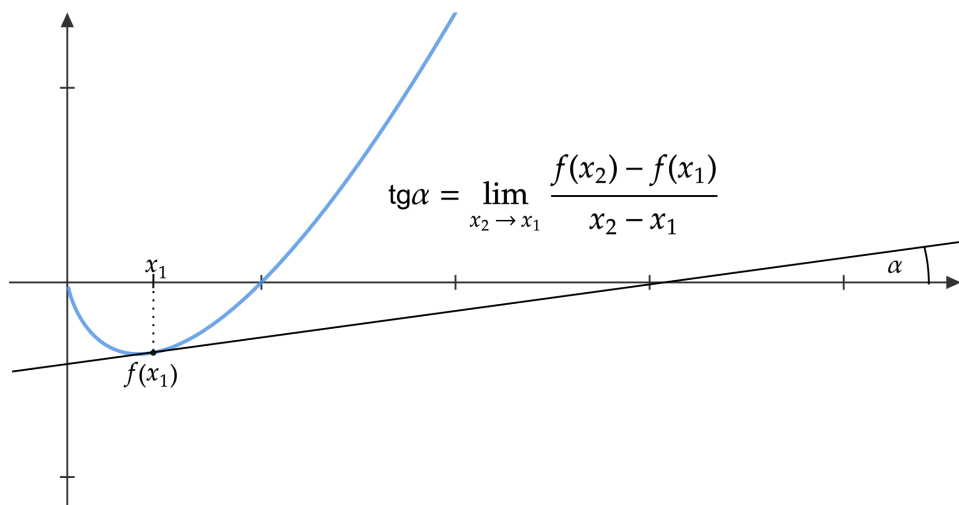
gde su $\Delta x := x_2 - x_1$ i $\Delta y := f(x_2) - f(x_1)$ priraštaji promenjive x i funkcije f , redom.



Kada tačka x_2 teži tački x_1 , navedena prava će da konvergira tangenti datoј sa:

$$y - f(x_1) = \left(\lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right) (x - x_1) = \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) (x_2 - x_1).$$

Ovo možemo predstaviti grafički kao na Slici 4.2.



Slika 4.2: Tangenta na grafik funkcije sa nagibom $\operatorname{tg}\alpha$, gde je α ugao koji tangenta zaklapa sa x -osom.

4.1 Pojam izvoda

Geometrijski, izvod u x predstavlja nagib tangente na grafik funkcije u tački $(x, f(x))$, tj. imamo sledeću definiciju:

Definicija 4.1

Izvod funkcije f u a se označava sa $f'(a)$ i dat je sa

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pod uslovom da taj limes postoji. Funkciju $x \mapsto f'(x)$ nazivamo **izvodna funkcija**.

Primetimo da vrednost $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ predstavlja prosečnu stopu promene $y = f(x)$ na intervalu $[x_1, x_2]$, dok pustom Δx u nulu dobijamo trenutnu stopu promene $f'(x_1)$.

Primer 4.2

Neka je sa $s = f(t)$ opisan položaj čestice koja se kreće duž prave linije. Tada $f'(a)$ predstavlja stopu promene s u odnosu na vreme t . Drugim rečima, $f'(a)$ predstavlja **brzinu čestice** u trenutku $t = a$. Treba imati u vidu da $f'(a)$ može biti i negativno, što opisuje smer kretanja čestice.

Primer 4.3

Za funkciju $f(x) = x^2$, izvod $f'(x)$ tražimo na sledeći način:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = 2x.$$

Primer 4.4

Za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$, računamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vidimo da izvod funkcije f postoji za sve $x > 0$ i nije definisan u $x = 0$.

Primer 4.5

Za funkciju $f(x) = \sin x$ računamo:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right)}{h}.$$

Kako je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x+h+x}{2}\right) = \cos(x),$$

dobijamo da je $\sin'(x) = \cos(x)$.

Primer 4.6

Za $f(x) = e^x$ računamo:

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Označimo sa $y = e^h - 1$. Imamo da je $e^h = y + 1$, pa primenjujući $\ln$ na ovaj identitet

dobijamo $h = \ln(y + 1)$. Primetimo da kada $h \rightarrow 0$, onda $y \rightarrow 0$, pa imamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(y + 1)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(y + 1)^{\frac{1}{y}}} \\ &= \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(y + 1)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\ln \left(\lim_{y \rightarrow 0} (y + 1)^{\frac{1}{y}} \right)} = \frac{1}{\ln e} = 1, \end{aligned}$$

gde smo koristili $\lim_{y \rightarrow 0} (y + 1)^{\frac{1}{y}} = e$. Odavde dobijamo da je $(e^x)' = e^x$.

Primer 4.7

Jednačinu tangente na krivu $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$ u tački $(1, e/2)$ određujemo na sledeći način. Prvo, jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u $(x_0, f(x_0))$ je data sa

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Kako je

$$f'(x) = \frac{e^x(1 + x^2) - e^x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2},$$

imamo $f'(1) = 0$, pa jednačina tangente u tački $(1, e/2)$ ima oblik $y = e/2$.

Konvencija za notaciju. Za izvod funkcije $f(x)$ koristimo sledeće oznake:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df}{dx}(x) = Df(x).$$

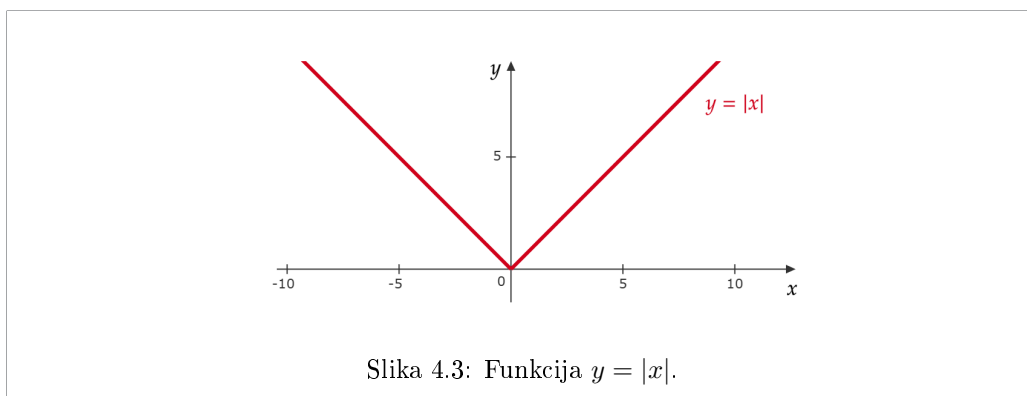
Definicija 4.8

*Funkcija f je **diferencijabilna** u a ako $f'(a)$ postoji. Funkcija f je **diferencijabilna na intervalu** (a, b) ako je diferencijabilna u svakoj tački $x \in (a, b)$.*

Primer 4.9

Dokažimo da funkcija $f(x) = |x|$ nije diferencijabilna u $x = 0$. Neka je prvo $x > 0$. Tada je $|x| = x$. Takođe, uzmimo h dovoljno malo takvo da $x + h > 0$,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - x}{h} = 1.$$



Dakle, f je diferencijabilna za $x > 0$. Slično, za $x < 0$ imamo $|x| = -x$ i možemo da odaberemo h dovoljno malo takvo da $x + h < 0$. Tada

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = -1,$$

pa je f diferencijabilna za $x < 0$. Ostalo je da ispitamo da li postoji $f'(0)$, zbog čega računamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0+h-0}{h} = 1, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1, \end{aligned}$$

tj. leva i desna granična vrednost u 0 su različite, sledi da $f'(0)$ ne postoji.

Geometrijska interpretacija: Kriva $y = |x|$ nema tangentu u tački $(0,0)$. Kažemo još i da grafik te funkcije ima špic u tački $(0,0)$.

Teorema 4.10

Ako je funkcija f diferencijabilna u a , onda je ona i neprekidna u a .

Dokaz. Kako limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

postoji, on mora biti oblika $\frac{0}{0}$, jer u suprotnom mora biti beskonačan ili nedefinisan zbog deljenja nulom. Odavde sledi da je $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$, tj. $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$, pa je funkcija f neprekidna u $x = a$. $\square$

Napomena 6. Obratni smer Teoreme 4.10 ne važi, tj. ako je funkcija neprekidna u nekoj tački, ona ne mora biti diferencijabilna u toj tački. To pokazuje upravo prethodni primer. Funkcija $f(x) = |x|$ je neprekidna u $x = 0$, ali nije diferencijabilna u $x = 0$.

Funkcija f nije diferencijabilna u a kada:

- Vidimo “špic” na grafiku funkcije, tj. $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \neq \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- Ima prekid u a (iz Teoreme 4.10 sledi: f nije neprekidna, pa ne može biti ni diferencijabilna).
- Ima vertikalnu tangentu u a , tj. neprekidna je u a ali

$$\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty.$$

Korišćenjem pravila koji važe kod graničnih vrednosti dobijamo da važi sledeće.

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i neka $f'(x)$ i $g'(x)$ postoje, onda važe **pravila izvoda**:

$$\begin{aligned} (cf(x))' &= cf'(x), \\ (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x), \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

4.2 Izvod složene funkcije

Za sada znamo da odredimo izvod diferencijabilne funkcije $f(x)$. Međutim, šta ako umesto x imamo neku funkciju $g(x)$? Drugim rečima, kako možemo pronaći izvod složene funkcije $F(x) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$? Odgovor na to pitanje nam daje sledeća teorema.

Teorema 4.11

Neka je funkcija $g(x)$ diferencijabilna u x i neka je $f(x)$ diferencijabilna u $g(x)$. Tada je funkcija $F(x) = f(g(x))$ takođe diferencijabilna u x i njen izvod je dat sa

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

ili u Lajbnicovoj notaciji (lančano pravilo),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}, \quad y = f(u), \quad u = g(x)$$

Primer 4.12

Pronađimo $F'(x)$ za $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Prvo, definišemo funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x^2 + 1$ za koje znamo da je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ i $g'(x) = 2x$. Sada možemo zapisati $F(x) = f(g(x))$, i po prethodnoj teoremi imamo:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Primer 4.13

Pronađimo $F'(x)$ za $F(x) = \sin(x^2)$. Prvo definišemo $f(x) = \sin x$ i $g(x) = x^2$ za koje je $f'(x) = \cos x$ i $g'(x) = 2x$, pa dobijamo

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$$

4.3 Izvod inverzne funkcije

Kada radimo sa inverznim funkcijama, korisno je znati kako naći izvod preko funkcije koja je njoj inverzna. To radimo na sledeći način:

Teorema 4.14

Ako bijektivna funkcija $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ zadovoljava sledeća tri uslova:

- (i) funkcija f je monotona na intervalu (a, b) ,
- (ii) funkcija f ima prvi izvod u tački $x_0 \in (a, b)$,
- (iii) $f'(x_0) \neq 0$,

tada funkcija f ima inverznu funkciju $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ i njen izvod u tački $y_0 = f(x_0)$ je

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y)|_{y=y_0} = \frac{1}{\frac{d}{dx}f(x)|_{x=x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Primer 4.15

Odredimo izvod inverzne funkcije f^{-1} , ako je $f(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$. Zapisivajući $y = f(x)$ i koristeći teoremu, dobijamo

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{2}.$$

Isto možemo dobiti i izražavanjem x preko y i traženjem izvoda po y . Naime,

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - 3}{2},$$

pa važi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2}.$$

Primer 4.16

Odredimo izvod funkcije $f(x) = \arctg(x)$ koristeći formulu za izvod inverzne funkcije:

$$\arctg'(y) = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\arctg(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctg(y))}} = \cos^2(\arctg(y)).$$

Sada, želimo da izrazimo $\cos^2(x)$ preko $\operatorname{tg}^2(x)$:

$$\operatorname{tg}^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1,$$

odakle sledi

$$\cos^2(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(x)}.$$

Uvrštavanjem u početni identitet, dobijamo

$$\arctg'(y) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctg(y))} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

4.4 Tablica izvoda

Korišćenjem do sada poznatih limesa, možemo doći do sledećih izvoda koje nazivamo *tabličnim izvodima*.

Tablica izvoda:

- | | |
|---|---|
| 1. $(c)' = 0, c \in \mathbb{R}$ | 7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},$ |
| 2. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$ | 8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ |
| 3. $(a^x)' = a^x \ln a, a \in (0, \infty) \setminus 1$ | 9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a \in (0, \infty) \setminus 1$ | 10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| 5. $(\sin x)' = \cos x$ | 11. $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 6. $(\cos x)' = -\sin x$ | 12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |

4.5 Izvodi višeg reda

Ako je f diferencijabilna, onda njena izvodna funkcija f' takođe može biti diferencijabilna, i u tom slučaju postoji $f'' = (f')'$ koji nazivamo *drugi izvod*. Često se koristi i sledeća (Lajbnicova)

notacija za drugi izvod

$$f'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Geometrijska interpretacija: Drugi izvod $f''(x)$ predstavlja promenu nagiba tangente na grafik, zbog čega se geometrijski interpretira kao zakrivljenost krive grafika.

Fizička interpretacija: Znamo da ako $s = s(t)$ predstavlja položaj objekta koji se kreće pravolinijski, onda $s'(t)$ predstavlja brzinu tog objekta. Trenutna stopa promene brzine u odnosu na vreme t je $s''(t)$, predstavlja ubrzanje tog objekta i često se označava sa $a(t)$.

Primer 4.17

Neka je položaj čestice koja se kreće pravolinijski dat kao funkcija od vremena $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ za $t \geq 0$, pri čemu je s mereno u cm , a t u sekundama. Odredimo ubrzanje kao funkciju od vremena i pronađimo ubrzanje u momentu $t = 2$.

Imamo

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 6t^2 - 10t + 3 && \text{(brzina u trenutku } t), \\ a(t) &= v'(t) = 12t - 10 && \text{(ubrzanje u trenutku } t). \end{aligned}$$

Dakle, ubrzanje u trenutku $t = 2$ je $a(2) = 14 \text{ cm/s}^2$.

Na isti način definišemo i treći, četvrti, ..., n -ti izvod funkcije f :

$$f^{(0)}(x) = f(x), \quad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)} \right)'(x), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(Njutn-)Lajbnicova formula za n -ti izvod proizvoda dve funkcije

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}, \quad f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tablica n -tih izvoda:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x (\ln a)^n, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \\ (\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \\ ((1+x)^\alpha)^{(n)} &= \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-(n-1)) (1+x)^{\alpha-n}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(n)} &= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

4.6 Izvod parametarski zadate funkcije

Jednačinama

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \quad t \in [a, b], \quad 0 < a < b,$$

moguće je definisati krivu. U tom slučaju kažemo da je kriva zadata parametarski.

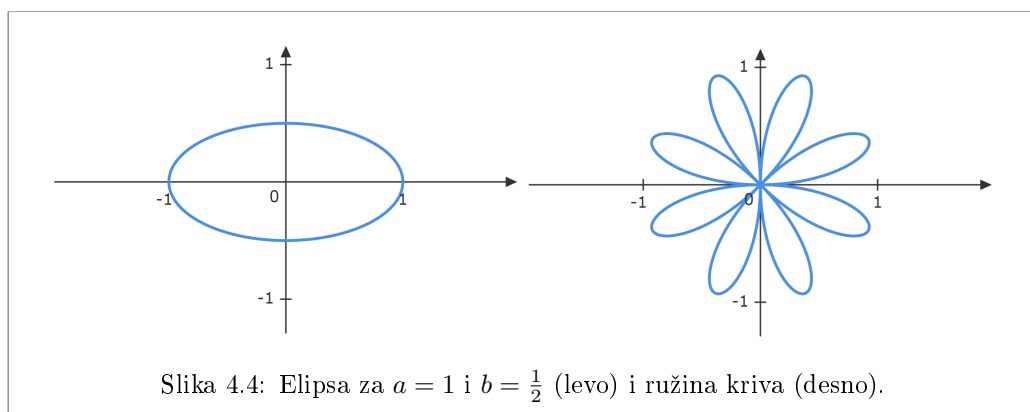
Primer 4.18

Parametarska kriva zadata kao

$$x(t) = a \cos(t), y(t) = b \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

za $a, b > 0$ se naziva elipsa, dok je ružina kriva opisana sa

$$x = \cos(t) \sin(4t), y(t) = \sin(t) \sin(4t), \quad t \in [0, 2\pi].$$



Slika 4.4: Elipsa za $a = 1$ i $b = \frac{1}{2}$ (levo) i ružina kriva (desno).

Iako je u nekim slučajevima eliminacijom t moguće odrediti eksplicitnu vezu između x i y , to nije neophodno da bismo odredili izvod, jer imamo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Dakle, jednačina tangente na krivu $(x(t), y(t))$ u tački $(x(t_0), y(t_0))$ je

$$y - y(t_0) = \frac{\frac{dy}{dt}(t_0)}{\frac{dx}{dt}(t_0)}(x - x(t_0))$$

kada je $\frac{dx}{dt}(t_0) \neq 0$. U slučaju kada je $\frac{dx}{dt}(t_0) = 0$, tangenta je vertikalna i njena jednačina je

$$x - x(t_0) = 0.$$

Primer 4.19

Data je parametarski zadata kriva

$$x(t) = t^2, \quad y(t) = t^4 + 1, \quad t \geq 0.$$

Računamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}(t^4 + 1)}{\frac{d}{dt}(t^2)} = \frac{4t^3}{2t} = 2t^2 = 2x.$$

Primer 4.20

Jednačina kružnice poluprečnika 1 sa centrom u koordinatnom početku se može opisati parametarskom krivom $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$. Tada, imamo da je

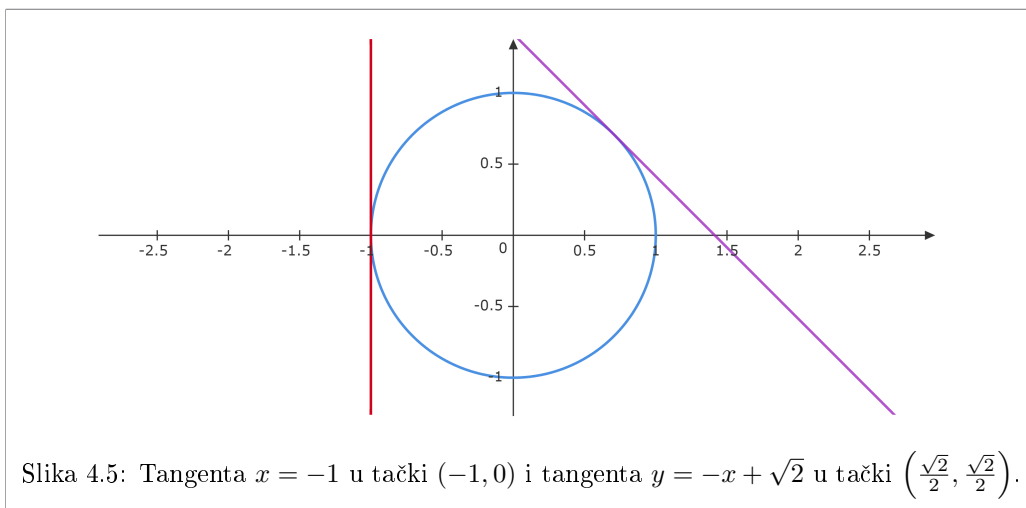
$$\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{\cos(t_0)}{-\sin(t_0)}, \quad t_0 \neq 0, \pi,$$

pa je jednačina tangente na kružnicu u tački $(x(t_0), y(t_0))$ data sa

$$y - \sin(t_0) = -\operatorname{ctg}(t_0)(x - \cos(t_0)), \quad \text{za } t_0 \neq 0 \text{ i } t_0 \neq \pi.$$

U slučaju kada je $t_0 = 0$ ili $t_0 = \pi$ (kojima redom odgovaraju tačke $(1, 0)$ i $(-1, 0)$), imamo da je $\sin(t_0) = 0$, pa su tangente vertikalne:

$$\begin{array}{ll} x = 1 & \text{je tangenta u tački } (1, 0), \\ x = -1 & \text{je tangenta u tački } (-1, 0). \end{array}$$



4.7 Izvod implicitno zadate funkcije

Do sada smo tražili izvode eksplicitno zadatih funkcija, odnosno funkcija kod kojih je zavisnost y od x data preko izraza oblika $y = f(x)$. Takođe smo videli kako da računamo izvode za parametarski date krive. Pored ova dva oblika, funkcija može biti zadata i implicitno.

Definicija 4.21

Ako postoje skupovi $D_x \subseteq \mathbb{R}$, $D_y \subseteq \mathbb{R}$ takvi da za svako fiksirano $x \in D_x$ jednačina $F(x, y) = 0$ ima jedinstveno rešenje $y \in D_y$, tada postoji preslikavanje $f : D_x \rightarrow D_y$ koje je rešenje jednačine $F(x, y) = 0$, tj.

$$F(x, f(x)) = 0, \quad \text{za svako } x \in D_x.$$

Za funkciju f kažemo da je **implicitno definisana** pomoću preslikavanja F .

U nekim slučajevima je moguće rešiti jednačinu po x i odrediti y kao funkciju od x , a zatim pronaći izvod. Međutim, često su dobijeni izrazi oblika $F(x, y) = 0$ komplikovani i nije jednostavno (ili moguće) izraziti $y = f(x)$. U takvim situacijama možemo da diferenciramo ceo izraz $F(x, y) = 0$ i izrazimo y' preko x i y .

Primer 4.22

Neka je

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y = y(x).$$

U ovom slučaju, $D_x = [-1, 1]$ dok je $D_y = [0, 1]$ ili $D_y = [-1, 0]$ (iz jednačine možemo i da direktno izrazimo $y = \pm\sqrt{1-x^2}$). Diferenciranjem obe strane po x dobijamo

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1) \Leftrightarrow \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = 0.$$

Koristeći formulu za izvod složene funkcije dobijamo

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dy}y^2 \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx},$$

pa imamo

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Primer 4.23

Pronađimo y' ako je $\sin(x + y) = y^2 \cos x$. Diferenciranjem obe strane po x dobijamo

$$\cos(x + y)(1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\sin x).$$

Dakle,

$$y'(\cos(x + y) - 2y \cos x) = -y^2 \sin x - \cos(x + y),$$

pa je

$$y' = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y \cos x}.$$

Primer 4.24

Pronađimo izvod funkcije $y = x^{\sqrt{x}}$ preko izvoda implicitno zadate funkcije. Prvo, primenjujući funkciju $\ln$ na $y = x^{\sqrt{x}}$, dobijamo

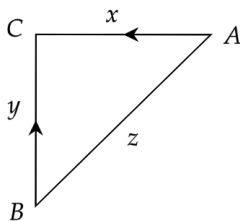
$$\ln y = \sqrt{x} \ln x.$$

Diferenciranjem obe strane po x dobijamo

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \sqrt{x} \frac{1}{x} \implies y' = y \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right).$$

Primer 4.25

Automobili A i B putuju ka raskrsnici C . Znamo da su njihove početne udaljenosti od C redom 0.3km i 0.4km , da se automobil A kreće ka zapadu brzinom 50km/h , dok se automobil B kreće ka severu brzinom 60km/h . Odredimo početnu brzinu kojom oni prilaze jedan drugom. Prvo, za dato t , označimo sa $x(t)$ udaljenost A od C , a $y(t)$ udaljenost B od C . Neka $z(t)$ označava rastojanje između A i B .



Koristeći Pitagorinu teoremu dobijamo

$$x^2(t) + y^2(t) = z^2(t).$$

Kako se udaljenosti automobila od C smanjuju, brzine moraju biti negativne, tj. važi $\frac{dx}{dt} = -50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $\frac{dy}{dt} = -60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Preostaje da izračunamo $\frac{dz}{dt}(0)$. Diferenciranjem gornje jednačine po t dobijamo

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 2z \frac{dz}{dt} \implies \frac{dz}{dt} = \frac{1}{z} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right).$$

Kada je $x(0) = 0.3 \text{ km}$ i $y(0) = 0.4 \text{ km}$, imamo $z(0) = \sqrt{0.3^2 + 0.4^2} = 0.5 \text{ km}$, pa

$$\frac{dz}{dt}(0) = \frac{1}{0.5} \left(-0.3 \cdot 50 - 0.4 \cdot 60 \right) = -78 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Dakle, automobili u početnom momentu $t = 0$ se približavaju jedan drugom brzinom $-78 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zbog čega je predznak negativan.

4.8 Primena izvoda

4.8.1 Lopitalovo pravilo

Lopitalovo pravilo se koristi za izračunavanje graničnih vrednosti oblika " $\frac{0}{0}$ " i " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Teorema 4.26

Neka su funkcije f i g diferencijabilne na nekom skupu $D \subseteq \mathbb{R}$, sem možda u tački $c \in D$ i neka je $g(x) \neq 0$ na D . Ako je

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow c} g(x) = \pm\infty,$$

tada je

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

pod uslovom da desna granična vrednost postoji.

Dokaz teoreme u slučaju kada je $f(c) = g(c) = 0$ i postoje $f'(c)$ i $g'(c)$:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)}{g(c+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}{\frac{g(c+h)-g(c)}{h}} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(c+h)-g(c)}{h}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

□

Napomena 7.

- Lopitalovo pravilo se može primeniti i u slučaju jednostranih limesa kada $x \rightarrow c^-$ ili $x \rightarrow c^+$;
- Lopitalovo pravilo se može primeniti i za rešavanje neodređenih izraza

$$“0 \cdot \infty”, “\infty - \infty”, “1^\infty”, “0^0”, “\infty^0”,$$

ali pre toga treba ih pogodnim transformacijama svesti na oblik " $\frac{0}{0}$ " ili " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

Primer 4.27

Koristeći Lopitalovo pravilo, možemo izračunati sledeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0,$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1.$$

4.8.2 Monotonost funkcije**Definicija 4.28**

Za datu funkciju f kažemo da je na intervalu (a, b) :

1. **Rastuća** ako za sve $x, y \in (a, b)$ važi

$$x < y \implies f(x) < f(y);$$

2. **Opadajuća** ako za sve $x, y \in (a, b)$ važi

$$x < y \implies f(x) > f(y);$$

3. **Neopadajuća** ako za sve $x, y \in (a, b)$ važi

$$x < y \implies f(x) \leq f(y);$$

4. **Nerastuća** ako za sve $x, y \in (a, b)$ važi

$$x < y \implies f(x) \geq f(y).$$

Sledeća teorema nam daje vezu između monotonosti i izvoda:

Teorema 4.29

Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b) . Tad važi:

1. Funkcija je neopadajuća na (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$;
2. Funkcija je nerastuća na (a, b) ako i samo ako je $f'(x) \leq 0$ za sve $x \in (a, b)$;
3. Ako $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$, onda je funkcija rastuća na (a, b) ;
4. Ako $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$, onda je funkcija opadajuća na (a, b) ;

Primer 4.30

Funkcija $f(x) = x^3$ je diferencijabilna i važi $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, pa je po prethodnoj teoremi funkcija neopadajuća. Primetimo da je $f(x)$ rastuća funkcija jer za $x < y$ važi $x^3 < y^3$, ali ne važi da je $f'(x) > 0$ za $x = 0$. Dakle funkcija može da bude rastuća a da joj je izvod jednak nuli u nekoj tački, stoga obratni smer tvrđenja pod rednom brojem 3 u prethodnoj teoremi ne važi u opštem slučaju. Do analognog zaključka dolazimo i kod tvrđenje pod rednim brojem 4 i to koristeći funkciju $f(x) = -x^3$, na primer.

Primer 4.31

Funkcija $f(x) = x^2$ ima izvod $f'(x) = 2x$ i stoga je rastuća na $(0, \infty)$ i opadajuća na $(-\infty, 0)$.

4.8.3 Minimum i maksimum funkcije

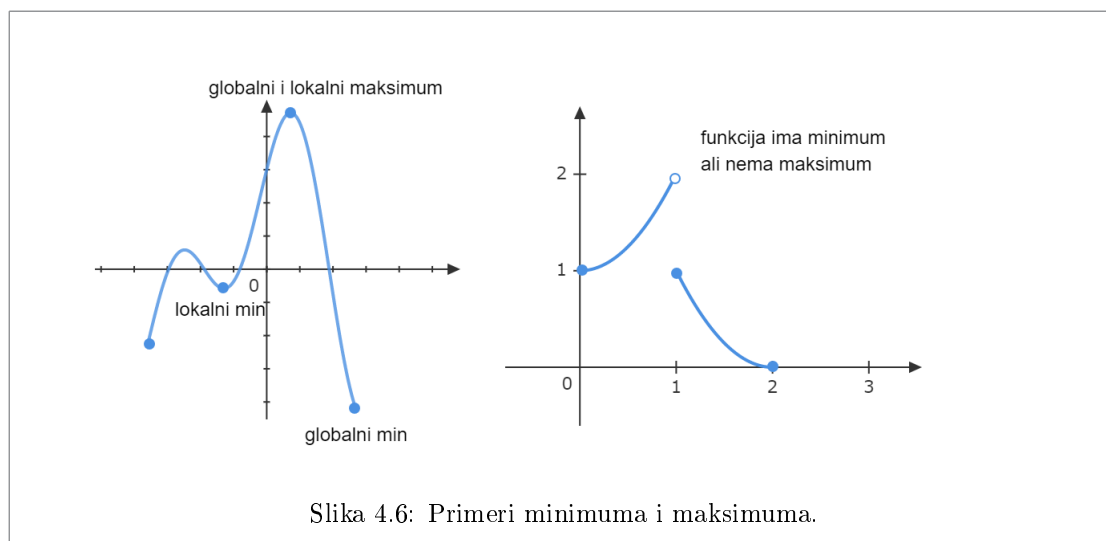
Jedan od važnih aspekata primene diferencijalnog računa čine problemi optimizacije, odnosno problemi pronalaženja najboljeg (najoptimalnijeg) načina da se izvrši neka radnja (na primer računanje minimalnih troškova ili maksimalnog prihoda). Takvi problemi se svode na problem traženja minimuma ili maksimuma funkcije.

Definicija 4.32

1. Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ima **globalni maksimum** u tački $c \in X$ ako za svako $x \in X$ važi $f(c) \geq f(x)$. Broj $f(c)$ se naziva **maksimalna vrednost** funkcije f na X .
2. Funkcija $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ima **globalni minimum** u tački $c \in X$ ako za svako $x \in X$ važi $f(c) \leq f(x)$. Broj $f(c)$ se naziva **minimalna vrednost** funkcije f na X .
3. Zajednički naziv za minimalnu i maksimalnu vrednost funkcije f je **ekstremna vrednost** funkcije f .
4. Funkcija f ima **lokalni maksimum** u $c \in X$ ako postoji $a > 0$ takvo da za sve $x \in (c - a, c + a)$ važi $f(c) \geq f(x)$.
5. Funkcija f ima **lokalni minimum** u c ako postoji $\delta > 0$ takvo da za sve $x \in (c - a, c + a)$ važi $f(c) \leq f(x)$.

Teorema 4.33

Ako je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda ona dostiže globalni minimum $f(c)$ i globalni maksimum $f(d)$, za neko $c, d \in [a, b]$



Slika 4.6: Primeri minimuma i maksimuma.

Teorema 4.34 (Fermaova teorema – potreban uslov za ekstrem)

Ako funkcija f , definisana u nekoj okolini tačke x_0 , ima lokalni ekstrem u x_0 tada ili je $f'(x_0) = 0$ ili $f'(x_0)$ ne postoji. Dakle, kandidati za ekstrem su tačke x za koje $f'(x) = 0$ ili $f'(x)$ ne postoji.

Primer 4.35

1. Funkcija $f(x) = |x|$ ima minimum u 0, ali $f'(0)$ ne postoji;
2. Ako je $f(x) = x^3$ imamo $f'(0) = 0$, ali f ne dostiže ekstremnu vrednost u 0;
3. Ako je $f(x) = x^2$ imamo $f'(0) = 0$ i funkcija dostiže minimalnu vrednost u 0.

Teorema 4.36 (Dovoljan uslov za ekstrem)

Neka je funkcija f neprekidna u nekoj okolini tačke x_0 i ima izvod u svakoj tački te okoline sem eventualno u tački x_0 . Ako je

$$f'(x) < 0, \quad x < x_0, \quad f'(x) > 0, \quad x > x_0,$$

onda je x_0 tačka strogog lokalnog minimuma, a u slučaju

$$f'(x) > 0, \quad x < x_0, \quad f'(x) < 0, \quad x > x_0,$$

x_0 je tačka strogog lokalnog maksimuma.

Možemo zaključiti da ukoliko izvodna funkcija ne menja znak pri prolazu promenljive x kroz tačku x_0 , onda funkcija nema ekstremnu vrednost u toj tački.

4.8.4 Rolova teorema srednje vrednosti

Teorema 4.37 (Rolova teorema)

Ako funkcija f zadovoljava sledeće uslove:

1. neprekidna je na $[a, b]$, $a < b$,
2. diferencijabilna je u svakoj tački intervala (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$,

tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je

$$f'(c) = 0.$$

Rolovu teoremu možemo interpretirati na dva načina:

- *geometrijska interpretacija*: ako je grafik funkcije $f(x)$ neprekidan na svom domenu i u svakoj tački ima tangentu i pri tome je $f(a) = f(b)$, onda postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ u kojoj je tangenta horizontalna.
- *fizička interpretacija*: neka se tačka kreće duž prave linije i neka je njen položaj u trenutku x opisan funkcijom $f(x)$. Ako se položaji tačke u trenutku $x = a$ i u trenutku $x = b$ poklapaju, onda mora postojati trenutak $a < c < b$ u kojem je brzina tačke jednaka nuli.

Primer 4.38

Pokažimo da funkcija $f(x) = 1 + 2x + x^3 + 4x^5$ ima najviše jednu nulu na intervalu $[-2, 2]$. Pretpostavimo suprotno, tj. da ima bar dve nule $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$. Kako je $f'(x) = 3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$ neprekidna funkcija i kako je $f(x_1) = f(x_2) = 0$, možemo da primenimo Rolovu teoremu na funkciju f na intervalu $[x_1, x_2]$ i dobijamo da postoji $c \in [x_1, x_2]$ takvo da je $f'(c) = 0$. Sa druge strane, $f'(c) = 3(c^2 - 5) = 0$ implicira da je $c = \pm\sqrt{5}$, što nije u intervalu $[-2, 2]$ i to je kontradikcija. Dakle, imamo najviše jednu nulu na $[-2, 2]$.

4.8.5 Lagranžova teorema srednje vrednosti

Teorema 4.39 (Lagranžova teorema)

Ako funkcija f zadovoljava sledeće uslove:

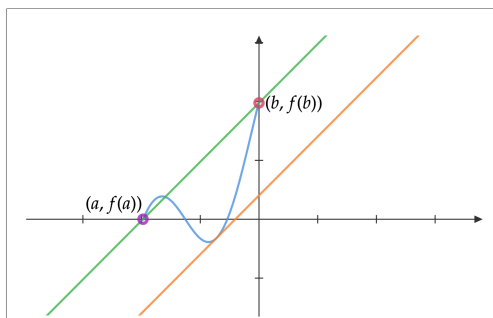
1. neprekidna je na $[a, b]$, $a < b$,
2. diferencijabilna je u svakoj tački intervala (a, b) ,

tada postoji $c \in (a, b)$ tako da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Lagranžova teorema se može interpretirati na dva načina:

- *geometrijska interpretacija*: postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je koeficijent pravca tangente na grafik funkcije $f(x)$ u tački $(c, f(c))$ jednak koeficijentu pravca prave određene tačkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.
- *fizička interpretacija*: pri kretanju tela (duž prave linije), u nekom trenutku vremena $c \in (a, b)$ je trenutna brzina jednaka je prosečnoj brzini na vremenskom intervalu (a, b) .



Slika 4.7: Prikaz Lagranžove teoreme: prava koja prolazi kroz $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ paralelna je sa tangentom.

Posledica 4.40

Ako je $f'(x) = 0$ za sve $x \in (a, b)$, tada je $f(x) = \text{const}$ na (a, b) .

Posledica 4.41

Ako funkcije f i g imaju jednake izvode, $f'(x) = g'(x)$, $x \in (a, b)$, onda se one razlikuju za konstantu, tj.

$$f(x) = g(x) + c, \quad x \in (a, b), \quad c = \text{const}.$$

Primer 4.42

Neka je za sve $x \in \mathbb{R}$ ispunjeno $3 \leq f'(x) \leq 5$. Pokažimo da je tada $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$. Iz Lagranžove teoreme, imamo

$$f(8) - f(2) = f'(c)(8 - 2) = 6f'(c), \quad \text{za neko } c \in (2, 8).$$

Kako je $3 \leq f'(x) \leq 5$ za bilo koje x , dobijamo da je $18 \leq 6f'(c) \leq 30$, odakle sledi direktno tvrđenje.

4.8.6 Konveksnost i konkavnost funkcije

Definicija 4.43

Funkcija f je **konveksna** na nekom intervalu I ako se njen grafik nalazi iznad svih tangenti na grafik funkcije f na intervalu I .

Funkcija f je **konkavna** na nekom intervalu I ako se njen grafik nalazi ispod svih tangenti na grafik funkcije f na intervalu I .

Tačka x_0 je **prevojna tačka** funkcije f ako se u njoj menja konveksnost u konkavnost ili obatno, tj. postoji $a > 0$ tako da važi

$$\begin{aligned} f \text{ je konveksna na } (x_0 - a, x_0) \text{ i } f \text{ je konkavna na } (x_0, x_0 + a) \\ \text{ili} \\ f \text{ je konkavna na } (x_0 - a, x_0) \text{ i } f \text{ je konveksna na } (x_0, x_0 + a). \end{aligned}$$

Kako ćemo često raditi sa funkcijama koje su bar dva puta diferencijabilne, biće nam korisna sledeća veza između f'' i konveksnosti f :

Teorema 4.44

Neka je funkcija f definisana na (a, b) ima drugi izvod na (a, b) . Tada je funkcija f

1. konveksna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ za sve $x \in (a, b)$;
2. konkavna na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) \leq 0$ za sve $x \in (a, b)$.

Teorema 4.45 (Potreban uslov za prevoj)

Ako je funkcija f dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 koja je tačka prevoja, tada je $f''(x_0) = 0$.

Teorema 4.46 (Dovoljan uslov za prevoj)

Ako je funkcija f neprekidna u tački x_0 i dva puta diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 sem eventualno u x_0 i važi

$$f''(x) < 0, \quad x < x_0, \quad f''(x) > 0, \quad x > x_0,$$

ili

$$f''(x) > 0, \quad x < x_0, \quad f''(x) < 0, \quad x > x_0,$$

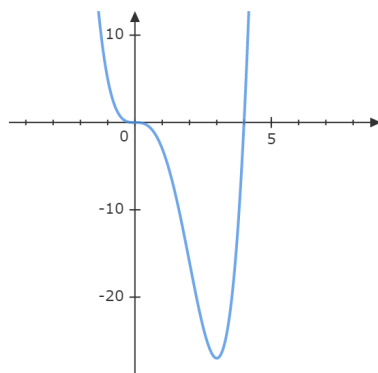
onda je x_0 tačka prevoja funkcije f .

Teorema 4.47 (Dovoljan uslov za ekstrem)

Neka je funkcija f definisana u nekoj okolini tačke x_0 i u tački x_0 ima prvi i drugi izvod pri čemu je $f'(x_0) = 0$. Ako $f''(x_0) > 0$, tada funkcija f u tački x_0 ima strogi lokalni minimum. Za $f''(x_0) < 0$ funkcija f u tački x_0 ima strogi lokalni maksimum. U slučaju $f''(x_0) = 0$ potrebna su dalja ispitivanja.

Primer 4.48

Data je funkcija $f(x) = x^4 - 4x^3$. Želimo da ispitamo konkavnost i konveksnost funkcije f i odredimo tačke ekstrema, kao i prevojne tačke.



Slika 4.8: Grafik funkcije $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3).$$

Zaključak: Funkcija f raste za $x > 3$ i opada za $x < 3$. Važi $f'(3) = 0$, što znači da f dostiže lokalni minimum u $(3, -27)$.

Dalje, drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Zaključak: Funkcija f je konveksna za $x \in (-\infty, 0)$ i $x \in (2, \infty)$ i konkavna za $x \in (0, 2)$. Takođe, važi $f''(0) = 0$ i $f''(2) = 0$, što znači da su $(0, 0)$ i $(2, -16)$ prevojne tačke.

4.9 Aproksimacija funkcija polinomom

Motivacija. Posmatramo model nelinearnog harmonijskog oscilatora koji se sastoji od krutog tela mase m okačenog o nit, koje se kreće pod uticajem Zemljine teže mg . Položaj tela mase m se može opisati preko dužine niti L i ugla koji nit zaklapa sa vertikalom $\theta(t)$. Kretanje tela je opisano drugim Njutnovim zakonom $F = ma$, i uzimajući u obzir da je $ma = mL\ddot{\theta}(t)$, a $F = mg \sin \theta$ (jer se sila zatezanja T skraćuje sa $mg \cos \theta$), dobijamo

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \sin \theta(t) = 0.$$

Ovo je nelinearna diferencijalna jednačina drugog reda koja nema eksplicitno rešenje.

Sa druge strane, znamo da kada je θ malo, onda se $\sin \theta$ ponaša kao θ jer je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, i tada možemo da koristimo jednačinu linearnog harmonijskog oscilatora

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{L} \theta(t) = 0.$$

Njeno rešenje je oblika

$$\theta(t) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{L}} t \right),$$

gde c_1 i c_2 određujemo pomoću početnog položaja i početne brzine. Odatle takođe možemo i da dobijemo period oscilovanja $2\pi\sqrt{\frac{g}{L}}$, što ne možemo u slučaju nelinearnog harmonijskog oscilatora (u ovom slučaju period takođe varira u zavisnosti od amplitude). Gore navedeni postupak zovemo linearizacija, i daje nam dovoljno dobre rezultate ukoliko je posmatrana veličina dovoljno blizu stabilnog stanja, dakle kada je θ blizu nule. U nekim situacijama, radi veće preciznosti, funkciju možemo da aproksimiramo polinomom drugog ili višeg reda.

4.9.1 Aproksimacija linearnom funkcijom

Jednačina tangente na grafik funkcije f u tački $(x_0, f(x_0))$ je

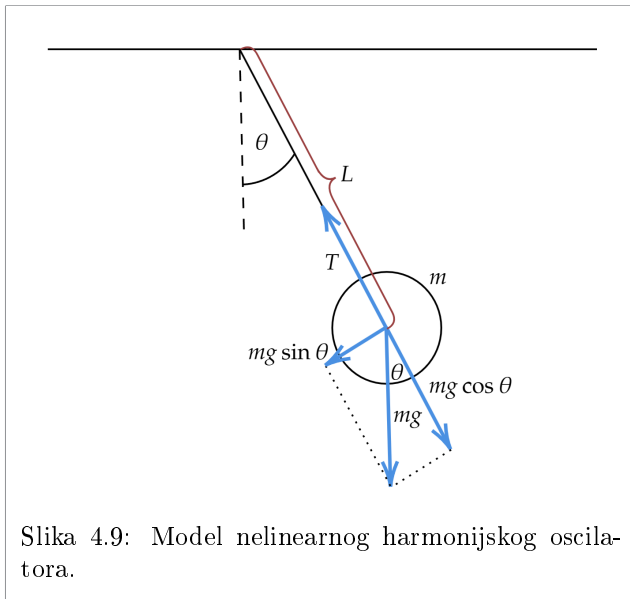
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

tj.

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0,$$

što je linearna funkcija po x . Linearna aproksimacija (tj. aproksimacija polinomom prvog stepena) funkcije f u okolini tačke x_0 se može dobiti pomoću linearne funkcije čiji je grafik *tangenta na grafik funkcije* f u $(x_0, f(x_0))$, što zapisujemo:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0.$$



Slika 4.9: Model nelinearnog harmonijskog oscilatora.

Primetimo da je linearna aproksimacija najbolja aproksimacija prvog reda, jer ima istu stopu promene kao $f(x)$ u x_0 .

Primer 4.49

Linearizujemo funkciju $f(x) = 4\sqrt{x+3}$ u okolini tačke $x_0 = 1$: Imamo

$$f(1) = 8, \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+3}}, \quad f'(1) = 1,$$

pa je linearna aproksimacija funkcije f u okolini tačke 1 data sa

$$f(x) \approx 8 + 1 \cdot (x - 1) = x + 7$$

tj. $4\sqrt{x+3} \approx x + 7$ za x u okolini tačke 1. Na primer, kada je $x = 0.98$, onda važi $4\sqrt{x+3} \approx 0.98 + 7 = 7.98$. Sa druge strane, za $x = 1.05$ važi $4\sqrt{x+3} \approx 1.05 + 7 = 8.05$.

4.9.2 Aproksimacija polinomom drugog ili višeg reda

Za bolju aproksimaciju od linearne možemo da koristimo i kvadratnu funkciju. Aproksimirajmo dakle funkciju $f(x)$ pomoću kvadratne funkcije $Q(x) = ax^2 + bx + c$ u okolini neke tačke x_0 (tj. aproksimiramo grafik funkcije f pomoću parabole umesto pomoću prave linije). Želimo da kvadratna aproksimacija Q funkcije f ima istu vrednost kao i f u x_0 , i da su prvi i drugi izvod od Q i f u tački x_0 jednaki:

- Iz $Q(x_0) = f(x_0)$ sledi $ax_0^2 + bx_0 + c = f(x_0)$;
- Iz $Q'(x_0) = f'(x_0)$ sledi $2ax_0 + b = f'(x_0)$;
- Iz $Q''(x_0) = f''(x_0)$ sledi $2a = f''(x_0)$.

Iz gore navedenih uslova, dobijamo da je $b = f'(x_0) - 2ax_0 = f'(x_0) - f''(x_0)x_0$, pa je $c = f(x_0) - ax_0^2 - bx_0 = f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 - f'(x_0)x_0$, odakle sledi

$$\begin{aligned} Q(x) &= \frac{1}{2}f''(x_0)x^2 + f'(x_0)x - f''(x_0)x_0x + f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)x_0^2 - f'(x_0)x_0 \\ &= \frac{1}{2}f''(x_0)(x^2 - 2x_0x + x_0^2) + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2. \end{aligned}$$

Ovaj postupak možemo da generalizujemo na bilo koji stepen:

Za aproksimaciju funkcije polinomom n -tog reda koristimo **Tejlorovu formulu**. Polinom

$$\begin{aligned} T_n[f; x_0](x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

naziva se **Tejlorov polinom** n -tog stepena za funkciju f u tački x_0 . Specijalno, za $x_0 = 0$ imamo **Maklorenov polinom** $T_n[f; 0](x) = M_n[f](x) = M_n(x)$.

Primetimo,

$$\left(T_n[f; x_0]\right)^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0), \quad \text{za svako } m \leq n,$$

tj. prvih n izvoda u tački x_0 funkcije f i njenog Tejlorovog polinoma je jednako.

Primer 4.50

Pronađimo prvo $T_4[f; 1](x)$ za funkciju $f(x) = xe^x$. Računamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x, & f''(x) &= e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x, \\ f'''(x) &= 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x, & f^{(4)}(x) &= 3e^x + e^x + xe^x = 4e^x + xe^x, \end{aligned}$$

pa je

$$f(1) = e, \quad f'(1) = 2e, \quad f''(1) = 3e, \quad f'''(1) = 4e, \quad f^{(4)}(1) = 5e.$$

Oдавde konačno imamo

$$T_4[f; 1](x) = e + 2e(x - 1) + \frac{3e}{2}(x - 1)^2 + \frac{4e}{6}(x - 1)^3 + \frac{5e}{24}(x - 1)^4.$$

Slično, važi

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 3, \quad f^{(4)}(0) = 4,$$

pa je Maklorenov polinom reda 4 za funkciju $f(x) = xe^x$ dat sa

$$M_4[f](x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4.$$

Kao u prethodnom primeru, možemo naći Tejlorov polinom za razne druge funkcije. Najčešće korišćeni Tejlorovi (tj. Maklorenovi) polinomi dati su ispod.

Tablica Maklorenovih polinoma:

1. $f(x) = e^x$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (e^x)^{(k)} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} e^x \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$$

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(k)} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^n x^k$$

3. $f(x) = (1+x)^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, x \in (-1, 1)$

$$M_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} ((1+x)^\alpha)^{(k)} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$$

4. $f(x) = \ln(1+x)$

$$M_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (\ln(1+x))^{(k)} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \Big|_{x=0} x^k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (-1)^{k-1} x^k$$

5. $f(x) = \sin x$

$$M_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

6. $f(x) = \cos x$

$$M_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

Kao što možemo da vidimo gore, Maklorenov polinom funkcije $\sin x$ sadrži samo neparne članove, a funkcija $\cos x$ sadrži samo parne članove, što nije slučajnost. Naime, izvod parne funkcije je neparna funkcija i obratno, što znači da za parnu funkciju f važi

$$f^{(k)}(0) = 0, \quad k \text{ je neparno,}$$

a za neparnu funkciju g važi

$$g^{(m)}(0) = 0, \quad m \text{ je parno.}$$

Dakle neparne funkcije u Maklorenovom polinomu sadrže samo neparne stepene, a parne funkcije samo parne.

4.9.3 Ocena greške Tejlorovog polinoma

Da bismo koristili Tejlorov polinom $T_n[f; x_0]$ umesto funkcije $f(x)$, potrebno je znati procenu izraza

$$R_n[f; x_0](x) = f(x) - T_n[f; x_0](x),$$

koji nazivamo ostatkom. Procenom ostatka zapravo ocenjujemo grešku aproksimacije $f(x) \approx T_n[f; x_0]$ u okolini tačke x_0 . Veći stepen Tejlorov polinoma ima manju grešku, i stoga predstavlja bolju aproksimaciju:

Teorema 4.51

Ako je funkcija f $(n+1)$ -puta diferencijabilna u nekoj okolini tačke x_0 , tada za svako x iz te okoline postoji $c \in (x_0, x)$ tako da

$$f(x) = T_n[f; x_0](x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Napomena 8. Ako je funkcija f polinom n -tog stepena, tada je $f(x) = T_n[f; x_0](x)$ i ostatak je jednak nuli.

Napomena 9. Tejlorov polinom je jedinstveno određen. Štaviše, od svih funkcija koje aproksimiraju datu funkciju f tako da se prvih n izvoda poklapa u tački x_0 , Tejlorov polinom je najbolja takva aproksimacija, tj. ima najmanju grešku!

Gore navedena teorema nam osigurava da kada $x \rightarrow x_0$, ostatak $R_n(x)$ teži ka nula brže od $(x - x_0)^n$. Štaviše, ukoliko funkcija ima i $n+1$ -ti izvod, onda možemo da kažemo više o ostatku:

Teorema 4.52

Ako postoji $M > 0$ tako da $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$, za sve $\xi \in (x_0, x)$, onda se ostatak može oceniti kao

$$|R_n[f; x_0](x)| = |f(x) - T_n[f; x_0](x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1}.$$

Primer 4.53

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \arctg(x)$. Želimo da izračunamo njen Tejlorov polinom 3. reda u okolini tačke $x = 0$ i izračunamo koliko se on razlikuje od $f(x)$ na intervalu $[-1, 1]$, tj. kolika je greška. Prvo tražimo izvode

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2}, & f''(x) &= -\frac{1}{(1+x^2)^2} (1+x^2)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \\ f'''(x) &= \left(-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}, & f^{(4)}(x) &= \left(\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} \right)' = \frac{-24x^3+24x}{(x^2+1)^4}, \end{aligned}$$

odakle imamo da je $f(0) = f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$ i $f'''(0) = -2$, pa dobijamo

$$T_3[f; 0](x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{12}.$$

Sada računamo koliko se ovaj polinom razlikuje od originalne funkcije na intervalu $[-1, 1]$ pomoću prethodne teoreme

$$|f(x) - T_3[f; 0](x)| \leq \frac{M}{4!}|x - 0|^4 = \frac{M}{24}|x|^4 \leq \frac{M}{24},$$

gde je $M > 0$ takvo da važi $|f^{(4)}(x)| \leq M$ za sve $x \in (-1, 1)$. Možemo lako oceniti

$$|(x^2 + 1)^4| \geq 1 \quad \text{i} \quad |-24x^3 + 24x| = 24|x||x^2 - 1| \leq 24 \quad \text{za } x \in (-1, 1),$$

odakle sledi

$$|f^{(4)}(x)| = \left| \frac{-24x^3 + 24x}{(x^2 + 1)^4} \right| \leq 24,$$

pa možemo izabrati $M = 24$. Konačno imamo

$$|f(x) - T_3[f; 0](x)| \leq \frac{M}{24} \leq 1.$$

Preciznijom ocenom funkcije $f^{(4)}(x)$ možemo dobiti i bolju ocenu greške. Na primer, koristeći pomoć računara, možemo videti da je $|f^{(4)}(x)| \leq 4.68$ na $(-1, 1)$, odakle dobijamo da je greška

$$|f(x) - T_3[f; 0](x)| \leq \frac{4.68}{24} = 0.195.$$

Tačna greška na intervalu $(-1, 1)$ se takođe može proveriti pomoću računara i ona iznosi približno 0.13.

4.10 Asimptotska notacija

4.10.1 Veliko “ $\mathcal{O}$ ”

Definicija 4.54

Ako za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ postoji konstanta $M > 0$ takva da je

$$|f(x)| \leq M|g(x)|, \quad \text{za } x \text{ u okolini tačke } x_0,$$

kažemo da je u okolini tačke x_0 funkcija f ograničena u odnosu na funkciju g i to simbolizujemo sa $f(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \rightarrow x_0$. Kažemo: $f(x)$ je **veliko $\mathcal{O}$** od $g(x)$ za x u okolini x_0 .

Teorema 4.55

Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty$, tada je $f(x) = \mathcal{O}(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Primer 4.56

Važi

$$\cos x - 1 = \mathcal{O}(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

što sledi iz tabličnog limesa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Koristeći veliko $\mathcal{O}$ možemo da zapišemo na sledeći način.

Tejlorova formula sa veliko $\mathcal{O}$ notacijom:

$$f(x) = T_n[f; x_0](x) + \mathcal{O}((x - x_0)^{n+1}), \quad x \rightarrow x_0.$$

Primer 4.57

Kada želimo da se zadržimo na kvadratnom članu razvoja na primeru funkcije $f(x) = e^x$ u Maklorenovoj formuli, to zapisujemo kao

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

$\mathcal{O}(x^3)$ označava članove reda 3 i više po x .

4.10.2 Malo “o”**Definicija 4.58**

Ako za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u okolini tačke x_0 važi

$$f(x) = \alpha(x)g(x), \text{ pri čemu } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0,$$

to zapisujemo sa $f(x) = o(g(x)), x \rightarrow x_0$. Kažemo: $f(x)$ je **malo o** od g za x u okolini x_0 .

Primer 4.59

Važi

$$\cos x - 1 = o(x), \quad x \rightarrow 0,$$

i

$$\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 = o(x^2), \quad x \rightarrow x_0.$$

Tejlorovu formulu možemo da zapišemo i pomoću malog o .

Tejlorova formula sa malo o notacijom:

$$f(x) = T_n[f; x_0](x) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Primer 4.60

Maklorenov polinom funkcije $\sin x$ reda $2n + 1$ je

$$M_{2n+1}[\sin x](x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dakle, koristeći malo o , $\sin x$ možemo zapisati kao

$$\sin x = M_{2n+1}[\sin x](x) + o(x^{2n+2}),$$

ili preko velikog $\mathcal{O}$

$$\sin x = M_{2n+1}[\sin x](x) + \mathcal{O}(x^{2n+3}).$$

4.10.3 Približno ponašanje “ $\sim$ ”**Definicija 4.61**

Ako za funkcije $f(x)$ i $g(x)$ u okolini tačke x_0 važi:

$$f(x) = \gamma(x)g(x), \text{ pri čemu je } \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 1,$$

kažemo da se funkcija $f(x)$ **ponaša kao** funkcija $g(x)$ kada $x \rightarrow x_0$ i pišemo

$$f(x) \sim g(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Teorema 4.62

$f(x) \sim g(x), x \rightarrow x_0$ ako i samo ako $f(x) = g(x) + o(g(x)), x \rightarrow x_0$.

Teorema 4.63

Ako je $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, tada $f(x) \sim g(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Primer 4.64

Iz tabličnih limesa zaključujemo da

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1, \quad x \rightarrow 0,$$

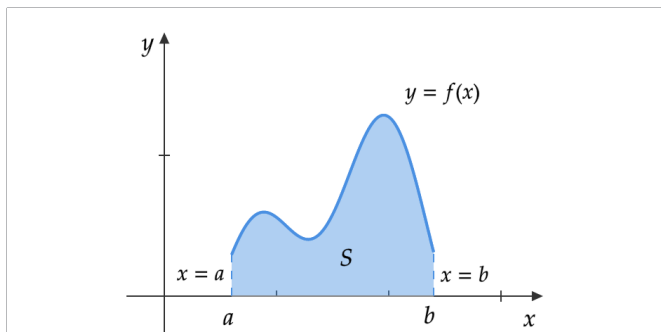
$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \quad x \rightarrow 0,$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \quad x \rightarrow 0,$$

$$a^x - 1 \sim (\ln a)x, \quad x \rightarrow 0.$$

5 | Integrali

Motivacija. Neka je f realna funkcija koja je neprekidna i nenegativna na intervalu $[a, b]$. Želimo da izračunamo površinu oblasti S ispod krive $y = f(x)$ i iznad x -ose na intervalu $[a, b]$ (kao što se može videti na slici pored) i to ćemo raditi pomoću pojma *integrala*.



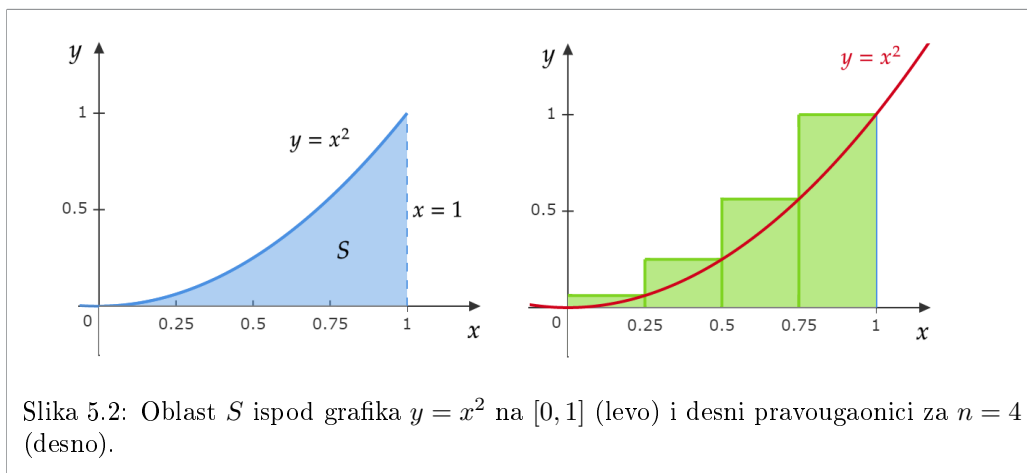
Slika 5.1: Oblast S ispod grafika $y = f(x)$

5.1 Određeni integral

Sada ćemo predstaviti glavnu ideju na jednom primeru.

Primer 5.1

Želimo da pomoću pravougaonika procenimo površinu oblasti ispod grafika funkcije $y = x^2$ na $[0, 1]$.



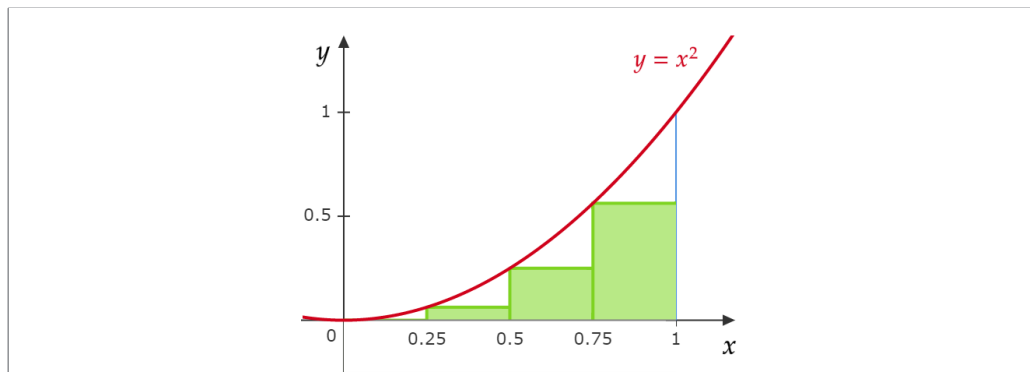
Slika 5.2: Oblast S ispod grafika $y = x^2$ na $[0, 1]$ (levo) i desni pravougaonici za $n = 4$ (desno).

Ukoliko to uradimo kao što je pokazano na grafiku 2 (izdelimo $[0, 1]$ na 4 jednaka dela i sabiramo površine pravougaonika čije su visine jednake vrednosti funkcije f u krajnjim tačkama podintervala) dobijamo

$$R_4 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 = \frac{15}{32}.$$

Na grafiku se jasno vidi da je ta površina S manja od R_4 . Sa druge strane, ako aproksimiramo površinu koristeći pravougaonike sa visinom jednakoј vrednosti funkcije u početnoj tački podintervala dobijamo

$$L_4 = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32}.$$



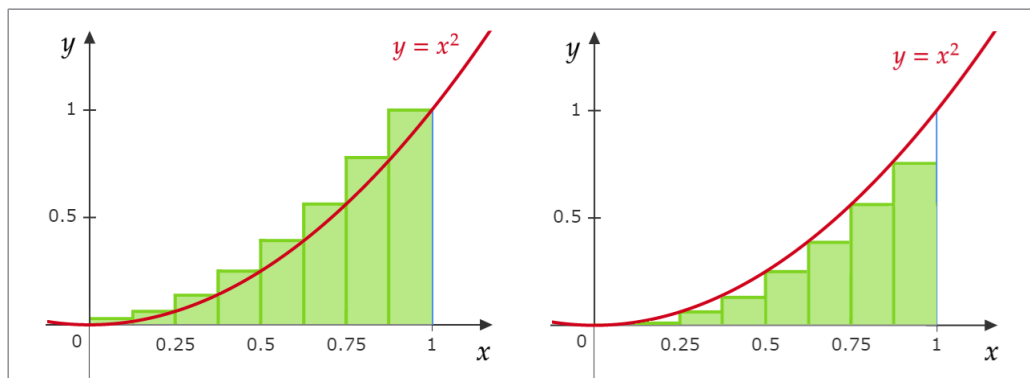
Slika 5.3: Aproksimacija levim pravougaonicima za $n = 4$.

Jasno, $S > L_4$, pa

$$0.21875 = \frac{7}{32} < S < \frac{15}{32} = 0.46875.$$

Ovu proceduru možemo da ponovimo deleći interval $[0, 1]$ na veći broj manjih podintervala. Deleći $[0, 1]$ na 8 jednakih podintervala, dobijamo bolju aproksimaciju za površinu S

$$0.2734 < S < 0.3984.$$



Slika 5.4: Desni i levi pravougaonici za $n = 8$.

Ako ovaj postupak nastavimo i sa svakom iteracijom povećamo broj podintervala n i dobijamo $S \approx 0.33333 \dots$. Pokažimo sada da je ta površina $\frac{1}{3}$. Neka je sa R_n označena suma površina n (desnih) pravougaonika sa dužinom jedne stranice $\frac{1-0}{n}$ i druge koja je

jednaka vrednosti funkcije $f(x) = x^2$ u krajnjoj tački podintervala

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(0 + i \cdot \frac{1}{n}\right)^2.$$

Želimo da pokažemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{3}.$$

Vidimo

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(0 + i \cdot \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Konačno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{1}{3}.$$

Isto bismo dobili kada bismo tražili

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n,$$

gde L_n predstavlja sumu površina n pravougaonika pri čemu se uzima početna tačka svakog podintervala (levi pravougaonici).

Dakle, da bismo pronašli površinu ispod grafika funkcije f na intervalu $[a, b]$ ideja je aproksimirati je pomoću pravougaonika: Interval $[a, b]$ na proizvoljan način delimo na n podintervala i površinu ispod grafika funkcije na svakom podintervalu aproksimiramo sa površinom pravougaonikom, pri čemu za visinu pravougaonika uzimamo $f(x_i^*)$, gde je x_i^* bilo koja tačka tog podintervala. Površine dobijenih pravougaonika saberemo da bismo dobili aproksimaciju tražene površine. Zatim puštamo da broj podintervala neograničeno raste ($n \rightarrow \infty$) i računamo graničnu vrednost sume. Na taj način dolazimo do definicije određenog integrala čija je geometrijska interpretacija upravo površina ispod grafika funkcije.

Definicija 5.2

Neka je data funkcija f definisana za $a \leq x \leq b$. Podelimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala dužine $\Delta x := \frac{b-a}{n}$ i označimo krajnje tačke tih intervala sa

$$x_0 = a, \quad x_k = a + k\Delta x, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad x_n = b.$$

Neka je x_i^* proizvoljna tačka iz $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. **Određeni integral funkcije f od a do b je dat sa**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

ako taj limes postoji i u tom slučaju kažemo da je f **(Riman) integrabilna na $[a, b]$** .

Napomena 10. 1. $\int_a^b f(x) dx$ je broj i ne zavisi od x ;

2. Suma $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$ u slučaju ekvidistantne podele ili $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ u slučaju neekvidistantne podele naziva se **Rimanova suma**.

Teorema 5.3

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$ ili ima najviše konačno mnogo prekida prve vrste, tada je f integrabilna na $[a, b]$, tj. određeni integral $\int_a^b f(x) dx$ postoji.

5.1.1 Fundamentalna teorema analize (Njutn-Lajbnicova formula)

Njutnov mentor u Kembridžu *Isaac Barrow* je uočio da su problem traženja izvoda i integrala usko povezani, tj. to su dva inverzna procesa. Kasnije su Njutn i Lajbnic samu ideju iskoristili da bi formulisali univerzalni matematički metod. Oni su uočili da nije neophodno računati limes sume kako bi se izračunao određeni integral.

Posmatramo funkciju

$$g(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

pri čemu je f neprekidna funkcija na $[a, b]$ i $x \in (a, b)$. Pretpostavimo sada da je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$. Tada $g(x)$ možemo interpretirati kao površinu oblasti ispod grafika funkcije f na intervalu $[a, x]$. Želimo da odredimo $g'(x)$. Primetimo da za $h > 0$, razlika $g(x+h) - g(x)$ predstavlja površinu ispod grafika funkcije f od x do $x+h$ (oduzimamo dve površine). Za malo h ta površina je približno jednaka površini pravougaonika sa stranicama h i $f(x)$, pa

$$g(x+h) - g(x) \approx hf(x).$$

Deljenjem sa h dobijamo

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \approx f(x).$$

Intuitivno, očekujemo da

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x). \quad (5.1)$$

Vezu između g i f imenujemo na sledeći način.

Definicija 5.4

Funkcija F je **primitivna funkcija** za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ na intervalu (a, b) ako važi $F'(x) = f(x)$ za svako $x \in (a, b)$.

Relacija dobijena u (5.1) važi čak i u uopštenijem slučaju kada f nije nenegativna i predstavlja jednu od najbitnijih rezultata analize koji povezuje izvod i integral.

Teorema 5.5 (Fundamentalna teorema analize)

Ako je f neprekidna na $[a, b]$, tada

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) \quad (5.2)$$

i

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (5.3)$$

pri čemu $F' = f$ i F je bilo koja primitivna funkcija za f .

Formula (5.3) naziva se *Njutn-Lajbnicova formula*.

Primer 5.6

Izračunajmo $\int_1^3 e^x dx$. Funkcija $f(x) = e^x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$ i njena primitivna funkcija je $F(x) = e^x + C$. Koristeći Njutn-Lajbnicovu formulu dobijamo

$$\int_1^3 e^x dx = F(3) - F(1) = e^3 - e.$$

5.2 Neodređeni integral

Iz (5.2) vidimo da je integral $\int_a^x f(t) dt$ primitivna funkcija za f . Zbog relacije između određenih integrala i primitivnih funkcija, notacija $\int f(x) dx$ se tradicionalno koristi za familiju primitivnih funkcija funkcije f i naziva se **neodređeni integral**. Tako da

$$\int f(x) dx = F(x) \quad \text{znači} \quad F'(x) = f(x).$$

Na primer,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{jer} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = x^n.$$

Komentar. Neophodno je napraviti razliku između određenih i neodređenih integrala. Naime, neodređeni integral je *funkcija*, dok je određeni integral *broj*.

Tablica integrala:

$\int k dx = kx + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, (a \neq 0)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0, a \neq 1)$	$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, (a \neq 0)$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, (x < a, a \neq 0)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	

Na osnovu osobina prvog izvoda lako se pokazuje da je integral linearna operacija. Preciznije, ako je $c \in \mathbb{R}$ i f i g su integrabilne funkcije, tada

$$\int (cf(x)) dx = c \int f(x) dx,$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

5.2.1 Metod smene

Posmatrajmo sada sledeći primer:

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx.$$

Ovaj integral nije tablični. Pokušajmo da ga rešimo tako što ćemo $1+x^2$ označiti sa u i zapišimo $du = (1+x^2)' dx = 2x dx$. Sada dobijamo

$$\int 2x\sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Proverimo da li ovaj metod funkcioniše. Zaista

$$\left(\frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C \right)' = 2x\sqrt{1+x^2},$$

odnosno dobijena familija funkcija jeste primitivna za podintegralni izraz. Ovaj metod zove se **metod smene** i funkcioniše kada god je početni integral oblika $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$. Imamo:

Metod smene: Ako je $u = g(x)$ diferencijabilna funkcija i f neprekidna, tada važi

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(g(x)) + C, \quad F' = f.$$

Zaista, kada uradimo izvod desne strane $F(g(x)) + C$, dobijamo podintegralnu funkciju (zbog pravila za izvod složene funkcije). Ako označimo $u = g(x)$ i $du = g'(x) dx$, formula postaje

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Primer 5.7

Izračunajmo $\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx$. Koristimo smenu

$$t = x^4 + 2.$$

Tada

$$dt = 4x^3 dx,$$

pa dobijamo

$$\int x^3 \cos(x^4 + 2) dx = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 2) + C$$

5.2.2 Parcijalna integracija

Pravilo koje odgovara pravilu množenja kod izvoda se naziva *metod parcijalne integracije*. Ako posmatramo izvod proizvoda

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

i integralimo ga po x , dobijamo

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx,$$

odakle izražavanjem drugog člana sa desne strane dobijamo:

Formula za parcijalnu integraciju:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx,$$

ili za $u = f(x)$ i $v = g(x)$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primer 5.8

Izračunajmo $\int x \sin x dx$. Prvo uzimamo

$$u = x, \quad dv = \sin x dx,$$

odakle imamo da je

$$du = dx, \quad v = -\cos x,$$

pa računamo

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Primer 5.9

Izračunajmo $\int x^2 e^x \, dx$. Primenjujemo parcijalnu integraciju dva puta, prvo uzimamo

$$u = x^2, \quad dv = e^x, \quad du = 2x \, dx, \quad v = e^x,$$

pa imamo

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx.$$

Slično, uzimamo

$$m = 2x, \quad dn = e^x \, dx, \quad dm = 2 \, dx, \quad n = e^x,$$

pa je

$$\int 2x e^x \, dx = 2x e^x - \int 2 e^x \, dx = 2x e^x - 2e^x + C.$$

Kombinovanjem gore navedenih izraza dobijamo

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C.$$

5.3 Osobine određenog integrala

Neka je $c \in \mathbb{R}$ i neka su f i g integrabilne. Tada

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \, dx &= - \int_b^a f(x) \, dx, & \int_a^a f(x) \, dx &= 0, \\ \int_a^b c \, dx &= c(b-a), \\ \int_a^b (f(x) \pm g(x)) \, dx &= \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx, \\ \int_a^b c f(x) \, dx &= c \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Sledeću osobinu nije lako pokazati u opštem slučaju

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Međutim, u slučaju $a < c < b$ i $f(x) \geq 0$, to se lako može videti kroz geometrijsku interpretaciju. Ova osobina je naročito korisna u slučajevima kada f ima konačno mnogo prekida prve vrste ili je po delovima definisana.

Primer 5.10

Želimo da izračunamo integral $\int_0^3 f(x) dx$, ako je

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x \leq 1 \\ x+1, & x > 1. \end{cases}$$

Imamo

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 2 dx + \int_1^3 (x+1) dx = 2x \Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_1^3 = 2 + \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 8.$$

Dalje, važi

1. Ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$, onda je $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. Ako $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, onda je $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.
3. Ako je $m \leq f(x) \leq M$ za $x \in [a, b]$, onda važi

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

5.3.1 Metod smene i parcijalne integracije kod određenog integrala

Primenom Njutn-Lajbnicove formule dobijamo:

Teorema 5.11 (Metod smene kod određenog integrala)

Neka je g' neprekidna na $[a, b]$ i f je neprekidna na skupu slika $u = g(x)$. Tada

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Primer 5.12

Izračunajmo $\int_0^4 2\sqrt{2x+1} dx$. Neka je $u = 2x+1$. Tada $du = 2 dx$, dok tačkama $x = 0$ i $x = 1$ odgovaraju redom $u = 1$ i $u = 9$, pa imamo

$$\int_0^4 2\sqrt{2x+1} dx = \int_1^9 \sqrt{u} du = \frac{u^{3/2}}{3/2} \Big|_1^9 = \frac{2}{3}(9\sqrt{9} - 1) = \frac{52}{3}.$$

U sledećoj teoremi koristimo metod smene sa bismo uprostiti izračunavanje integrala kod parnih i neparnih funkcija.

Teorema 5.13

Neka je f neprekidna na $[-a, a]$.

(a) Ako je f parna funkcija, onda je $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(b) Ako je f neparna funkcija, onda je $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Primer 5.14

Funkcija $f(x) = x$ je neparna pa važi

$$\int_{-a}^a x dx = 0,$$

a funkcija $f(x) = |x|$ je parna pa važi

$$\int_{-a}^a |x| dx = 2 \int_0^a |x| dx = 2 \int_0^a x dx = 2 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^a = a^2.$$

Parcijalnu integraciju koju smo primenjivali na neodređeni integral analogno primenjujemo i na određeni:

Teorema 5.15 (Metod parcijalne integracije kod određenog integrala)

Neka su funkcije f' i g' neprekidne. Tada

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Primer 5.16

Izračunajmo $\int_1^e \ln x dx$. Definišemo

$$u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx, dv = dx, v = x,$$

i onda imamo

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx = e - 0 - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$$

5.4 Primena određenih integrala

5.4.1 Površina oblasti između dve krive

Već smo rekli da ako je $f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$, onda je sa

$$\int_a^b f(x) dx$$

data površina oblasti ispod grafika funkcije f na intervalu $[a, b]$, a iznad x -ose.

Da li površinu možemo računati pomoću određenih integrala čak i kada je $f < 0$?

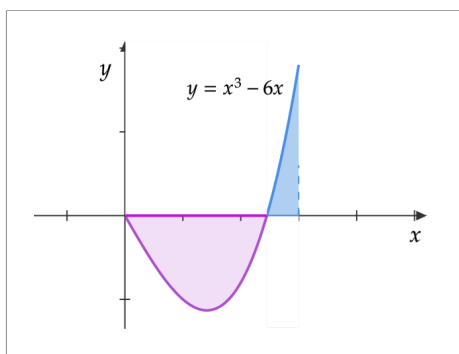
Primer 5.17

Da li se $\int_0^3 (x^3 - 6x) dx$ može interpretirati kao površina oblasti ispod grafika funkcije?

Rešenje: Imamo

$$I = \int_0^3 (x^3 - 6x) dx = \left(\frac{x^4}{4} - 3x^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{3^4}{4} - 3^3 = -\frac{27}{4} < 0.$$

Vidimo da je rešenje negativno pa ne može biti površina. Razlog leži u činjenici da za $x^* \in (0, \sqrt{6})$, $f(x^*) < 0$, gde je $f(x) = x^3 - 6x$. Vidimo da određeni integral I predstavlja razliku površina dveju oblasti, tj. I je površina oblasti ispod grafika funkcije na intervalu $(\sqrt{6}, 3)$ minus površina oblasti iznad grafika na intervalu $(0, \sqrt{6})$. Dakle, odgovor je ne.



Sličan rezon koristimo i kada želimo da izračunamo površinu oblasti između dve krive.

Površina oblasti S koja leži između dve krive $y = f(x)$, $y = \tau(x)$ i pravih $x = a$ i $x = b$, pri čemu su funkcije f i τ neprekidne i $f(x) \geq \tau(x)$ za sve $x \in [a, b]$ je

$$P(S) = \int_a^b (f(x) - \tau(x)) dx.$$

Primer 5.18

Odredimo površinu oblasti ograničene sa krivom $y = e^x$ sa gornje strane, pravom $y = x$

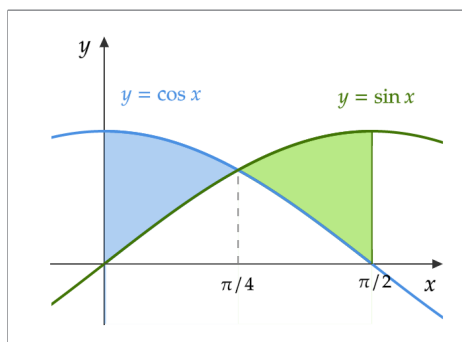
sa donje strane i pravama $x = 0$ i $x = 1$. Rešenje je

$$P = \int_0^1 (e^x - x) dx = e - \frac{3}{2}.$$

U sledećem primeru vidimo da ukoliko razlika funkcija menja znak, moramo biti pažljiviji:

Primer 5.19

Odredimo površinu oblasti ograničene krivama $y = \sin x$, $y = \cos x$ i pravama $x = 0$ i $x = \pi/2$. Kao što možemo videti na grafiku, krive $y = f(x) = \sin x$ i $y = g(x) = \cos x$ se seku u $x = \pi/4$, i funkcija $f(x) - g(x)$ menja znak u $\pi/4$. Da bismo odredili površinu oblasti pomoću određenog integrala, podelićemo $[0, \pi/2]$ na dva jednaka podintervala i računati površine odgovarajućih oblasti, a zatim ih sabrati:



$$\begin{aligned} P &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/4} - (\sin x + \cos x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 - (1 - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Na osnovu prethodnog zadatka možemo da zaključimo sledeće.

Površina oblasti S koja leži između dve krive $y = f(x)$, $y = g(x)$ i pravih $x = a$ i $x = b$ je

$$P(S) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

U nekim slučajevima je jednostavnije posmatrati oblast kod koje y tretiramo kao nezavisnu promenljivu (x je funkcija od y). Ako je oblast S ograničena krivama $x = f(y)$ i $x = g(y)$, i pravama $y = c$, $y = d$, pri čemu su f i g neprekidne i $f(y) \geq g(y)$ za $y \in [c, d]$ onda je površina te oblasti data kao $\int_c^d |f(y) - g(y)| dy$.

Primer 5.20

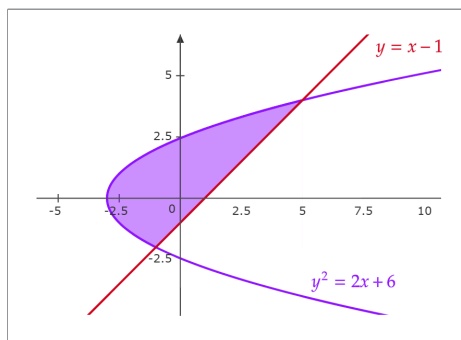
Odredimo površinu oblasti ograničene sa pravom $y = x - 1$ i parabolom $y^2 = 2x + 6$. Prvo, primetimo da se preseči grafika nalaze u tačkama (x, y) u kojima važi $y = x - 1$ i $y^2 = 2x + 6$, odakle imamo kvadratnu jednačinu

$$y^2 = 2x + 6 = 2y + 2 + 6 = 2y + 8$$

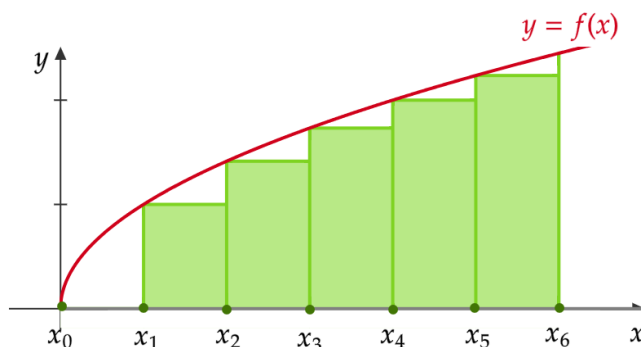
sa dva rešenja $y_1 = -2$ i $y_2 = 4$, dakle seku se u tačkama $(-1, -2)$ i $(5, 4)$.

To znači da ako y posmatramo kao nezavisnu promenjivu, onda površinu možemo izračunati kao integral razlike funkcija $x = y + 1$ i $x = \frac{y^2 - 6}{2}$ na intervalu $(-2, 4)$:

$$P = \int_{-2}^4 \left((y + 1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right) dy = 18.$$

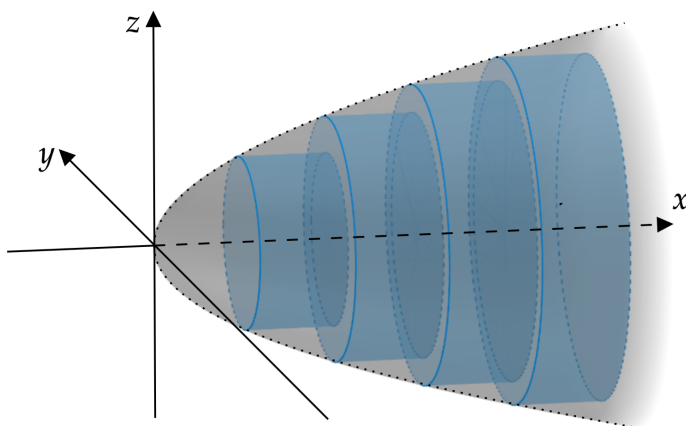
**5.4.2 Zapremina obrtnog tela oko x -ose**

Kada rotiramo pravougaonik oko x -ose, tj. kada rotiramo oblast $(a, b) \times (0, d)$, dobijamo valjak zapremine $V = d^2(b-a)\pi$. U slučaju kada rotiramo oblast ograničenu intervalom (a, b) i grafikom funkcije $f(x)$ oko x -ose, tada delimo oblast određenu pravama $x = a$, $x = b$, x -osom i grafikom funkcije $f(x)$ na pravougaonike (kao za standardni integral),



Slika 5.5: Funkcija i levi pravougaonici koje rotiramo oko x -ose.

zatim svaki pravougaonik rotiramo posebno i sumiramo zapreminu dobijenih valjaka.



Slika 5.6: Pravougaonici i funkcija zarotirani oko x -ose. Za jedan valjak, zapremina iznosi $(x_{i+1} - x_i)f(x_i)^2\pi = \Delta x f(x_i)^2\pi$.

Konačno, puštamo broj pravougaonika teži ka beskonačnosti. Preciznije, neka je dat interval $[a, b]$, neprekidna funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i ekvidistantna podela intervala $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, gde je $x_{i+1} - x_i = \Delta x$. Suma zapremina valjaka dobijenih rotacijom levih pravougaonika oko x -ose aproksimira pravu zapreminu (rotacionog) tela dobijenog rotacijom oblasti ispod grafa funkcije f oko x -ose:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \Delta x \pi.$$

Kada pustimo broj pravougaonika da ide u beskonačno, dobijamo zapreminu tela kao limes suma zapremina valjaka.

Zapremina tela dobijenog rotacijom oko x -ose:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)^2 \Delta x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

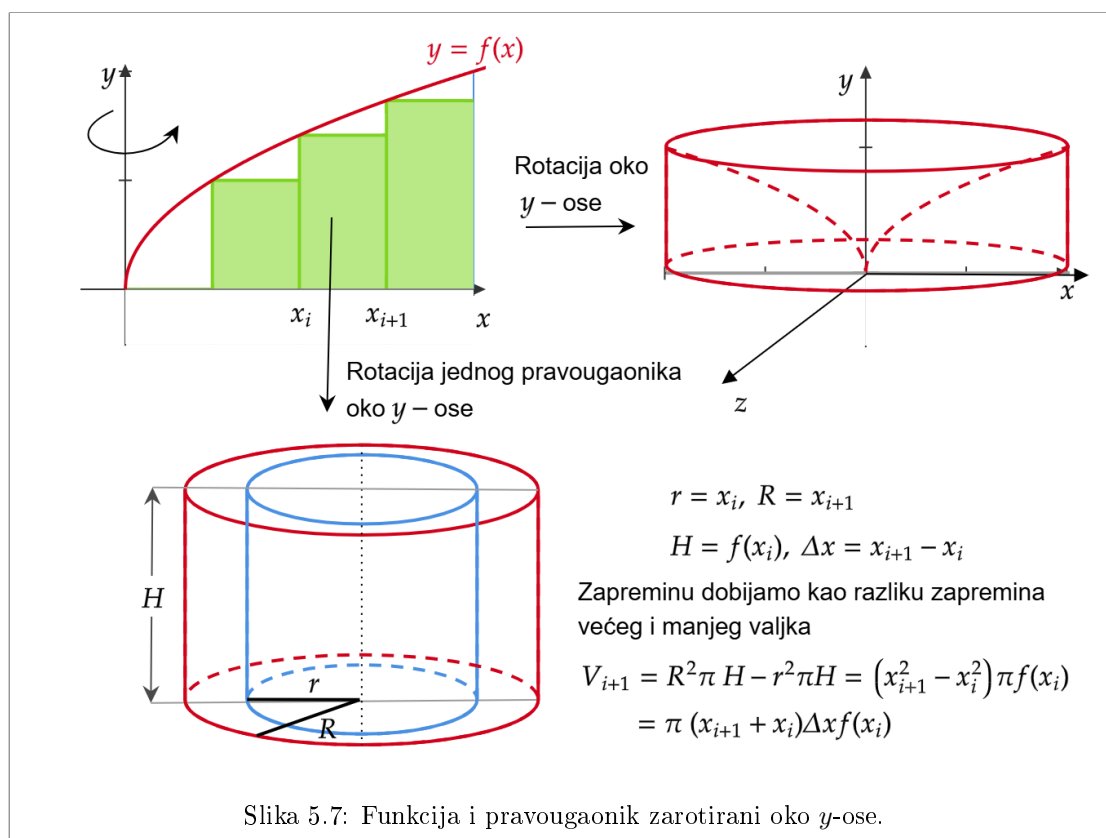
Primer 5.21

Izračunajmo zapreminu lopte poluprečnika $r > 0$. Kako lopta poluprečnika r nastaje rotiranjem (polu)kruga oko x -ose, a polukrug je opisan funkcijom $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ za $x \in [-r, r]$, njena zapremina je onda

$$V = \int_{-r}^r \pi (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

5.4.3 Zapremina obrtnog tela oko y -ose

Posmatramo telo S koje nastaje rotiranjem oblasti ograničene krivom $y = f(x)$, x -osom i pravama $x = a$, $x = b$, ovaj put oko y -ose. Ponovo delimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala $[x_i, x_{i+1}]$ dužine Δx , $i = 0, \dots, n-1$, gde je $x_0 = a$ i $x_n = b$. Ako rotiramo pravougaonik koji odgovara podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ oko y -ose dobijamo cilindrični omotač debljine $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ i visine $f(x_i)$.



Njegova zapremina je

$$V_{i+1} = \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2)f(x_i) = \pi x_i f(x_i)(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} + x_i) = 2\pi x_i f(x_i) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \Delta x.$$

gde je $\frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ tačka na sredini intervala $[x_i, x_{i+1}]$. Približna zapremina tela S je dobijena sabiranjem zapremina manjih cilindričnih omotača dobijenih rotiranjem pravougaonika oko y -ose:

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi f(x_i) \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \Delta x.$$

Puštanjem da $n \rightarrow \infty$ dobijamo zapreminu tela S :

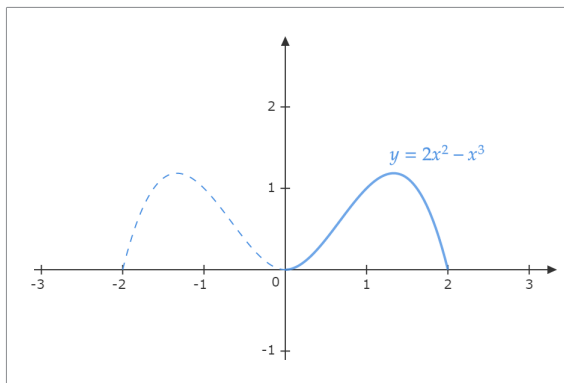
Zapremina tela dobijenog rotacijom oko y -ose:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sum_{i=1}^n \frac{x_{i+1} + x_i}{2} f(x_i) \Delta x = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

Primer 5.22

Zapremina tela koje nastaje rotiranjem oblasti ograničene krivom $y = 2x^2 - x^3$ i pravama $y = 0$ i $y = 2$ oko y -ose je

$$V = \int_0^2 2\pi x(2x^2 - x^3) dx = \frac{16}{5}\pi.$$



5.4.4 Teorema srednje vrednosti za integrale

Dato je konačno mnogo vrednosti $y_1, y_2, \dots, y_n$. Znamo da je njihova prosečna vrednost

$$y_{sr} = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}.$$

Međutim, kako da odrediti *prosečnu (srednju) vrednost funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$* ?

Delimo interval $[a, b]$ na n podintervala dužine $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, tj. $x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, x_2 = a + 2\Delta x, \dots, x_n = b$, i biramo proizvoljnu tačku $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ na svakom intervalu. Zatim računamo prosečnu vrednost brojeva $f(x_1^*), \dots, f(x_n^*)$,

$$\frac{f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x.$$

Puštanjem $n \rightarrow \infty$, dobijamo formulu za srednju vrednost funkcije f na $[a, b]$.

Srednja vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$f_{sr} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Za neprekidne funkcije važi da postoji tačka c iz $[a, b]$ takva da je vrednost funkcije u toj tački jednaka srednjoj vrednosti na $[a, b]$. O tome govori sledeća teorema.

Teorema 5.23 (Teorema srednje vrednosti za integrale)

Ako je funkcija f neprekidna na $[a, b]$, onda postoji $c \in [a, b]$ takvo da je

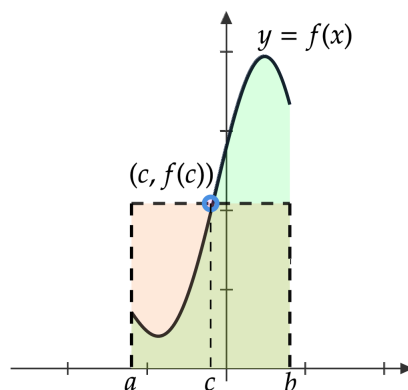
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

tj.

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Teorema o srednjoj vrednosti se može interpretirati na dva načina:

- *geometrijska interpretacija:* prosek neprekidne funkcije $f(x)$ na nekom intervalu (a, b) se dostiže u nekoj tački $c \in [a, b]$;
- *fizička interpretacija:* ako neprekidna funkcija $f(x)$ predstavlja gustinu materije na duži $[a, b]$, onda $\int_a^b f(x) dx$ predstavlja ukupnu masu i teorema govori da postoji tačka $c \in [a, b]$ u kojoj se prosečna gustina dostiže.



Slika 5.8: Površina pravougaonika $(b-a)f(c)$ jednaka je $\int_a^b f(x) dx$. Iako u ovom primeru ima tačno jedna takva tačka c , može ih biti i više.

Primer 5.24

Data je funkcija $f(x) = 1 + x^2$. Odredimo $c \in [-1, 2]$ takvo da je srednja vrednost funkcije f na $[-1, 2]$ jednaka $f(c)$. Pošto je f neprekidna, iz Teoreme srednje vrednosti sledi da postoji $c \in [a, b]$ takvo da

$$(2 - (-1))(1 + c^2) = \int_{-1}^2 (1 + x^2) dx = \left(x + \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_{-1}^2 = 6.$$

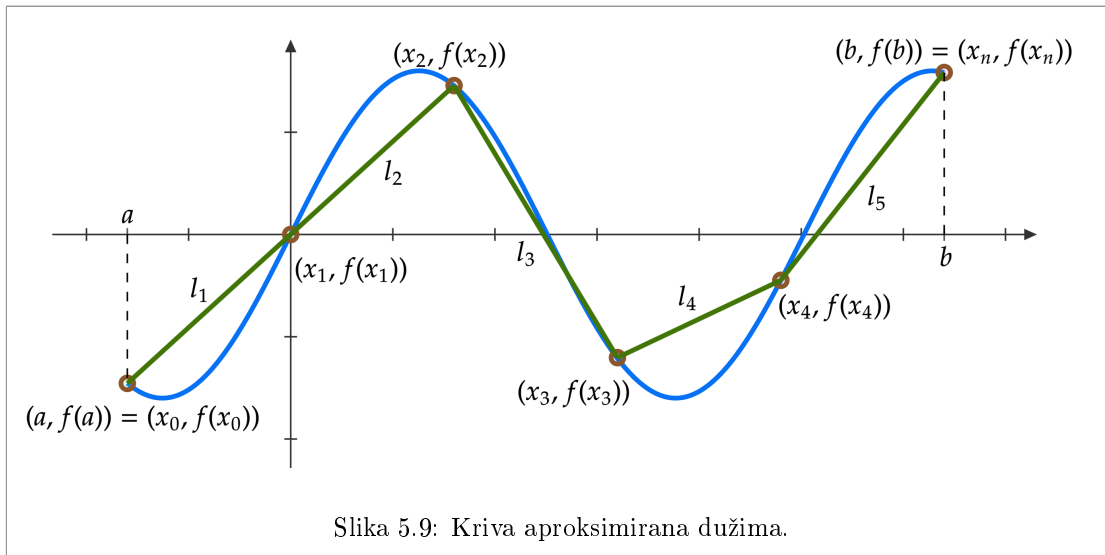
Dakle, $1 + c^2 = 2$, pa $c = \pm 1$.

5.4.5 Dužina luka krive

Želimo da izračunamo dužinu luka l krive $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$, pri čemu pretpostavljamo da je f diferencijabilna na $[a, b]$. Delimo interval $[a, b]$ na n podintervala $[x_{i-1}, x_i]$ $i = 1, \dots, n$. Zatim računamo dužinu duži l_i koja spaja tačke $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ i $(x_i, f(x_i))$ koristeći Pitagorinu

teoremu,

$$l_i^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2 = (\Delta x)^2 \left(1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \right)^2 \right).$$



Slika 5.9: Kriva aproksimirana dužima.

Približna dužina luka krive $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je dužina tako dobijene izlomljene linije

$$l \approx \sum_{i=1}^n l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} \right)^2} \Delta x.$$

Puštanjem da $n \rightarrow \infty$, dobijamo formulu za dužinu luka.

Dužina luka krive $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Primer 5.25

Izračunajmo dužinu luka krive $y = 3x^{2/3} - 10$ od tačke $A(8, 2)$ do $B(27, 17)$.

Važi $y' = 2x^{-1/3}$, pa dobijamo da je dužina luka jednaka

$$l = \int_8^{27} \sqrt{1 + (2x^{-1/3})^2} dx = \int_8^{27} \frac{\sqrt{4 + x^{2/3}}}{x^{1/3}} dx.$$

Posle smene $t = 4 + x^{2/3}$ dobijamo

$$l = \frac{3}{2} \int_8^{13} \sqrt{t} dt \approx 24.245.$$

5.5 Nesvojstveni integral

Pojam Rimanovog integrala je vezan za ograničene funkcije koje su definisane na ograničenom intervalu $[a, b]$. Zato je neophodno da proširimo pojam određenog integrala kako bismo mogli da obuhvatimo veću klasu funkcija.

Definicija 5.26

Neka je funkcija f definisana na $[a, \omega)$, $\omega \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ i integrabilna na svakom podintervalu $[a, b] \subset [a, \omega)$. Neka je dalje

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx, \quad b \in [a, \omega).$$

Granična vrednost $\lim_{b \rightarrow \omega^-} F(b)$ naziva se nesvojstveni integral funkcije f na $[a, \omega)$ i označava sa $\int_a^\omega f(x) dx$.

Ako ta granična vrednost postoji u $\mathbb{R}$, kažemo da nesvojstveni integral konvergira, a u suprotnom da divergira. Ukoliko je $w = \pm\infty$ ili f nije integrabilna na $[a, \omega]$, tačka ω se naziva tačka singulariteta nesvojstvenog integrala.

Analogno se definiše i $\int_\omega^a f(x) dx$, gde $\omega \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Primer 5.27

Želimo da odredimo tačke singulariteta i ispitamo konvergenciju sledećih nesvojstvenih integrala

$$(a) \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Rešenje: Tačka singulariteta je $\omega = +\infty$. Ako $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Ako je $\alpha = 1$, onda imamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Dakle, integral konvergira za sve $\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

$$(b) \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$$

Rešenje: Tačka singulariteta je $\omega = 0$. Ako $\alpha \neq 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^1 \right) = \lim_{b \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{b^{-\alpha+1}}{\alpha+1} \right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 \\ +\infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Ako je $\alpha = 1$, onda imamo

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow 0^+} (\ln 1 - \ln b) = +\infty.$$

Dakle, integral konvergira za sve $\alpha < 1$, a divergira za $\alpha \geq 1$.

Iz (a) i (b) zaključujemo da $\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$ uvek divergira.

6 | Linearna algebra

6.1 Matrice i determinante

Motivacija. Primena matrica je široko rasprostranjena u raznim oblastima: fizici, tehnici, IT industriji, hemiji. One se prirodno pojavljuju kada radimo sa algebarskim sistemima jednačina, vektorima i linearnim preslikavanjima vektora, sistemima običnih diferencijalnih jednačina, raznim numeričkim proračunima itd.

Definicija 6.1

Matrica tipa $n \times m$ je pravougaona tabela (šema) čiji su elementi a_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ poredani u n vrsta i m kolona i zapisuje se u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

U preseku i -te vrste i j -te kolone se nalazi element a_{ij} , tako da je možemo zapisati i kao $[a_{ij}]_{n \times m}$, gde $n \times m$ nazivamo redom matrice. Ovde je n broj vrsta, a m broj kolona.

Konvencija o notaciji. Najčešće matrice obeležavamo velikim slovom $A, B, C, \dots$ da bi ih razlikovali od realnih brojeva koje često obeležavamo malim slovima $a, b, c, \dots$

Primer 6.2

Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

je reda 2×3 , dakle ima dve vrste i tri kolone.

Definicija 6.3

Matrice $A = [a_{ij}]_{n_A \times m_A}$ i $B = [b_{ij}]_{n_B \times m_B}$ su jednake ako su im jednake dimenzije i svi elementi na istim pozicijama, tj.

$$n_A = n_B \text{ i } m_A = m_B, \quad a_{ij} = b_{ij} \text{ za sve } 1 \leq i \leq n_A \text{ i } 1 \leq j \leq m_A.$$

Sledeće matrice imaju poseban naziv zbog svog značaja i učestalog korišćenja:

- **Vektori** su matrice reda $n \times 1$ ili $1 \times m$, gde prve zovemo vektorima vrste, a druge vektorima kolone. Na primer:

$$\mathbf{x} = [1 \quad 2 \quad 4 \quad 11 \quad 0], \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 13 \\ 1 \end{bmatrix}$$

su vektor vrste i vektor kolone. Obično se koriste da bi se definisale koordinate tačke u višedimenzionalnom prostoru. Uobičajeno je da se vektori označavaju sa malim podebljanim slovom (npr. $\mathbf{v}$) ili malim slovom.

- **Kvadratna matrica** je matrica reda $n \times n$ za bilo koje $n \in \mathbb{N}$. Dva specijalna tipa kvadratnih matrica su jedinična i nula matrica reda $n \times n$, redom:

$$I_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad N_n := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- **Skalar** je matrica reda 1×1 .

6.1.1 Elementarne operacije sa matricama

Ovde uvodimo sledeće operacije sa matricama:

- **Sabiranje i oduzimanje.** Za date matrice $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ istog reda $n \times m$, definišemo

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1m} - b_{1m} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2m} - b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} - b_{n1} & a_{n2} - b_{n2} & \cdots & a_{nm} - b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \end{aligned}$$

Na primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 12 & 13 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+13 & 2-2 \\ 12-5 & 13+2 & -1+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 16 & 0 \\ 7 & 15 & 2 \end{bmatrix}$$

dok je

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 12 & 13 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 \\ -5 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-0 & 3-13 & 2-(-2) \\ 12-(-5) & 13-2 & -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & 4 \\ 17 & 11 & -4 \end{bmatrix}$$

Sabiranje matrica je asocijativna

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

i komutativna operacija

$$A + B = B + A.$$

- **Množenje matrica skalarom.** Za date matricu $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ i broj $\alpha \in \mathbb{R}$, definišemo

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \alpha a_{n2} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Na primer:

$$3 \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 21 \\ 6 & 3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Množenje matrica.** Za date matrice $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times p}$ (A ima isti broj kolona kao B vrsta), definišemo

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix}_{m \times p} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{kp} \\ \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{2k}b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{k1} & \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{nk}b_{kp} \end{bmatrix}_{n \times p} \end{aligned}$$

Na primer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 12 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 9 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \\ 12 \cdot 11 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 12 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 6 \cdot 9 & 12 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & 59 & 9 \\ 153 & 156 & 9 \end{bmatrix}.$$

Kako dimenzije moraju da se slažu da bi bilo moguće pomnožiti dve matrice, osim u slučaju kada su dve matrice kvadratne i istih dimenzija, proizvod BA ne postoji. Dakle, u opštem slučaju množenje matrica nije komutativna operacija, tj.

$$AB \neq BA.$$

Treba napomenuti da u slučaju množenja matrica jednakost $AB = 0$ ne implicira da $A = 0$ ili $B = 0$. Sa druge strane, množenje jeste asocijativna operacija, tj.

$$A(BC) = (AB)C.$$

6.1.2 Transponovana matrica

Za datu matricu A dimenzije $n \times m$, **transponovanu matricu** A^T dobijamo tako što zamenimo vrste i kolone:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n}.$$

Primer 6.4

Transponovana matrica matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

je

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times p}$, transponovanje matrica utiče na proizvod matrica na sledeći način:

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Primetimo da je transponovani vektor vrste $\mathbf{x}$ vektor kolone $\mathbf{x}^T$ i obratno,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Korišćenjem pravila za množenje matrica dobijamo da za n -dimenzionalni vektor vrste $\mathbf{x}$ važi

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}^T) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Naravno, važi $(A^T)^T = A$.

6.1.3 Pojam determinante

Determinanta kvadratne $n \times n$ matrice $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ je važna skalarna veličina koja se označava sa $\det A$ i zapisuje na sledeći način

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinanta je definisana za bilo koje $n \in \mathbb{N}$, ali nama će biti potrebne determinante za $n = 2, 3$ koje definišemo na sledeći način:

Pravilo računanja determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{matrix}$$

Determinanta skalara je isti taj skalar, dakle $\det c = c$, $c = \text{const}$.

SARUSOVO PRAVILO

Determinante trećeg reda se mogu izračunati i korišćenjem Sarusovog pravila. Postupak je sledeći:

1. Iza treće kolone polazne determinante dopisati prve dve kolone:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. Izmnožiti elemente na *silaznim* dijagonalama i sabrati dobijene rezultate, pa od toga oduzeti zbir proizvoda elemenata na *uzlaznim* dijagonalama,

$$\begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Primer 6.5

Izračunati determinantu matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

korišćenjem Sarusovog pravila.

Rešenje:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Dobijamo

$$\det B = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 3 + 0 + (-1) - 6 - 0 - 2 = -6.$$

6.1.4 Osobine determinanti

Sledeće osobine su korisne pri izračunavanju determinanti matrica.

1. Ako u determinanti zamenimo uloge vrsta i kolona (pritom ne menjajući njihov redosled), vrednost determinante ostaje ista

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Ako dve vrste (ili kolone) zamene mesta, determinanta menja znak

$$\begin{vmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad (\text{ovde su prva i druga kolona zamenjene});$$

3. Determinanta je jednaka nuli ako

- (a) su dve vrste ili kolone jednake

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 & 11 \\ 5 & 13 & 13 \\ 2 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ovde su druga i treća kolona jednake});$$

- (b) ako su elementi jedne njene vrste (ili kolone) proporcionalni odgovarajućim elementima druge vrste (ili kolone)

$$\begin{vmatrix} 3 & 11 & 12 \\ 6 & 22 & 24 \\ 2 & -8 & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ovde je druga vrsta jednaka prvoj vrsti pomnoženoj sa 2});$$

- (c) ako je jedna vrsta (ili kolona) jednaka linearnoj kombinaciji drugih vrsta (ili kolona)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{ovde je druga vrsta jednaka prvoj vrsti plus dva puta trećoj vrsti});$$

4. Determinanta se množi nekim brojem tako što se elementi jedne vrste (ili kolone) pomnože tim brojem

$$3 \begin{vmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 6 \\ 5 & 7 & -6 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} \quad (\text{elementi treće kolone su pomnoženi sa 3});$$

5. Vrednost determinante se ne menja ako jednu njenu vrstu (ili kolonu) dodamo nekoj drugoj vrsti (ili koloni) prethodno pomnoženu nekim brojem

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 9 & 18 & -25 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix} \quad (\text{ovde je treća vrsta pomnožena sa 4 i dodata drugoj vrsti});$$

6. Vrednost trougaone determinante (svi elementi ispod ili iznad glavne dijagonale su jednaki nuli) jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot (-7) = -42, \quad \begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) \cdot 3 = -21.$$

Gore navedene osobine determinanti se mogu kombinovati da se značajno olakša njihovo izračunavanje, jer se na primer datim transformacijama determinanta može svesti na trougaoni oblik, na oblik sa samo jednim ne-nula elementom u nekoj vrsti ili koloni, na oblik sa dve iste vrste ili kolone ukoliko se radi o determinanti jednakoj nuli, i slično.

Primer 6.6

Izračunati determinantu matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Množenjem prve vrste sa -1 i dodavanjem trećoj vrsti, zatim dodavanjem druge vrste trećoj i konačno zamenom prve i treće vrste dobijamo

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6.$$

6.1.5 Inverzna matrica

Prvo uvodimo sledeće pojmove:

Definicija 6.7

Za datu matricu $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, **minor** elementa a_{ij} se označava sa M_{ij} i to je determinanta reda $n - 1$ koja se dobija kada eliminišemo i -tu vrstu i j -tu kolonu iz $\det A$, dok se **kofaktor** elementa a_{ij} u oznaci α_{ij} računa kao

$$\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Primer 6.8

Uzmimo 3×3 matricu

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Računamo na primer sledeće minore

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 1 = 3,$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-11) \cdot 0 = 5,$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0 = 2,$$

dok su odgovarajući kofaktori onda

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3, \quad \alpha_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 5, \quad \alpha_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -2.$$

Deljenje matrica nije definisano, ali se za kvadratne matrice množenje matrice njenom inverznom matricom može poistovetiti sa množenjem broja recipročnom vrednošću.

Definicija 6.9

Za $n \times n$ matricu A , njena inverzna matrica A^{-1} , ako postoji, je takva da važi

$$A^{-1}A = I, \quad AA^{-1} = I,$$

pri čemu je sa I označena jedinična matrica reda n .

Inverzna matrica igra veliku ulogu u rešavanju algebarske jednačine oblika

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

jer množenjem jednačine sa leve strane sa matricom A^{-1} dobijamo

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b},$$

tj.

$$I\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Inverzna matrica za matricu A ne postoji uvek. Ako A nema inverznu matricu, ona se naziva *singularnom*, a ako ima ona je *nesingularna* ili *regularna*.

Definicija 6.10

Adjungovana matrica $\text{adj } A$ za matricu A je transponovana matrica matrice čiji su elementi kofaktori matrice A ,

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Inverzna matrica matrice A se izračunava na sledeći način:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A.$$

Vidimo inverzna matrica A^{-1} postoji ako je $\det A \neq 0$. Znači, matrica A je singularna ako je $\det A = 0$.

Primer 6.11

Izračunati inverznu matricu matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: Već smo izračunali u Primeru 6.6 da je $\det B = -6$. Dakle, matrica B je regularna i B^{-1} postoji. Da bismo izračunali inverznu matricu, potrebno je da izračunamo adjungovanu matricu:

$$\begin{aligned} M_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, & M_{12} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, & M_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7, \\ M_{21} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, & M_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & M_{23} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \\ M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3, & M_{32} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, & M_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \end{aligned}$$

dok su onda odgovarajući kofaktori

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = 3, & \alpha_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = -1, & \alpha_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = -7, \\ \alpha_{21} &= (-1)^{2+1} M_{21} = -3, & \alpha_{22} &= (-1)^{2+2} M_{22} = -1, & \alpha_{23} &= (-1)^{2+3} M_{23} = 5, \\ \alpha_{31} &= (-1)^{3+1} M_{31} = -3, & \alpha_{32} &= (-1)^{3+2} M_{32} = 1, & \alpha_{33} &= (-1)^{3+3} M_{33} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, adjungovana matrica je

$$\text{adj } B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -7 \\ -3 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix},$$

pa dobijamo

$$B^{-} = \frac{\text{adj } B}{\det B} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -7 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.2 Sistemi linearnih jednačina

Posmatramo sistem od n linearnih jednačina sa n promenljivih $x_1, \dots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Sistem (6.1) se može zapisati u matricnoj formi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Sistem linearnih jednačina može biti:

- *Odreden* ako ima tačno jedno rešenje.
Ako je determinanta sistema $D = \det A \neq 0$, sistem je određen.
- *Neodreden* ako ima beskonačno mnogo rešenja.
- *Nemoguć* ako nema rešenja.

Sistem (6.1) je homogen ako $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$. Homogen sistem ima bar jedno trivijalno rešenje

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

6.2.1 Gausova metoda eliminacije

Sistem linearnih jednačina se može rešiti Gausovom metodom eliminacije i to svođenjem sistema na trougaonu formu korišćenjem *elementarnih transformacija*:

(T1) Zamena mesta dvema jednačinama.

(T2) Množenje jedne jednačine brojem različitim od 0.

(T3) Zamena jednačine jednačinom kojoj je dodata neka druga jednačina pomnožena brojem različitim od nule.

Primer 6.12

Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}-x + 3y - 2z &= -8 \\ x - 4y + z &= 12 \\ -5x + 4y - 3z &= -14.\end{aligned}$$

Rešenje: Prvo koristimo osobinu (T3) tako što množimo drugu jednačinu sa 5 i dodajemo trećoj

$$\begin{aligned}-x + 3y - 2z &= -8 \\ x - 4y + z &= 12 \\ 0x - 16y + 2z &= 46.\end{aligned}$$

Onda opet primenjujemo (T3) tako što dodajemo drugu jednačinu prvoj

$$\begin{aligned}0x - y - z &= 4 \\ x - 4y + z &= 12 \\ 0x - 16y + 2z &= 46,\end{aligned}$$

pa prvu množimo sa 2 i dodajemo trećoj

$$\begin{aligned}0x - y - z &= 4 \\ x - 4y + z &= 12 \\ 0x - 18y + 0z &= 54.\end{aligned}$$

Konačno, koristeći (T2), treću jednačinu delimo sa -18 , i zamenjujemo mesta prvoj i trećoj, pa onda drugoj i trećoj da bismo dobili sistem u trouganoj formi

$$\begin{aligned}y &= -3, \\ -y - z &= 4, \\ x - 4y + z &= 12\end{aligned}$$

Iz druge jednačine direktno dobijamo da je $z = -y - 4 = -1$ pa iz treće sledi $x = 12 + 4y - z = 1$.

Primer 6.13

Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}2y - 2z &= -4 \\ x + y - 2z &= 0 \\ -3x - 9y + 12z &= 1.\end{aligned}$$

Rešenje: Zamenom prve i druge jednačine, množenjem prve jednačine sa 3 i dodavanjem trećoj i konačno množenjem druge jednačine sa 3 i dodavanjem trećoj dobijamo $0 = -11$ što znači da je sistem nemoguć, tj. sistem nema rešenje.

Primer 6.14

Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} -x + 3y - 5z &= 1 \\ 2x - y + 2z &= -2 \\ 3x + y - z &= -3. \end{aligned}$$

Rešenje: Množenjem prve jednačine sa 2 i dodavanjem drugoj, a zatim množenjem prve jednačine sa 3 i dodavanjem trećoj dobijamo

$$\begin{aligned} -x + 3y - 5z &= 1 \\ 5y - 8z &= 0 \\ 10y - 16z &= 0. \end{aligned}$$

Deljenjem treće jednačine sa 2, dobijamo drugu jednačinu. To znači da nije moguće naći jedinstveno rešenje, tj. sistem je neodređen. Uzimanjem $z = b \in \mathbb{R}$, iz druge jednačine dobijamo $y = \frac{8}{5}b$, a iz prve jednačine dobijamo

$$x = 3y - 5z - 1 = \left(\frac{24}{5} - 5\right)b - 1 = -\frac{1}{5}b - 1.$$

Dakle, ovaj sistem ima beskonačno mnogo rešenja koja pripadaju skupu

$$\mathcal{S} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -\frac{1}{5}b - 1, y = \frac{8}{5}b, z = b, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.2.2 Kramerovo pravilo

Kramerovo pravilo je još jedna metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina (6.1). Neka je sa D i dalje označena determinanta sistema. Dalje, označimo sa D_{x_k} determinantu koju dobijamo od D zamenom k -te kolone sa vektorom $\mathbf{b}$, $k = 1, \dots, n$.

- Ako je $D \neq 0$ onda je sistem određen i rešenje je dato sa

$$x_k = \frac{D_{x_k}}{D}, \quad k = 1, \dots, n.$$

- Ako je $D = 0$ i postoji bar neko $k \in \{1, \dots, n\}$ takvo da $D_{x_k} \neq 0$, onda je sistem nemoguć.
- Ako je $D = 0$ i $D_{x_k} = 0$ za svako $k = 1, \dots, n$, onda ne možemo ništa zaključiti. Moramo koristiti neku drugu metodu za rešavanje sistema (npr. Gausov metod eliminacije).

Primer 6.15

Rešiti sistem jednačina Kramerovim pravilom:

$$x + y + z = 2$$

$$x - y = 3$$

$$x + z = 4$$

Rešenje: Imamo

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -3.$$

Dakle, sistem je određen i rešenje je jedinstveno

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = -2, \quad z = \frac{D_z}{D} = 3.$$

Primer 6.16

Rešiti sistem jednačina

$$-x + 3y - 5z = 1$$

$$2x - y + 2z = -2$$

$$3x + y - z = -3.$$

Rešenje: Važi $D = D_x = D_y = D_z = 0$, pa koristeći Kramerovo pravilo ne možemo ništa zaključiti. Međutim, u Primeru 6.14 smo koristeći Gausovu metodu eliminacije dobili da sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}b - 1, \frac{8}{5}b, b \right), \quad b \in \mathbb{R}.$$

6.2.3 Karakteristični koreni i vektori

U analizi dinamičkih sistema se često susrećemo sa sistemima linearnih jednačina sledećeg oblika:

Karakteristični problem: Pronaći λ i odgovarajući vektor $\mathbf{x}$ koji zadovoljavaju dati sistem:

$$\lambda \mathbf{x} = A\mathbf{x}, \quad (6.2)$$

gde se vrednosti λ nazivaju **karakteristični koreni** (ili sopstvene vrednosti) matrice A , a vektori $\mathbf{x}$ **karakteristični vektori** (ili sopstveni vektori) matrice A .

Sistem (6.2) možemo zapisati na sledeći način

$$\lambda \mathbf{x} - A\mathbf{x} = (\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

pri čemu $\mathbf{0}$ predstavlja nula vektor kolona. Dati sistem je homogen pa netrivialno rešenje postoji samo ako je

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (6.4)$$

Zaista, vektor $\mathbf{0}$ je uvek trivialno rešenje jednačine (6.3), a ako je $\det(\lambda I - A) \neq 0$, onda je ovo rešenje jedinstveno, a samim time i jedino. Dakle, uslov (6.4) osigurava da postoje druga rešenja. Polinom n -tog stepena po λ definisan kao $f_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$ se naziva **karakteristični polinom matrice A** , a jednačina (6.4) **karakteristična jednačina** koja se može zapisati kao $f_A(\lambda) = 0$. Dakle, karakteristični koreni matrice A (ima ih n koji nisu nužno različiti) su nule karakterističog polinoma $f_A(\lambda)$.

Primer 6.17

Odrediti karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

a zatim i njene karakteristične korene i vektore.

Rešenje: Karakteristični polinom je

$$f_A(\lambda) := \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 \\ -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Karakteristični koreni zadovoljavaju jednačinu $f_A(\lambda) = 0$ pa imamo

$$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 1.$$

Karakteristični vektor koji odgovara λ_1 dobijamo zamenom λ_1 u početnu jednačinu, tj. rešavanjem sistema

$$(\lambda_1 I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

po $\mathbf{x}$. Dakle, rešavamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

što se svodi na

$$\begin{aligned}x_1 - 4x_2 &= 0, \\ -x_1 + 4x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Dobijamo $x_1 = 4x_2$ što znači da rešenje nije jedinstveno. Bilo koji vektor čije komponente zadovoljavaju $x_1 = 4x_2$ je karakteristični vektor koji odgovara $\lambda_1 = 6$. Na primer, možemo uzeti $x_2 = 1$ i dobijamo

$$r_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Na isti način dobijamo da za karakteristični vektor koji odgovara $\lambda_2 = 1$ važi $x_1 = -x_2$, pa ako uzmemo $x_1 = 1$ dobijamo

$$r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Napomena 11. Karakteristični vektori definisani gore se dobijaju kao rešenje matrične jednačine

$$(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

i predstavljaju vektore kolona. Ponekad je bitno naznačiti da su to desni karakteristični vektori (množe matricu $\lambda I - A$ sa desne strane), jer na sličan način možemo definisati i leve karakteristične vektore. Naime, levi karakteristični vektori su vektori vrsta i množe matricu $\lambda I - A$ sa leve strane, tj. rešenje su matrične jednačine

$$\mathbf{x}(\lambda I - A) = \mathbf{0},$$

pri čemu je nula vektor $\mathbf{0}$ u ovom slučaju takođe vektor vrsta.

Napomena 12. Karakteristični koreni i vektori imaju veliku primenu u gotovo svim granama matematike i fizike (koriste se u mašinskom učenju, analizi dinamičkih sistema i rešenja parcijalnih diferencijalnih jednačina, stohastičkoj analizi, itd.) Pomoću njih moguće je na mnogo lakši način od standardnog množenja matrica izračunati matricu A^n , za veliko n , koristeći tzv. spektralnu dekompoziciju matrice A .

Teorema 6.18 (Kejli-Hamiltonova teorema)

Neka je $f_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ karakteristični polinom koji odgovara matrici A . Tada važi $f_A(A) = 0$.

Primer 6.19

Za matricu A iz Primera 6.17, imamo da je $f_A(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$, pa iz Kejli-Hamiltonove teoreme sledi

$$A^2 - 7A + 6I = 0.$$

Kejli-Hamiltonova teorema nam daje još jedan način za pronalaženje inverzne matrice A^{-1} . Množenjem gornje jednačine sa A^{-1} dobijamo

$$A - 7I_2 + 6A^{-1} = 0,$$

pa sledi

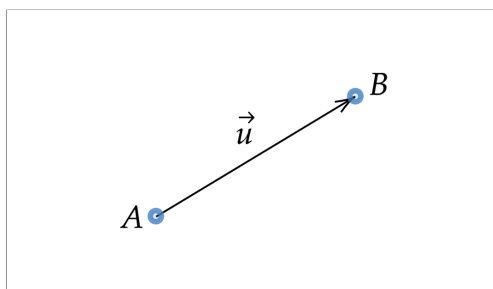
$$A^{-1} = \frac{7}{6}I_2 - \frac{1}{6}A = \frac{7}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

7 | Vektorska algebra

Motivacija. (Geometrijski) vektori su orijentisane duži i koriste se kako bi predstavili veličinu koja ima *dimenziju*, *intenzitet*, *pravac* i *smer*. To na primer može biti sila, deformacija, brzina i mnoge druge veličine.

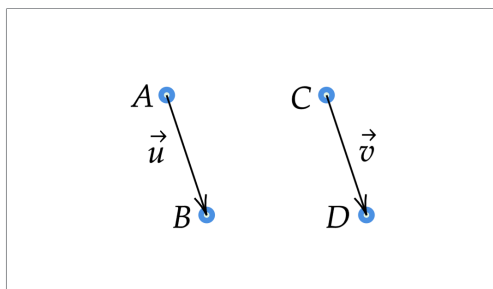
Da bi pojam vektora bio konzistentan sa svojom fizičkom interpretacijom, posmatramo primer kretanja čestice.

Čestica prelazi put od tačke A do tačke B . To predstavljamo vektorom $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Pređeni put jednak je dužini duži AB što pišemo $|\overrightarrow{AB}|$ i zovemo ga **intenzitet vektora** $\overrightarrow{AB}$.



Kada dve čestice pređu put sa istim pravcem, smerom i intenzitetom, onda im je pređeni put isti. Zato, kada dva vektora imaju isti pravac, smer i intenzitet, njih zovemo **ekvivalentnim vektorima** i poistovećujemo ih

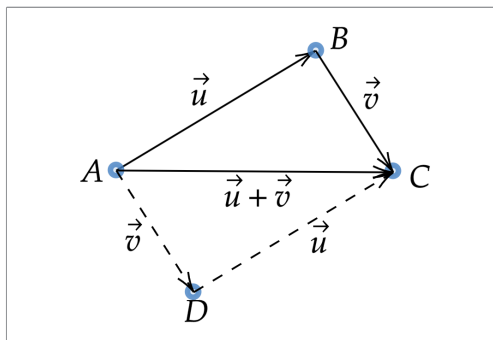
$$\vec{u} = \vec{v}.$$



Kada čestica pređe put od tačke A do tačke B , pa onda od tačke B do tačke C , ona je onda prešla put od tačke A do tačke C i stoga definišemo **zbir vektora** na sledeći način:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Proširivanje tačkom D do paralelograma $ABCD$ nam olakšava da zapamtimo sabiranje vektora preko **pravila paralelograma**.



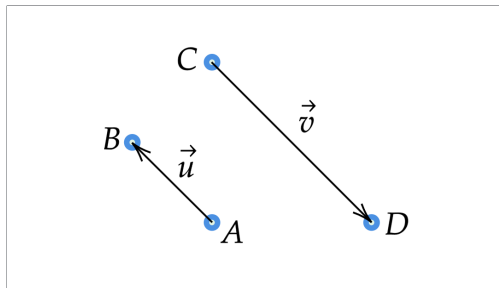
Vektore možemo množiti skalarom, preciznije:

Ako je $c \in \mathbb{R}$ skalar i $\vec{v}$ je vektor, onda je **proizvod vektora sa skalarom** $c\vec{v}$ vektor čiji je intenzitet jednak $|c|$ puta intenzitet vektora $\vec{v}$, pravac isti kao pravac vektora, dok smer zavisi od vrednosti skalara c i može biti isti ako $c > 0$ ili suprotan ako $c < 0$.

Kada je prava koja prolazi kroz tačke A i B paralelna sa pravom koja prolazi kroz tačke C i D (pod uslovom $A \neq B$ i $C \neq D$), onda su vektori $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ **paralelni** i to pišemo

$$\vec{u} \parallel \vec{v}.$$

Vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$ su paralelni ako i samo ako postoji $c \neq 0$ takvo da je $\vec{u} = c\vec{v}$.



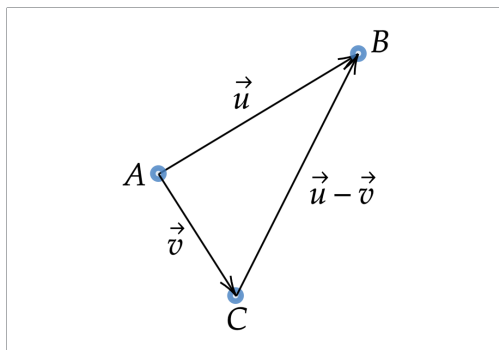
Množenje sa -1 daje vektor istog intenziteta i pravca, ali suprotnog smera, tj.

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

To nam dozvoljava i da oduzimamo vektore:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB},$$

što predstavljamo **pravilom trougla**.



7.1 Predstavljanje vektora u Dekartovom koordinatnom sistemu

Da bismo konstruisali koordinatni sistem, biramo fiksnu tačku O u prostoru koja se naziva koordinatni početak i kroz nju povlačimo 3 prave koje su normalne jedna na drugu. Te prave se nazivaju koordinatne ose i označavaju se sa x, y, z -osa. Obično x - i y -osu vidimo kao horizontalne, a z -osu kao vertikalnu, dok se pravac z -ose određuje korišćenjem pravila desne ruke. Tri koordinatne ose određuju 3 koordinatne ravni xy -ravan, yz -ravan i xz -ravan. Ovako zadati koordinatni sistem naziva se Dekartov pravougaoni koordinatni sistem. Pomoću njega definišemo koordinate (a, b, c) za svaku proizvoljnu tačku P u prostoru, gde a (x -koordinata) predstavlja udaljenost tačke od yz -ravni, b (y -koordinata) udaljenost tačke od xz -ravni, a c (z -koordinata) udaljenost tačke od xy -ravni. Primetimo da se koordinatni početak O nalazi u preseku te tri ravni, pa su njegove koordinate $(0, 0, 0)$. Na ovaj način smo uspostavili vezu između tačaka u prostoru P i uređenih trojki $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i često ćemo obeležavati tačke kao $P(a, b, c)$.

Korišćenjem Pitagorine teoreme dobijamo formulu za rastojanje tačke P od koordinatnog početka O

$$|OP| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

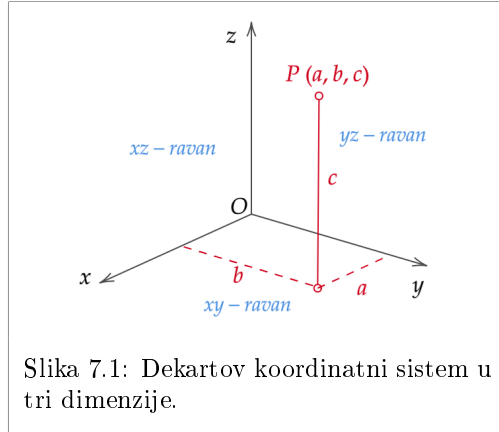
a na sličan način računamo rastojanje između dve tačke $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Da bismo vektore predstavili u Dekartovom koordinatnom sistemu, primetimo da za svaki vektor $\vec{u}$ možemo izabrati jedinstvenu tačku $A(a_1, a_2, a_3)$ tako da važi $\vec{u} = \vec{OA}$.

Ovo nam omogućava da posmatramo samo vektore koji počinju iz koordinatnog početka. Stoga ćemo obeležavati vektore na sledeći način:

$$\vec{OA} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle.$$



Slika 7.1: Dekartov koordinatni sistem u tri dimenzije.

Zapisivanje vektora na ovaj način omogućava da povežemo vektore sa brojevima i na taj način uvedemo sve potrebne operacije, tj. **vektorsku algebru**.

Neka su sada date tačke $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$. Korišćenjem pravila paralelograma dobijamo

$$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB},$$

pa sledi

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \langle b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3 \rangle.$$

Intenzitet vektora $\vec{AB}$ onda dobijamo korišćenjem formule za rastojanje između tačke $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ i tačke O :

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}.$$

Sabiranje, oduzimanje i množenje vektora skalarom se vrši po komponentama. Neka su data dva vektora

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle, \quad \vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

i skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada

$$\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle,$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle,$$

$$\alpha \vec{a} = \langle \alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3 \rangle.$$

Komentar. Geometrijski vektori $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se takođe često mogu poistovetiti sa matričnim vektorima, iako fundamentalno predstavljaju različite koncepte. Takođe, operacije koje ćemo uvesti za geometrijske vektore se mogu predstaviti i preko matrica.

Navedimo sada osobine vektora.

Neka su dati vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ i skalari α i β . Važe sledeći **vektorski identiteti**:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} & \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \\ \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a} & \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0} \\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} & (\alpha + \beta)\vec{a} &= \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\ (\alpha\beta)\vec{a} &= \alpha(\beta\vec{a}) & 1\vec{a} &= \vec{a}\end{aligned}$$

Često ćemo koristiti tri **vektora standardne baze** ili **orta**

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle, \quad \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle,$$

čiji su intenziteti 1, a pravci i smerovi se poklapaju sa pravcima i smerovima koordinatnih osa (x -, y - i z -ose redom). Svaki vektor $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ se može predstaviti kao linearna kombinacija vektora standardne baze

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}.$$

Jedinični vektor je vektor čiji je intenzitet jednak 1. To su na primer vektori standardne baze. Za vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$, njemu odgovarajući jedinični vektor koji ima isti pravac i smer kao i $\vec{a}$ je

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|},$$

što se lako proverava

$$|\vec{u}| = \left| \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \right| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1.$$

Primer 7.1

Odredimo jedinični vektor čiji pravac i smer je isti kao $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Prvo, intenzitet vektora

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} = \langle 3, 2, -1 \rangle$$

je

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14},$$

pa je njemu odgovaraju jedinični vektor dat sa

$$\vec{u} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{14}} \langle 3, 2, -1 \rangle.$$

7.2 Skalarni proizvod

Definicija 7.2

Data su dva vektora $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. **Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$** se označava sa $\vec{a} \cdot \vec{b}$ i dat je sa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Osobine skalarnog proizvoda. Dati su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ iz V_n i skalar α . Važi

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} & (\alpha \vec{a}) \cdot \vec{b} &= \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{b}) \\ \vec{0} \cdot \vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

Napomena 13. Skalarnom proizvodu dva vektora u matricnom smislu odgovara proizvod vektora: Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva vektora vrsta, onda je proizvod

$$\mathbf{a}(\mathbf{b}^T) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

jednak skalarnom proizvodu vektora $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$. Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dati kao vektori kolona, onda posmatramo proizvod $\mathbf{a}^T \mathbf{b}$.

Teorema 7.3

Neka je $\theta \in [0, \pi]$ ugao koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada važi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

Primer 7.4

Dati su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$. Odrediti skalarni proizvod $\vec{a} \cdot \vec{b}$, a zatim i ugao koji obrazuju ta dva vektora.

Rešenje: Skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je jednak

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 11.$$

Intenziteti dva vektora su

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} = 5.$$

Iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

sledi

$$11 = 15 \cos \theta,$$

pa dobijamo

$$\cos \theta = \frac{11}{15}.$$

Dakle, $\theta = \arccos \frac{11}{15}$.

Iz prethodnog primera vidimo da ukoliko su nam poznati intenziteti dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, kao i njihov skalarni proizvod možemo odrediti ugao θ (odnosno kosinus ugla) između njih

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

Definicija 7.5

*Kažemo da su dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **ortogonalna** ili **normalna** ukoliko je ugao između njih 90° , odnosno $\frac{\pi}{2}$, tj. važi*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Nula vektor $\vec{0}$ se smatra ortogonalnim sa svim vektorima.

Ako su dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ paralelna, onda je ugao između njih $\theta = 0$ (imaju isti smer) ili $\theta = \pi$ (imaju suprotan smer), pa u tom slučaju važi $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$.

7.3 Vektorski proizvod

Definicija 7.6

Vektorski proizvod dva vektora $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ i $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ je vektor dat sa

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Napomena 14. Iako je najprirodnije definisati vektore u 3 dimenzije, sve što je do sada definisano može se uopštiti i na n -dimenzionalne vektore, $n \geq 2$. Međutim, vektorski proizvod se definiše samo za vektore iz $\mathbb{R}^3$.

Primer 7.7

Odrediti $\vec{a} \times \vec{b}$ ako

$$\vec{a} = \langle 1, 3, 4 \rangle, \quad \vec{b} = \langle 2, 7, -5 \rangle.$$

Rešenje: Razvojem po prvoj vrsti dobijamo

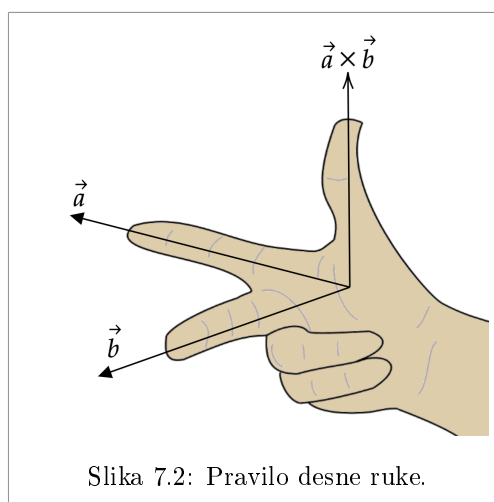
$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \vec{i}(3 \cdot (-5) - 4 \cdot 7) + \vec{j}(4 \cdot 2 - 1 \cdot (-5)) + \vec{k}(1 \cdot 7 - 3 \cdot 2) \\ &= \langle -43, 13, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Primer 7.8

Pokažimo da $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ važi za svako $\vec{a}$. Zaista,

$$\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{i}(a_2 a_3 - a_2 a_3) + \vec{j}(a_1 a_3 - a_1 a_3) + \vec{k}(a_1 a_2 - a_2 a_1) = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Sledeća teorema je veoma korisna i govori da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ normalan na ravan određenu vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ukoliko oni nisu paralelni. Štaviše, smer vektora $\vec{a} \times \vec{b}$ može da se odredi pomoću **pravila desne ruke**, koje je prikazano na slici pored.

**Teorema 7.9**

Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ je ortogonalan na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Dokaz. Direktnim računom dobijamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Teorema 7.10

Neka je $\theta \in [0, \pi]$ ugao koji obrazuju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada je

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta.$$

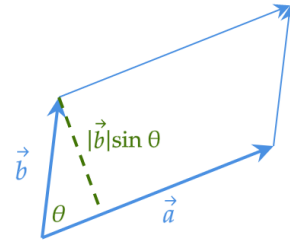
Pošto je $\sin 0 = 0$ i $\sin \pi = 0$, ne-nula vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su paralelni (kolinearni) ako i samo ako je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Geometrijska interpretacija Teoreme 7.10. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ pozicionirani tako da kreću iz iste tačke, a ugao između njih je θ , onda oni formiraju paralelogram sa stranicama $|\vec{a}|$ i $|\vec{b}|$. Visina paralelograma je tada $h = |\vec{b}| \sin \theta$. Dakle, imamo:

Površina paralelograma je:

$$A = |\vec{a}|h = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = |\vec{a} \times \vec{b}|.$$



Slika 7.3: Paralelogram koji formiraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Primer 7.11

Odrediti vektor koji je normalan na ravan koja sadrži tačke $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ i $R(1, -1, 1)$.

Rešenje: To je vektor koji je normalan na ravan koju obrazuju vektori

$$\overrightarrow{PQ} = (-2 - 1)\vec{i} + (5 - 4)\vec{j} + (-1 - 6)\vec{k} = \langle -3, 1, -7 \rangle$$

$$\overrightarrow{PR} = (1 - 1)\vec{i} + (-1 - 4)\vec{j} + (1 - 6)\vec{k} = \langle 0, -5, -5 \rangle$$

i jednak je vektorskom proizvodu ta dva vektora

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle.$$

Bilo koji vektor koji dobijamo množenjem tog vektora skalarom je takođe normalan na datu ravan.

Primer 7.12

Odrediti površinu trougla sa temenima u tačkama $P(1, 4, 6)$, $Q(-2, 5, -1)$ i $R(1, -1, 1)$.

Rešenje: U prethodnom primeru smo videli da je

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15 \rangle.$$

Površina trougla sa temenima u tačkama P, Q, R je jednaka

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \sqrt{40^2 + 15^2 + 15^2} = \frac{5}{2} \sqrt{82}.$$

Osobine vektorskog proizvoda. Neka su dati vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, i skalar α . Važi:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= -\vec{b} \times \vec{a} & (\alpha \vec{a}) \times \vec{b} &= \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha \vec{b}) \\ \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} & (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} & \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \end{aligned}$$

7.4 Mešoviti proizvod

Definicija 7.13

Mešoviti proizvod vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ je dat kao

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

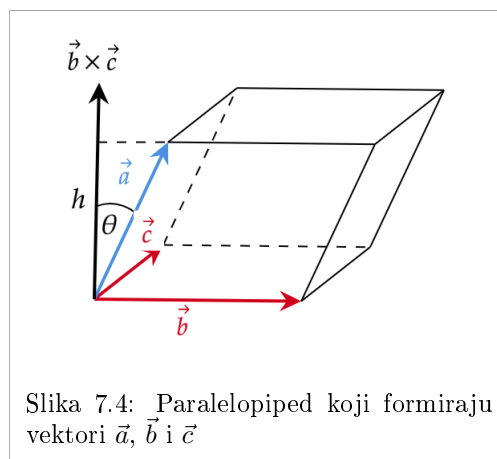
Za date vektore $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ i $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$, mešoviti proizvod može se zapisati kao determinanta:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Mešoviti proizvod je veoma značajan sa geometrijskog gledišta, jer se može tumačiti kao zapremina paralelopipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ (Slika 7.4). Površina baze paralelopipeda A je površina paralelograma određena vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$, $A = |\vec{b} \times \vec{c}|$. Ako sa θ označimo ugao između $\vec{a}$ i $\vec{b} \times \vec{c}$, onda je visina h paralelopipeda $h = |\vec{a}| |\cos \theta|$ (uzimamo $|\cos \theta|$ umesto $\cos \theta$, jer može da se desi $\theta > \pi/2$). Dakle:

Zapremina paralelopipeda je

$$V = Ah = |\vec{b} \times \vec{c}| |\vec{a}| |\cos \theta| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|.$$



Slika 7.4: Paralelopiped koji formiraju vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$

Iz gornje formule možemo da zaključimo da ako je zapremina paralelopipeda 0, onda vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ leže u istoj ravni, i za njih kažemo da su **komplanarni**. Komplanarni vektori su linearno zavisni.

Primer 7.14

Vektori $\vec{a} = \langle 1, 4, -7 \rangle$, $\vec{b} = \langle 2, -1, 4 \rangle$ i $\vec{c} = \langle 0, -9, 18 \rangle$ su komplanarni, jer je

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} = 0.$$

7.5 Linearno zavisni i nezavisni vektori

Definicija 7.15

Ne-nula vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ su **linearno zavisni** ako postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule takvi da važi

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}.$$

Vektori koji nisu linearno zavisni su **linearno nezavisni**.

Teorema 7.16

Ne-nula vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su **linearno zavisni** ako i samo ako među njima postoji

vektor $\vec{a}_k$ koji se može napisati kao linearna kombinacija preostalih, tj.

$$\vec{a}_k = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n,$$

za neke $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Ispitivanje linearne zavisnosti vektora se svodi na rešavanje homogenog sistema linearnih jednačina po $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Ako su vektori linearno nezavisni, neophodno je da taj sistem ima samo trivijalno rešenje ($\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$) što znači da determinanta čije su vrste vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ treba da bude različita od nule. Ako je determinanta jednaka nuli, onda su vektori linearno zavisni. Preciznije, za 3 vektora (da bismo imali kvadratnu matricu)

$$\vec{a}_1 = \langle a_{11}, a_{21}, a_{31} \rangle, \quad \vec{a}_2 = \langle a_{12}, a_{22}, a_{32} \rangle, \quad \vec{a}_3 = \langle a_{13}, a_{23}, a_{33} \rangle$$

posmatramo sistem

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$$

ili u matričnom obliku

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ovaj sistem po $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ima isključivo nula rešenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ ako i samo ako je $\det(A) \neq 0$ (sistem je određen), tj. vektori $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ su linearno nezavisni ako i samo ako je determinanta matrice određena tim vektorima nula. To možemo videti na slećem primeru.

Primer 7.17

Ispitati linearnu zavisnost vektora

$$\langle 1, 2, 0 \rangle, \quad \langle 0, 1, -1 \rangle, \quad \langle 2, 0, 1 \rangle.$$

Rešenje: Rešavamo sistem

$$\alpha \langle 1, 2, 0 \rangle + \beta \langle 0, 1, -1 \rangle + \gamma \langle 2, 0, 1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle,$$

tj.

$$\alpha + 2\gamma = 0,$$

$$2\alpha + \beta = 0,$$

$$-\beta + \gamma = 0.$$

Determinanta tog sistema je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

pa su vektori linearno nezavisni.

Definicija 7.18

Baza vektorskog prostora je niz vektora koji je linearno nezavisan i koji generiše vektorski prostor (svaki vektor iz tog vektorskog prostora se može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze).

Teorema 7.19

Niz od tri vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$ ako i samo ako su ti vektori linearno nezavisni.

Teorema 7.19 nam govori da možemo da konstruišemo bazu 3-dimenzionalnog prostora sa bilo koja tri linearno nezavisna vektora.

Primer 7.20

Vektori $\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$. To lako možemo da zaključimo jer su tri vektora linearno nezavisna, a vektorski prostor $\mathbb{R}^3$ je trodimenzionalan. To je takođe lako i direktno primetiti jer za svaki vektor važi $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$.

Primer 7.21

Ispitati da li vektori $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ i $\vec{c} = \langle 7, 8, 10 \rangle$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$. U slučaju da čine, predstaviti vektor $\langle 1, 1, 1 \rangle$ preko navedenih vektora.

Rešenje: Da bismo proverili da li ovi vektori čine bazu, dovoljno je da proverimo da li su linearno nezavisni, pa računamo determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Dakle, vektori čine bazu. Da bismo predstavili vektor $\langle 1, 1, 1 \rangle$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\vec{b} = \langle 4, 5, 6 \rangle$ i $\vec{c} = \langle 7, 8, 10 \rangle$, rešavamo

$$\alpha \langle 1, 2, 3 \rangle + \beta \langle 4, 5, 6 \rangle + \gamma \langle 7, 8, 10 \rangle = \langle 1, 1, 1 \rangle,$$

što možemo zapisati kao sistem

$$1\alpha + 4\beta + 7\gamma = 1,$$

$$2\alpha + 5\beta + 8\gamma = 1,$$

$$3\alpha + 6\beta + 10\gamma = 1.$$

Ovaj sistem možemo da rešimo na bilo koji od načina koje smo radili do sada, i dobijamo da je rešenje $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = 0$, što nam daje

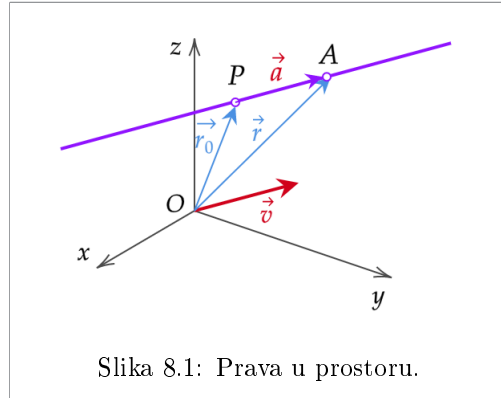
$$\langle 1, 1, 1 \rangle = -\frac{1}{3} \langle 1, 2, 3 \rangle + \frac{1}{3} \langle 4, 5, 6 \rangle + 0 \langle 7, 8, 10 \rangle.$$

8 | Analitička geometrija

8.1 Jednačina prave

Jednačinu prave p možemo odrediti ukoliko nam je data jedna tačka $P(a, b, c)$ koja joj pripada i vektor $\vec{v}$ paralelan sa pravom p sa početnom tačkom u koordinatnom početku O . Preciznije, za proizvoljnu tačku $A(x, y, z)$ koja pripada pravoj p , želimo da njen vektor položaja $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ prikažemo preko vektora $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP}$, vektora $\vec{v}$ i jednog parametra. Prvo, primetimo da preko pravila trougla imamo $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$, što se obeležavajući vektor $\vec{a} = \overrightarrow{PA}$ može zapisati i kao:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}.$$



Slika 8.1: Prava u prostoru.

Kako su $\vec{v}$ i $\vec{a}$ paralelni, postoji skalar t takav da $\vec{a} = t\vec{v}$, pa dobijamo **vektorski oblik jednačine prave p**

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Neka su komponente datih vektora

$$\vec{v} = \langle a, b, c \rangle, \quad \vec{r} = \langle x, y, z \rangle, \quad \vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle.$$

Tada je

$$\langle x, y, z \rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

odakle dobijamo:

Parametarski oblik jednačine prave p kroz tačku A koja je paralelna sa vektorom $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Primer 8.1

Odrediti vektorski i parametarski oblik jednačine prave koja je paralelna sa vektorom $\vec{v} = \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ i prolazi kroz tačku $P(5, 1, 3)$.

Rešenje: Vektorsku jednačinu dobijamo iz

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} + t\vec{v} = \langle 5, 1, 3 \rangle + t\langle 1, 4, -2 \rangle = \langle 5 + t, 1 + 4t, 3 - 2t \rangle.$$

Parametarska jednačina je

$$x = 5 + t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 3 - 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Odabirom različitih vrednosti za t dobijamo tačke na toj pravoj, $t = 0$ odgovara tački P . Jednu tačku na toj pravoj dobijamo za $t = 1$ i to je tačka $(6, 5, 1)$.

Napomena 15. *Primetimo da vektorske i parametarske jednačine pravih nisu jedinstvene i da zavise od odabira tačke kroz koju prava prolazi i vektora koji je paralelan sa pravom.*

Treći način da dodemo do jednačine prave je eliminacijom parametra t iz parametarskih jednačina. Pretpostavimo da $a, b, c \neq 0$. Tada

$$(t =) \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Tako dobijeni oblik jednačine prave p se naziva **simetrični ili kanonski oblik jednačine prave** p . Primetimo da t možemo eliminisati čak i ako je jedna od komponenti vektora $\vec{v}$ jednaka nuli. Na primer, ako je $a = 0$, imamo

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

To znači da se prava p nalazi u ravni $x = x_0$.

Primer 8.2

Pronaći parametarski i simetrični oblik jednačine prave kroz tačke $A(2, 4, -3)$ i $B(3, -1, 1)$.

Rešenje: Iako nam vektor $\vec{v}$ koji je paralelan sa pravom nije zadat, mi ga možemo odrediti iz dve tačke kroz koje data prava prolazi. Naime,

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 3, -1, 1 \rangle - \langle 2, 4, -3 \rangle = \langle 1, -5, 4 \rangle.$$

Tako dobijamo parametarski oblik jednačine prave

$$x = 2 + t, \quad y = 4 - 5t, \quad z = -3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R},$$

a zatim i kanonski oblik jednačine prave

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 4}{-5} = \frac{z + 3}{4}.$$

8.2 Jednačina ravní

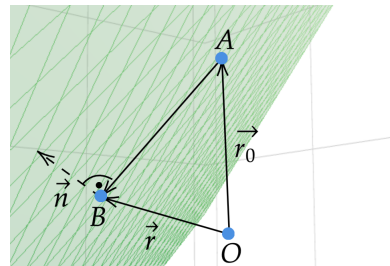
Ravan u prostoru je određena tačkom $A(x_0, y_0, z_0)$ koja joj pripada i vektorom $\vec{n}$ koji je ortogonalan na tu ravan i naziva se *vektor normale na ravan*. Označimo sa $B(x, y, z)$ proizvoljnu tačku koja pripada toj ravni i neka je $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$. Tada je $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{AB}$. Pošto je $\vec{n}$ normalan na svaki vektor koji pripada ravni, važi

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0. \quad (8.1)$$

Gornja jednačina predstavlja **vektorski oblik jednačine ravni**. Neka je sada

$$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle, \quad \vec{r} = \langle x, y, z \rangle, \quad \vec{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle.$$

Ako jednačinu (8.1) raspišemo po komponentama, onda dobijamo:



Slika 8.2: Ravan, vektori položaja $\vec{r}_0$, $\vec{r}$ i vektor normale $\vec{n}$ u prostoru. Primetiti da je vektor $\overrightarrow{AB}$ ortogonalan na $\vec{n}$ za bilo koju tačku B koja pripada ravni.

Skalarni oblik jednačine ravni:

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

ili

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

Primer 8.3

Pronaći jednačinu ravni sa vektorom normale $\vec{n} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ kroz tačku $(2, 4, -1)$.

Rešenje: Jednačina te ravni je data sa

$$\langle 2, 3, 4 \rangle \cdot \langle x - 2, y - 4, z + 1 \rangle = 0,$$

tj.

$$2(x - 2) + 3(y - 4) + 4(z + 1) = 0.$$

ili ekvivalentno

$$2x + 3y + 4z = 12.$$

Kao što možemo videti iz gornjeg primera, jednačina ravni se može zapisati u obliku

$$ax + by + cz = d, \quad \text{gde } d = -(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Ako su $a, b, c, d \neq 0$, deljenjem jednačine $ax + by + cz = d$ sa d dobijamo

Segmentni oblik jednačine ravni:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 1,$$

gde $A = \frac{d}{a}$, $B = \frac{d}{b}$, $C = \frac{d}{c}$ predstavljaju preseke ravni sa x, y, z -osama, redom.

Od ranije znamo da je vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ normalan na ravan koja je određena vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Koristeći tu činjenicu možemo da odredimo jednačinu ravni ako su nam poznate 3 tačke u ravni.

Primer 8.4

Odrediti jednačinu ravni koja sadrži tačke $P(1, 3, 2)$, $Q(3, -1, 6)$ i $R(5, 2, 0)$.

Rešenje: Tražena ravan sadrži vektore $\vec{PQ} = \langle 2, -4, 4 \rangle$ i $\vec{PR} = \langle 4, -1, -2 \rangle$, a normala na tu ravan je vektor $\vec{PQ} \times \vec{PR}$,

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \langle 12, 20, 14 \rangle.$$

Sada možemo da odredimo jednačinu ravni kroz tačku $P(1, 3, 2)$ sa vektorom normale $\langle 12, 20, 14 \rangle$,

$$12(x - 1) + 20(y - 3) + 14(z - 2) = 0.$$

Definicija 8.5

Dve ravni su **paralelne** ako su njihovi vektori normale paralelni.

Primer 8.6

Ravni $x + 2y - 3z = 4$ i $2x + 4y - 6z = 6$ su paralelne jer su vektori normale na te dve ravni, $\langle 2, 4, -6 \rangle$ i $\langle 1, 2, -3 \rangle$, paralelni.

8.3 Krive drugog reda u ravni

Skup tačaka (x, y) u ravni $\mathbb{R}^2$ koje zadovoljavaju jednačinu oblika

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

gde je bar jedan od koeficijenata A, B, C različit od nule, nazivamo **krivama drugog reda**. Tipove krivih određujemo preko znaka diskriminante $B^2 - 4AC$:

1. Parabola: $B^2 - 4AC = 0$;

2. Hiperbola: $B^2 - 4AC > 0$;

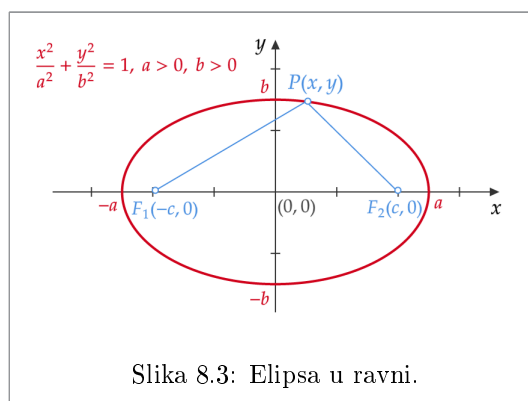
3. Elipsa: $B^2 - 4AC < 0$.

U nastavku će svaki tip krive biti izveden na osnovu geometrijskih svojstava.

8.3.1 Jednačina elipse

Elipsa je skup tačaka u ravni čiji je zbir rastojanja od dve date tačke F_1 i F_2 koje se nazivaju fokusi (ili žiže) konstantan. Preciznije, neka su fokusi u tačkama $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ i parametri $a > b > 0$ takvi da tačke $(\pm a, 0)$ i $(0, \pm b)$ pripadaju elipsi. Tada je suma udaljenosti od fokusa do tačaka $(a, 0)$ i $(0, b)$ ista, pa po Pitagorinoj teoremi dobijamo

$$\underbrace{(a - c) + (a + c)}_{\text{suma udaljenosti od } (a, 0)} = \underbrace{\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2}}_{\text{suma udaljenosti od } (0, b)}.$$



Slika 8.3: Elipsa u ravni.

Kvadriranjem tog identiteta dobijamo

$$4a^2 = 4(c^2 + b^2),$$

odnosno

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

Kako tačka $(0, b)$ pripada elipsi, zaključujemo da je suma udaljenosti iznosi

$$\sqrt{c^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{a^2} = 2a.$$

Dalje, ako proizvoljna tačka (x, y) leži na elipsi, onda po Pitagorinoj teoremi sledi

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

a prebacivajući drugi član na levu stranu i kvadrirajući dobijamo

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x + c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}.$$

Skraćivanjem y^2 sa obe strane imamo

$$4a^2 + 4xc = 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2},$$

a deljenjem obe strane sa 4 i ponovnim kvadriranjem sledi

$$a^4 + 2xca^2 + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2xc + c^2 + y^2).$$

Daljim skraćivanjem članova $2xca^2$ i deljenjem sa a^2 dobijamo

$$a^2 + \frac{c^2x^2}{a^2} = x^2 + c^2 + y^2,$$

a kako je $c^2 = a^2 - b^2$, imamo

$$b^2 = a^2 - c^2 = x^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = x^2 \frac{a^2 - c^2}{a^2} + y^2 = x^2 \frac{b^2}{a^2} + y^2.$$

Konačno deljenjem sa b^2 dobijamo konačan oblik.

Jednačina elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

Centar elipse je sredina duži između fokusa. Ako je $a > b$, onda se fokusi nalaze na x -osi i dati su sa $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$. U suprotnom, ako je $b > a$, fokusi se nalaze na y -osi u tačkama $F_1(0, -c)$ i $F_2(0, c)$. Ako $a = b$, onda elipsa postaje kružnica sa centrom u $(0, 0)$, poluprečnika a ,

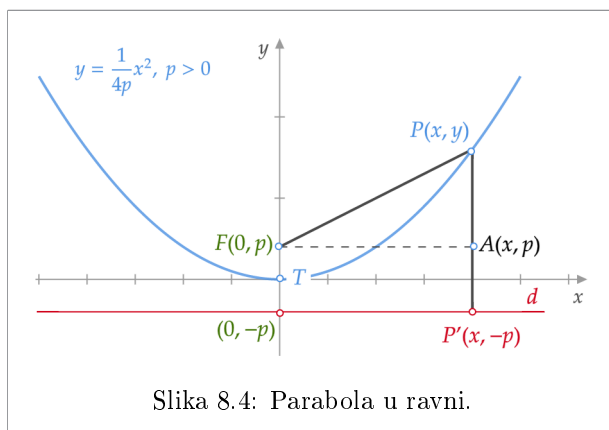
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Ukoliko centar elipse transliramo u tačku (A, B) dobijamo elipsu čija je jednačina

$$\frac{(x - A)^2}{a^2} + \frac{(y - B)^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0.$$

8.3.2 Jednačina parabole

Parabola je skup tačaka u ravni jednako udaljenih od date tačke F koja se naziva fokus i date prave d koja se naziva direktrisa. Osa parabole je prava koja prolazi kroz F i normalna je na d . Teme parabole T je tačka na pola puta između fokusa F i direktrise. Radi jednostavnosti, fiksirajmo teme parabole u tački $T(0, 0)$ i izaberimo pravu d paralelnu sa x -osom tako da prolazi kroz tačku $(0, -p)$, za $p > 0$. Iz Pitagorine teoreme (videti sliku 8.4) dobijamo:



Slika 8.4: Parabola u ravni.

$$|FA|^2 + |PA|^2 = |PF|^2,$$

a kako važi $|PP'| = |PF|$ imamo

$$x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2.$$

Skraćivanjem članova y^2 i p^2 dobijamo konačan oblik.

Jednačina parabole:

$$y = \frac{1}{4p}x^2, \quad p > 0.$$

Primetimo da u slučaju kada je $p > 0$ parabola ima konveksan oblik, i što je p veće, parabola je šira.

Na isti način dobijamo da je jednačina parabole sa temenom u $T(0, 0)$ u slučaju $p < 0$ ponovo

$$y = \frac{1}{4p}x^2, \quad p < 0.$$

U tom slučaju je direktrisa iznad x -ose i parabola ima konkavan oblik. Ako je teme $T(0, 0)$ i direktrisa je paralelna sa y -osom, a $p > 0$, jednačina parabole je

$$x = \frac{1}{4p}y^2.$$

Ako teme parabole $y = \frac{1}{4p}x^2$ (teme u $(0, 0)$) transliramo u $T(A, B)$ dobijamo parabolu čija je jednačina

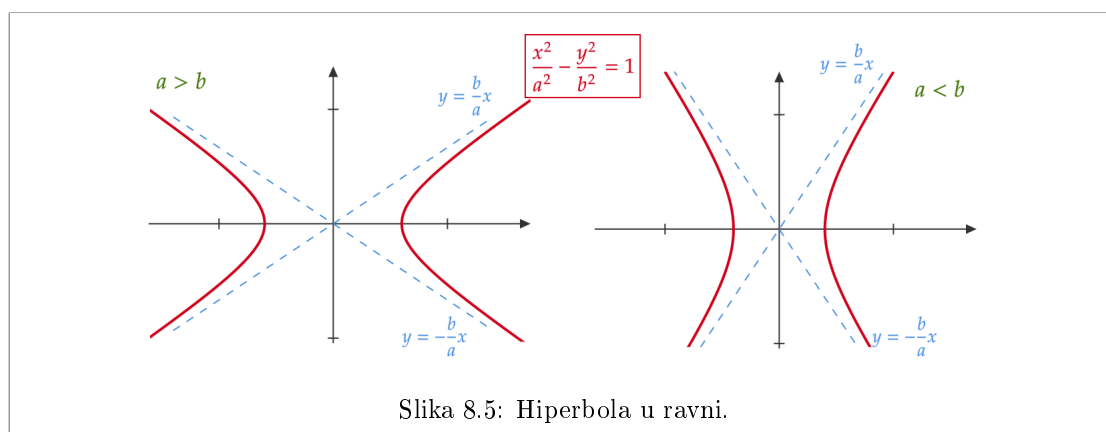
$$y - B = \frac{1}{4p}(x - A)^2.$$

8.3.3 Jednačina hiperbole

Hiperbola je skup tačaka u ravni čija je razlika rastojanja od dve date tačke, tj. dva fokusa $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ za $c > 0$, konstantna po apsolutnoj vrednosti:

$$||PF_1| - |PF_2|| = d = \text{const},$$

pri čemu je P proizvoljna tačka na hiperboli.



Uzimajući da hiperbola seče x -osu u tačkama $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ za $0 < a < c$, dobijamo

$$2a = (a + c) - (c - a) = d$$

pa je $d = 2a$. Neka je tačka (x, y) na hiperboli. Tada imamo po definiciji hiperbole:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2}| = 2a.$$

Pretpostavimo prvo da je $x > 0$ (slučaj $x < 0$ ide analogno). Tada je

$$(x+c)^2 > (c-x)^2,$$

odnosno

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} > \sqrt{(c-x)^2 + y^2},$$

pa se možemo rešiti apsolutne zgrade

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(c-x)^2 + y^2} = 2a.$$

Prebacivanjem člana $\sqrt{(c-x)^2 + y^2}$ na desnu stranu i kvadriranjem obe strane, dobijamo

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} + (c-x)^2 + y^2,$$

a kada skratimo sve iste članove imamo

$$2xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - 2xc,$$

tj.

$$4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(c-x)^2 + y^2}.$$

Deljenjem sa 4 i ponovnim kvadriranjem dobijamo

$$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2((c-x)^2 + y^2) = a^2(c^2 - 2xc + x^2 + y^2),$$

pa posle skraćivanja $2xca^2$ i deljenja sa a^2 dobijamo

$$\frac{x^2c^2}{a^2} + a^2 = c^2 + x^2 + y^2.$$

Ovo možemo zapisati kao

$$x^2 \left(\frac{c^2}{a^2} - 1 \right) - y^2 = c^2 - a^2.$$

Definišemo $b^2 = c^2 - a^2$, što nam daje

$$\frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dobijeni izraz delimo sa b^2 i dobijamo konačan oblik.

Jednačina hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, b > 0.$$

Prave $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su asimptote. Ukoliko fokuse pomerimo na y -osu, tj. u tačke $F_1(0, -c)$ i $F_2(0, c)$ a preseke sa y -osom stavimo u tačke $(0, -b)$ i $(0, b)$ za $b < c$, dobićemo jednačinu

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, b > 0,$$

gde je $a^2 = c^2 - b^2$. Centar hiperbole $(0, 0)$ možemo pomeriti u tačku (A, B) i onda imamo jednačinu:

$$\frac{(x - A)^2}{a^2} - \frac{(y - B)^2}{b^2} = 1.$$

Literatura

1. Ljiljana Gajić, *Predavanja iz analize 1*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2006.
2. Ljiljana Gajić, *Predavanja iz uvoda u analizu*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2004.
3. Ljiljana Gajić, Stevan Pilipović, Nenad Teofanov, *Zbirka zadataka iz analize 1, drugi deo*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 1998.
4. Olga Hadžić, Đurdica Takači, *Matematičke metode za studente prirodnih nauka*, Symbol, Novi Sad, 2010.
5. Dragoslav Herceg, Zoran Stojaković, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1992.
6. Dragan Mašulović, Analitička geometrija za informatičare, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2019.
7. James Stewart, *Single Variable Calculus: Early Transcendentals, Sixth Edition*, Thomson Brooks/Cole, 2008.
8. Zoran Stojaković, Ivica Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.
9. G. Thomas, R. Finney, *Calculus and Analytic Geometry. 9th edition*, Addison–Wesley, Reading, 1996.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Biblioteka Matice srpske, Novi Sad

51(075.8)

Ružičić, Sanja, 1991-

Matematika 1 za studente fizike [Elektronski izvor] / Sanja Ružičić, Srđan Trifunović. -
Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, 2025

Način pristupa (URL):

www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/ruzicic_trifunovic_matematika_1_za_studente_fizike.pdf - Opis zasnovan na stanju na dan 13.11.2025. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-492-4

1. Trifunović, Srđan, 1992-
a) Matematika

COBISS.SR-ID 179884553

Odlukom nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu 13. novembra 2025. godine, odobreno je publikovanje i upotreba ovog udžbenika.