

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада¹.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



¹ Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

"Сва права задржава издавач. Забрањена је свака употреба или трансформација електронског документа осим оних који су експлицитно дозвољени Creative Commons лиценцом која је наведена на почетку публикације."

"Sva prava zadržava izdavač. Zabranjena je svaka upotreba ili transformacija elektronskog dokumenta osim onih koji su eksplicitno dozvoljeni Creative Commons licencom koja je navedena na početku publikacije."



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU



STOHAISTIČKA ANALIZA SA PRIMERIMA

Udžbenik namenjen studentima koji slušaju kurs Stohastička analiza

Danijela Rajter - Ćirić
Sanja Ružičić

U Novom Sadu, decembar, 2025.

Predgovor

Udžbenik **Stohastička analiza sa primerima** namenjen je studentima koji slušaju predmet *Stohastička analiza* na master studijama *Primenjena matematika*, ali ga mogu koristiti i studenti koji slušaju predmet *Stohastički procesi*, kao i svi koji imaju osnovno predznanje iz teorije verovatnoće, a žele da ga prošire i prodube.

Radi lakšeg praćenja gradiva predviđenog planom i programom predmeta *Stohastička analiza*, kao i radi uvođenja formalnih definicija iz pojedinih oblasti, na početku udžbenika je dat kratak pregled osnovnih pojmova i definicija iz teorije mere i verovatnoće. Gradivo ovog predmeta moguće je pratiti i bez detaljnog poznavanja teorije mere, ali se u tom slučaju ne mogu svi pojmovi uvesti sa potpunom matematičkom preciznošću. Zbog toga su, tamo gde je to neophodno, data i neformalna tumačenja određenih tvrđenja i osobina iz pojedinih delova gradiva. Posebno su izdvojeni delovi koji povezuju gradivo iz teorije verovatnoće i stohastičke analize sa teorijom mere, kao i tvrđenja koja zahtevaju veću preciznost i viši nivo znanja iz oblasti funkcionalne analize. Na taj način omogućeno je studentima da se tim delovima posvete tek nakon što steknu osnovno znanje iz stohastičke analize i kroz jednostavne primere iz različitih oblasti uoče na koji se način izloženo gradivo primenjuje u modeliranju realnih procesa.

Udžbenik obuhvata odabrana poglavlja iz stohastičke analize, čija je osnovna uloga da podstaknu radoznalost čitaoca i omogućće mu da stečeno znanje lako uopšti i nadogradi.

Zahvaljujemo se recenzentima dr Miljani Jovanović i dr Dori Seleši koje su nakon pažljivog čitanja teksta uputile korisne savete, sugestije i primedbe i time ga učinile boljim.

U Novom Sadu, decembar, 2025.

Danijela Rajter-Ćirić i Sanja Ružičić

SADRŽAJ

Predgovor	ii
1 Uvod	1
1.1 Teorija mere	1
1.2 Prostor verovatnoća	9
1.3 Slučajne promenljive	13
1.3.1 Višedimenzionalne slučajne promenljive	19
1.3.2 Nezavisnost slučajnih promenljivih	25
1.3.3 Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih	26
1.4 Vrste konvergencije u teoriji verovatnoće	31
1.5 Centralna granična teorema	32
1.6 Zadaci	34
2 Uslovno očekivanje	43
2.1 Pojam uslovnog očekivanja	43
2.2 Osobine uslovnog očekivanja	51
2.3 Uslovna verovatnoća u odnosu na sigma algebru	56
2.4 Zadaci	58
3 Pojam i osnovna svojstva stohastičkih procesa	61
3.1 Pojam stohastičkog procesa	61
3.2 Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa	62
3.3 Neka svojstva stohastičkih procesa	64
3.4 Neke klase stohastičkih procesa	67
3.5 Zadaci	70
4 Lanci Markova	75
4.1 Uvodne napomene o procesima Markova	75
4.2 Pojam lanaca Markova diskretnih u vremenu	76
4.3 Jednačine Čepmen - Kolmogorova	78
4.4 Pojam lanaca Markova neprekidnih u vremenu	84
4.4.1 Zadaci	85
5 Poasonov proces	93
5.1 Pojam Poasonovog procesa	93
5.2 Raspodela vremena između pojave dva događaja	95
5.3 Neka svojstva Poasonovog procesa	98

5.4	Neka uopštenja Poasonovog procesa	104
5.4.1	Nehomogeni Poasonov proces	104
5.4.2	Složeni (zbirni) Poasonov proces	106
5.5	Zadaci	108
6	Braunovo kretanje	113
6.1	Slučajno kretanje i pojam Braunovog kretanja	113
6.2	Neka svojstva Braunovog kretanja	116
6.3	Beli šum kao izvod Braunovog kretanja	121
6.4	Zadaci	123
7	Stohastička integracija - motivacija i problemi	125
7.1	Pejli-Viner-Zigmundova definicija stohastičkog integrala	126
7.2	Metod Rimanovih suma	128
8	Definicija i osobine Itovog integrala	133
8.1	Progresivno merljivi stohastički procesi	133
8.2	Itov integral step procesa	134
8.3	Itov integral proizvoljnog progresivno merljivog stohastičkog procesa	136
9	Stohastički diferencijali i Itova formula	139
9.1	Itova formula	139
9.1.1	Neki primeri vezani za Itovu teoremu	141
9.2	Zadaci	144
10	Stohastičke diferencijalne jednačine (SDJ)	147
10.1	Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine	147
10.2	Primeri SDJ	148
10.3	Egzistencija i jedinstvenost rešenja SDJ	150
10.4	Zadaci	154
11	Martingali	157
11.1	Definicija martingala	158
11.2	Martingali i Braunovo kretanje	163
11.3	Zadaci	164
12	Neke primene SDJ u matematici finansija	169
12.1	Koks - Ros - Rubinštajn (CRR) model	169
12.1.1	CRR model i slučajan hod	170
12.2	Cena akcije i Braunovo kretanje	174
12.2.1	Geometrijsko Braunovo kretanje	174
12.3	Blek - Šolcova jednačina za cenu evropske opcije	176
12.3.1	Blek - Šolcova jednačina za evropske opcije sa dividendama	181
	Literatura	185

1. UVOD

Na kursu iz Verovatnoće studenti imaju priliku da se upoznaju sa pojmom verovatnoće i da steknu osnovno znanje iz ove oblasti koje je neophodno i za praćenje gradiva iz Stohastičke analize. Međutim, verovatnoća se može posmatrati i kao mera, što će biti značajno za praćenje gradiva koje je izloženo u ovoj knjizi.

Da bismo verovatnoću i formalno uveli kao meru, potrebno je prvo upoznati čitaoce sa osnovnim pojmovima i tvrđenjima iz teorije mere. Nakon toga će biti dat pregled osnovnih pojmova i tvrđenja iz verovatnoće na način na koji je to rađeno na kursu iz Verovatnoće, ali će ujedno biti pokazano i kako se ti pojmovi definišu u kontekstu mere. Brojni primeri će čitaocima olakšati praćenje gradiva. Malo drugačiji pristup, sa kojim upoznajemo čitaoce ove knjige, je neophodan da bi se između ostalog preciznije definisalo uslovno očekivanje i dokazala neka njegova svojstva.

1.1 Teorija mere

Osnovni pojam od koga polazimo je pojam σ -algebre sa kojom smo se već upoznali na kursu iz Verovatnoće.

Aksioma 1.1 (Aksioma σ -polja) Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ -polje (ili σ -algebra) nad Ω ako važe uslovi:

- (i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- (ii) ako $A \in \mathcal{F}$, onda $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
- (iii) ako $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Element σ -algebre naziva se merljiv skup.

Definicija 1.1 (Merljiv prostor) Ako je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ -algebra nad Ω , onda se par $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva merljiv prostor.

Neke od osobina σ -polja $\mathcal{F}$ koje slede direktno iz definicije su:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Ako $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

3. Ako $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, onda $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$.

4. Ako $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, onda $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Navedimo neke osnovne primere σ -polja.

1. Najmanja σ -algebra nad $\Omega \neq \emptyset$ je $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ i naziva se još i trivijalna σ -algebra.
2. Neka je $A \subset \Omega \neq \emptyset$. Tada je $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ najmanja σ -algebra koja sadrži A i naziva se još i σ -algebra generisana skupom A .
3. Partitivni skup nad Ω , $\mathcal{F}_3 = \mathcal{P}(\Omega)$ je najveća σ -algebra nad Ω .

Intuitivno, σ -algebru posmatramo kao objekat koji obuhvata sve informacije iz Ω koje su relevantne u datom trenutku. Iako se kao prirodno nameće pitanje o stalnom korišćenju partitivnog skupa kao σ -algebre, postoji mnogo razloga zašto to nije uvek najbolji izbor. Na primer, σ -algebra treba da nam obezbedi dodatnu informaciju o određenom pitanju, radnji ili eksperimentu pa samim tim treba da sadrži samo skupove koji su relevantni za to.

Teorema 1.1 (σ -algebra generisana skupovima) Neka je $A_1, A_2, \dots$ familija nepraznih skupova iz $\mathcal{P}(\Omega)$ i neka je $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$ skup koji sadrži te skupove. Ako je $\{\mathcal{F}_i : i \in I\}$ familija σ -algebri koje sadrže $\mathcal{A}$, tada je sa

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) := \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$$

definisana σ -algebra generisana skupovima iz $\mathcal{A}$.

Napomena 1.1 σ -algebra generisana skupom $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}(\mathcal{A})$, je najmanja σ -algebra koja sadrži $\mathcal{A}$. Štaviše, važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{A})) = \mathcal{F}(\mathcal{A}).$$

Napomena 1.2 Dati su skupovi $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$. Sa $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n)$ označavamo σ -algebru generisanu tim skupovima, što znači da ona sadrži $\Omega, \emptyset, A_1, \dots, A_n$, zatim skupove koji se dobijaju kao konačni ili prebrojivi preseki i unije datih skupova, kao i sve njihove komplemente.

Primer 1.1 Neka skupovi $A_1, \dots, A_n$ čine konačnu particiju skupa Ω , tj.

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

U tom slučaju je σ -algebra generisana skupovima $A_1, \dots, A_n$ ista kao σ -algebra generisana $A_1, \dots, A_{n-1}$. Štaviše,

$$\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{F}(A_{i_1}, \dots, A_{i_{n-1}}),$$

pri čemu $i_1, \dots, i_{n-1}$ predstavlja bilo koju permutaciju $n-1$ elemenata iz skupa indeksa $\{1, \dots, n\}$.

Bez gubitka opštosti, može se pokazati da važi

$$\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n) = \mathcal{F}(A_1, \dots, A_{n-1}).$$

Jasno, $\{A_1, \dots, A_{n-1}\} \subseteq \{A_1, \dots, A_n\}$ iz čega sledi $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_{n-1}) \subseteq \mathcal{F}(A_1, \dots, A_n)$. Sa druge strane, $A_n \in \mathcal{F}(A_1, \dots, A_n)$, ali $A_n = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$, pa takođe važi $A_n \in \mathcal{F}(A_1, \dots, A_{n-1})$, odakle sledi druga inkluzija, $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n) \subseteq \mathcal{F}(A_1, \dots, A_{n-1})$. $\square$

Napomena 1.3 Kako skupovi $A, \bar{A} \subset \Omega$ čine konačnu particiju skupa Ω , važi

$$\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}(A, \bar{A})$$

što ćemo u nastavku često koristiti.

Definicija 1.2 (Borelovo σ -polje) Borelovo σ -polje dimenzije 1, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je σ -polje definisano nad skupom realnih brojeva. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. Borelovo σ -polje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci elemenata te familije, kao i skupove koji se dobijaju kao komplementi tih skupova. Može se pokazati da $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve otvorene, zatvorene, poluotvorene intervale, unije tih skupova i slično.

Opštije, Borelovo σ -polje dimenzije n , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}_n$, je generisano skupovima oblika

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definicija 1.3 (Mera i prostor sa merom) Dat je merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F})$. Funkcija

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

je mera na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako važi

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu(A) \geq 0$ sa sve $A \in \mathcal{F}$.
3. Ako je $A_1, A_2, \dots$ familija međusobno disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$), onda

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ se naziva prostor sa merom.

Definicija 1.4 (Lebegova mera) Mera λ_n na prostoru $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ koja za svako $a_i < b_i$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, zadovoljava

$$\lambda_n((a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \dots \times (a_n, b_n]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad (1.1)$$

naziva se Lebegova mera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$.

Može se pokazati da za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena mera na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n)$ koja zadovoljava (1.1).

Definicija 1.5 (Indikator skupa) Funkcija $I_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, data sa

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases},$$

se naziva indikator skupa A .

Definicija 1.6 (Dirakova mera) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Funkcija $\delta_\omega : \mathcal{F} \rightarrow \{0, 1\}$ definisana sa

$$\delta_\omega(A) = I_A(\omega), \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F},$$

je mera na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ i naziva se Dirakova mera u tački ω .

Definicija 1.7 (σ -konačna mera) Neka je μ mera na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Za μ kažemo da je σ -konačna ako postoji niz skupova $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ takvih da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ i $\mu(A_i) < \infty$ za svako $i = 1, 2, \dots$.

Definicija 1.8 (Proizvod mera) Neka su $\mu_i, i = 1, \dots, n$ mere na merljivim prostorima $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = 1, \dots, n$, redom. Mera $\mu := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$, definisana sa

$$(\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n)(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(A_n) \quad \text{za svako } A_1 \times \dots \times A_n \in \mathcal{F}_1 \times \dots \times \mathcal{F}_n,$$

je mera na prostoru $(\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n, \mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n)$ i naziva se proizvod mera $\mu_1, \dots, \mu_n$. Sa $\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n$ je označen proizvod σ -algebri $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ definisan sa

$$\mathcal{F}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_n =: \mathcal{F} \left(A_1 \times \dots \times A_n \mid A_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, \dots, n \right).$$

Definicija 1.9 (Slika i inverzna slika) Za dva neprazna skupa A i B data je funkcija

$$f : A \rightarrow B.$$

Skup

$$f(A') := \{f(\omega) : \omega \in A'\}, \quad A' \subseteq A$$

naziva se slika skupa A' funkcije f , dok se

$$f^{-1}(B') := \{\omega \in A : f(\omega) \in B'\}, \quad B' \subseteq B$$

naziva inverzna slika skupa B' funkcije f .

Napomena 1.4 Često se koristi notacija

$$\{f \in B'\} := f^{-1}(B') = \{\omega \in A : f(\omega) \in B'\}.$$

Definicija 1.10 (Merljivo preslikavanje) Data su dva merljiva prostora, $(\Omega, \mathcal{F})$ i $(\Omega', \mathcal{F}')$. Preslikavanje $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ je merljivo u odnosu na $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ ako

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{F} \quad \text{za svako } A' \in \mathcal{F}'.$$

Skraćeno pišemo, f je $\mathcal{F}$ -merljivo.

Napomena 1.5 U nastavku će $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ označavati preslikavanje $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ koje je $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -merljivo, dok je μ mera na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 1.11 (Borelova funkcija) Funkcija $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ je Borelova ako

$$f^{-1}(S) \in \mathcal{B}_m \quad \text{za svako } S \in \mathcal{B}_n.$$

Za specijalne σ -algebre generisane najviše prebrojivom particijom skupova iz Ω , preslikavanje koje je merljivo u odnosu na nju se može zapisati kao linearna kombinacija indikatora skupova.

Teorema 1.2 Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor i neka je $\mathcal{F} = \mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)$ σ -algebra generisana konačnom ili najviše prebrojivom particijom $\{A_1, A_2, \dots\}$ skupa Ω . Tada je preslikavanje

$$f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, \quad \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\},$$

$\mathcal{F}$ -merljivo ako i samo ako postoje $a_i \in \bar{\mathbb{R}}, i = 1, 2, \dots$ takvi da

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{A_i}.$$

Dokaz Teoreme 1.2 se može pronaći u [21].

Teorema 1.3 (σ -algebra generisana preslikavanjem) Dat je merljiv prostor $(\Omega', \mathcal{F}')$ i preslikavanje $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. Tada je

$$\mathcal{F}(f) = f^{-1}(\mathcal{F}') := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}'\}$$

takođe σ -algebra nad Ω . Za $\mathcal{F}(f)$ kažemo da je σ -algebra generisana preslikavanjem f .

Data su preslikavanja $f : \Omega' \rightarrow \Omega''$ i $g : \Omega \rightarrow \Omega'$. Njihova kompozicija $f \circ g : \Omega \rightarrow \Omega''$ se definiše kao

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)), \quad x \in \Omega.$$

Često se koristi i notacija $f(g) = f \circ g$.

Može se pokazati da važi sledeće tvrđenje.

Teorema 1.4 Neka su $f : (\Omega', \mathcal{F}') \rightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ i $g : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}')$ dva merljiva preslikavanja. Tada je $f \circ g : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega'', \mathcal{F}'')$ merljivo.

Definicija 1.12 Neka su dati prostor mera $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, merljiv prostor $(\Omega', \mathcal{F}')$ i merljivo preslikavanje $f : \Omega \rightarrow \Omega'$. Funkcija $\mu_f : \mathcal{F}' \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definisana sa

$$\mu_f(A') := \mu(f^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{F}' \tag{1.2}$$

je mera na $(\Omega', \mathcal{F}')$ i naziva se mera slike^{*} od μ nad f .

^{*}eng. image measure

Definicija 1.13 (Preslikavanja ekvivalentna u odnosu na meru) Dva preslikavanja $f, g : \Omega \rightarrow \mathcal{B}$ definisana na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ su ekvivalentna u odnosu na meru μ ako postoji $A \in \mathcal{F}$ takvo da $\mu(A) = 0$ i za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ važi $f(\omega) = g(\omega)$. Tada pišemo $f \stackrel{\mu}{=} g$.

Pre nego što uvedemo pojam integrala, definisaćemo step funkciju.

Definicija 1.14 (Step funkcija) Dat je konačan skup $A_1, A_2, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$ podskupova skupa Ω . Step funkcija se definiše kao

$$f := \sum_{k=1}^n a_k I_{A_k}, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

gde je sa I_{A_k} označen indikator skupa A_k .

Definicija 1.15 Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor. Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je nenegativna step funkcija ako postoje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ i $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, takvi da je

$$f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}. \quad (1.3)$$

Ako su dodatno $A_1, \dots, A_n$ međusobno disjunktni, onda se (1.3) naziva normalna reprezentacija funkcije f .

Napomena 1.6 Normalna reprezentacija nenegativne step funkcije nije jedinstvena, tj. svaka nenegativna step funkcija može imati više normalnih reprezentacija.

Kao i kod Rimanovog integrala, integral proizvoljne funkcije f u odnosu na meru μ se definiše postupno. Prvo se definiše integral nenegativne step funkcije.

Definicija 1.16 (Integral nenegativne step funkcije) Dat je prostor mera $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Neka je $f = \sum_{i=1}^n a_i I_{A_i}$ normalna reprezentacija nenegativne step funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Broj

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) \quad (1.4)$$

se naziva integral funkcije f nad Ω u odnosu na meru μ .

Napomena 1.7 Integral (1.4) je dobro definisan, jer se može pokazati da dobijena vrednost ne zavisi od izbora normalne reprezentacije.

Neka je f nenegativna step funkcija. Onda je za proizvoljan skup $A \subseteq \Omega$, $I_A \cdot f$ takođe nenegativna step funkcija, pa je moguće definisati integral funkcije $I_A \cdot f$. Integral funkcije f nad skupom $A \subseteq \Omega$ se definiše sa

$$\int_A f d\mu = \int I_A \cdot f d\mu.$$

Dalje se pojam integrala proširuje na nenegativne merljive funkcije koje se mogu predstaviti kao granična vrednost nenegativnih step funkcija.

Definicija 1.17 (Integral nenegativne merljive funkcije) Neka je $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}^+, \bar{\mathcal{B}}^+)$ nenegativna merljiva funkcija, gde je sa $\bar{\mathcal{B}}^+$ označena Borelova σ -algebra nad $\bar{\mathbb{R}}^+ := [0, \infty]$. Označimo sa $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niz nenegativnih step funkcija takav da

$$f_1(\omega) \leq f_2(\omega) \leq \dots \quad \text{za svako } \omega \in \Omega, \quad (1.5)$$

i da $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tačkasto konvergira ka f , tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{za svako } \omega \in \Omega. \quad (1.6)$$

Tada je sa

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

definisan integral funkcije f nad Ω u odnosu na μ .

Napomena 1.8 Može se pokazati da za svaku nenegativnu merljivu funkciju postoji neopadajući niz $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nenegativnih step funkcija koje zadovoljavaju (1.5) i da je granična vrednost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

jedinstvena, tj. ne zavisi od odabira neopadajućeg niza nenegativnih step funkcija koji tačkasto konvergira ka f .

Pozitivan i negativan deo funkcije $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, gde $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, se definišu sa

$$f^+(\omega) := \max\{f(\omega), 0\} \quad \omega \in \Omega,$$

odnosno

$$f^-(\omega) := \max\{-f(\omega), 0\} \quad \omega \in \Omega$$

i omogućavaju nam da definišemo integral merljive funkcije u odnosu na meru.

Definicija 1.18 (Integral merljive funkcije) Data je merljiva funkcija $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ (sa $\bar{\mathcal{B}}$ je označena σ -algebra nad $\bar{\mathbb{R}}$) takva da bar jedan od integrala, $\int f^+ d\mu$ ili $\int f^- d\mu$ postoji (ima konačnu vrednost). Tada se integral

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

naziva integral funkcije f nad Ω u odnosu na meru μ , a za funkciju f kažemo da je kvazi-integrabilna u odnosu na μ .

Ako oba integrala, $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ postoje, za funkciju f kažemo da je integrabilna u odnosu na μ .

Ako je funkcija $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ kvazi-integrabilna u odnosu na μ i $A \in \mathcal{F}$, onda je sa

$$\int_A f d\mu := \int I_A f d\mu$$

označen integral funkcije f nad A u odnosu na μ .

Napomena 1.9 Specijalno, ako je funkcija f konstantna, tj. $f \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$, važi

$$\int_A f d\mu = c\mu(A), \quad A \subseteq \Omega.$$

Može se pokazati da važi sledeće tvrđenje.

Lema 1.1 Funkcija $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ je integrabilna u odnosu na μ ako i samo ako je

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Sledeća lema je bitna, jer omogućava da se integral nad skupom mere nula može zanemariti.

Lema 1.2 Neka je funkcija $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \bar{\mathcal{B}})$ merljiva i skup $A \in \mathcal{F}$ takav da $\mu(A) = 0$. Tada je f integrabilna nad A u odnosu na μ i važi

$$\int_A f d\mu = \int I_A f d\mu = 0.$$

Teorema 1.5 Dat je merljiv prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ i funkcija

$$f = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}, \quad x_i \neq x_j \text{ za svako } i \neq j, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R},$$

pri čemu su $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ međusobno disjunktni. Tada je f integrabilna u odnosu na μ ako i samo ako $\mu(A_i) < \infty$ za svako $i = 1, \dots, n$. Ako je f integrabilna u odnosu na μ , onda važi

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n x_i \mu(A_i).$$

Često je korisno napraviti paralelu između Lebegovog i Rimanovog integrala, a to će omogućiti i čitaocima ove knjige da bolje razumeju pojmove iz verovatnoće o kojima će biti reči u nastavku.

Teorema 1.6 Neka je λ Lebegova mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ i neka je dat zatvoren interval $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ako je funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riman integrabilna, onda je ona i integrabilna u odnosu na λ i važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{[a,b]} f(x) \lambda(dx).$$

Napomena 1.10 Rimanov integral integrabilne funkcije $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se može definisati samo ako je $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ jer se, grubo rečeno, on konstruiše tako što se domen Ω razbija na male intervale, a zatim se sabiraju površine odgovarajućih pravougaonika čime se aproksimira površina ispod grafika funkcije f (ako je $f \geq 0$). Naravno, to ne bi bilo moguće ako Ω nije podskup od $\mathbb{R}$. Za razliku od Rimanovog, Lebegov integral se konstruiše tako što se kodomen funkcije f razbija na male intervale, pa ga je moguće konstruisati i ako Ω nije podskup od $\mathbb{R}$. U tom smislu je Lebegov integral opštiji od Rimanovog. Međutim, postoje funkcije kod kojih je moguće definisati Rimanov integral ali Lebegov ne postoji (Primer se može pronaći u [12]).

Definicija 1.19 Neka je ν mera na $(\Omega, \mathcal{F})$. Nenegativna merljiva funkcija $f : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}^+, \bar{\mathcal{B}}^+)$ koja zadovoljava

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}$$

naziva se gustina mere ν u odnosu na μ . Mera ν se naziva mera sa gustinom f u odnosu na μ .

Teorema 1.7 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ merljiv prostor, $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}^+, \bar{\mathcal{B}}^+)$ je nenegativna merljiva funkcija i $\nu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ je mera sa gustinom f u odnosu na μ ,

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}.$$

Ako je $g : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}^+)$ nenegativna merljiva funkcija, onda važi

$$\int g d\nu = \int g \cdot f d\mu.$$

Može se pokazati da nema svaka mera ν odgovarajuću gustinu f u odnosu na meru μ . Međutim, Radon-Nikodim teorema daje potreban i dovoljan uslov za postojanje gustine.

Definicija 1.20 Neka su μ i ν mere na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Kažemo da je mera ν apsolutno neprekidna u odnosu na meru μ , u oznaci $\nu \ll_{\mathcal{F}} \mu$, ako

$$\text{iz } \mu(A) = 0 \text{ sledi } \nu(A) = 0 \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}.$$

Teorema 1.8 (Radon-Nikodim teorema) Neka su ν and μ σ -konačne mere na merljivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, tj. mere na $(\Omega, \mathcal{F})$ takve da postoji niz skupova $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ takav da je $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$ i važi

$$\nu(A_i) < \infty, \mu(A_i) < \infty \quad \text{za svako } i = 1, 2, \dots$$

Tada ν ima merljivu gustinu u odnosu na meru μ ako i samo ako je ν apsolutno neprekidna u odnosu na μ . Ta gustina se označava sa $\frac{d\nu}{d\mu}$ i naziva se Radon-Nikodimov izvod.

Dokaz Teoreme 1.8 se može pronaći u [1] i [12]. Treba napomenuti da je ova teorema značajna jer se koristi u dokazu postojanja uslovnog očekivanja sa kojim ćemo se upoznati kasnije.

1.2 Prostor verovatnoća

Označimo sa $\mathcal{F}$ klasu događaja koji se posmatraju kod nekog eksperimenta. Drugim rečima, $\mathcal{F}$ je podskup partitivnog skupa od Ω , $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, gde je Ω skup elementarnih događaja.

Bilo koji podskup A skupa elementarnih događaja Ω naziva se (slučajan) događaj. Događaji su (merljivi) skupovi pa se prema tome sve operacije, zakoni i pravila koji važe kod skupova mogu primeniti i na događaje.

Napomena 1.11 U teoriji verovatnoće se unija disjunktih događaja A i B često zapisuje sa $A+B$. Takođe, znak $\cap$ se često izostavlja i koristi se notacija AB za presek bilo koja dva događaja A i B . To će biti korišćeno u nastavku.

Podsetimo se sada pojma verovatnoće.

Aksioma 1.2 (Aksioma verovatnoće) Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ -polje nad Ω . Funkcija $P : \mathcal{F} \mapsto [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava uslove

$$(i) \quad P(\Omega) = 1,$$

$$(ii) \quad \text{Ako } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, \text{ onda}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ -polje nad Ω , a P je verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.

U ovoj knjizi verovatnoću definišemo koristeći Aksiomu 1.2 da bismo naglasili činjenicu da je verovatnoća događaja broj u intervalu $[0, 1]$. Međutim, verovatnoća $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ je mera prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ i može se definisati i u skladu sa Definicijom 1.3 na sledeći način:

Definicija 1.21 Funkcija $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ naziva se verovatnoća ako zadovoljava sledeće uslove:

$$(i) \quad P(\Omega) = 1.$$

$$(ii) \quad P(A) \geq 0 \text{ za svako } A \in \mathcal{F}.$$

$$(iii) \quad \text{Ako } \{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, \text{ onda}$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Lako se može pokazati da su dve definicije verovatnoće ekvivalentne, jer iz (i) i (ii) u Definiciji 1.21 sledi da je $P(\emptyset) = 0$ i u literaturi se mogu naći obe verzije.

Može se pokazati da funkcija verovatnoće zadovoljava i sledeće osobine:

$$1. \quad P(\emptyset) = 0$$

$$2. \quad \text{Ako } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, \dots, n, \text{ onda } P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

$$3. \quad \text{Ako } A \subseteq B, \text{ onda } P(A) \leq P(B).$$

$$4. \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

$$5. \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

6. Formula uključenja-isključenja

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \dots A_n)$$

$$7. \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(\bar{A}_1 A_2) + \dots + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_{n-1} A_n) + \dots$$

$$8. P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Osobine 1.-3. i 5.-8. važe za svaku meru μ definisanu u Definiciji 1.3.

KAKO IZRAČUNATI VEROVATNOĆU?

Podsetimo se da verovatnoću računamo koristeći...

Ako se skup svih elementarnih događaja Ω sastoji iz n mogućih ishoda (elementarnih događaja) koji imaju jednaku šansu da se realizuju, tada se verovatnoća događaja $A \in \mathcal{F}$ računa kao

$$P(A) = \frac{\text{broj elemenata } A}{n}.$$

Neka skup Ω sadrži elementarne događaje koji se mogu predstaviti kao tačke u prostoru $\mathbb{R}^n$, a događaj A je neka oblast tog prostora. Svaki $A \subseteq \Omega$ sa konačnom merom je jedan događaj.

Verovatnoću događaja A definišemo sa

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

gde je m oznaka za geometrijsku meru.

Pretpostavimo da n puta ponavljamo eksperiment i neka je pri tome m broj realizacija događaja A .

Kada se n povećava, broj $\frac{m}{n}$ se “stabilizuje” oko broja koji predstavlja verovatnoću događaja A , tj.

$$\frac{m}{n} \rightarrow P(A) \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

... u kombinaciji sa osobinama verovatnoće i alatom koji će biti dat u nastavku.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka su $A, B \in \mathcal{F}$ dva događaja, pri čemu je $P(B) > 0$. Pretpostavimo da realizacija događaja B može uticati na verovatnoću realizacije događaja A . Tada govorimo o uslovnoj verovatnoći.

Verovatnoću događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B ćemo označavati sa $P(A|B)$. Da bismo došli do definicije uslovne verovatnoće $P(A|B)$ razmišljamo na sledeći način: Pretpostavimo da za elementarni događaj $\omega \in \Omega$ znamo da je $\omega \in B$. Postavlja se pitanje kolika je onda verovatnoća da je takođe i $\omega \in A$?

Pošto znamo da je $\omega \in B$, onda B možemo posmatrati kao novi skup elementarnih događaja. Zato definišemo novi prostor verovatnoća $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &:= B, \\ \tilde{\mathcal{F}} &:= \{C \cap B \mid C \in \mathcal{F}\}, \\ \tilde{P} &:= \frac{P}{P(B)}.\end{aligned}$$

Verovatnoću P normiramo, odnosno delimo sa $P(B)$, da bismo dobili da je

$$\tilde{P}(\tilde{\Omega}) = 1.$$

Tada je verovatnoća da $\omega \in A$ jednaka

$$\tilde{P}(A \cap B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Prethodno razmatranje nas motivise da uvedemo sledeću definiciju:

Definicija 1.22 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $A, B \in \mathcal{F}$, pri čemu je $P(B) > 0$. Uslovna verovatnoća $P(A|B)$ (verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B) je

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (1.7)$$

Pod uslovom $P(B) > 0$, iz (1.7) sledi takozvano **pravilo množenja**

$$P(AB) = P(B)P(A|B).$$

U opštem slučaju, za događaje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$, $n \geq 2$ takve da $P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \neq 0$, važi

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}).$$

Definicija 1.23 Događaji A i B su nezavisni ako važi

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i događaji $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{F}$ zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $P(H_i) > 0$, $i = 1, \dots, n$,
2. $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$,
3. $\sum_{i=1}^n H_i = \Omega$.

Događaji $H_1, \dots, H_n$ se zovu hipoteze, a $\{H_1, \dots, H_n\}$ čini potpun sistem događaja.

Teorema 1.9 (Formula totalne verovatnoće) Ako je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i), \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}.$$

Teorema 1.10 (Bajesova formula) Ako je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sistem događaja, onda

$$P(H_m|A) = \frac{P(H_m) \cdot P(A|H_m)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)}, \quad m = 1, \dots, n, \quad A \in \mathcal{F}, \quad P(A) > 0.$$

Primer 1.2 Iz kutije u kojoj se nalaze 5 crnih i 3 plave kuglice se odjednom izvlače 3 kuglice bez vraćanja. Ako su sve izvučene kuglice bile crne, u kutiju se dodaje jedna crna kuglica, a u suprotnom se dodaje plava, a zatim se izvlači još jedna kuglica. Ako je ta kuglica bila plava, odrediti verovatnoću da su 3 izvučene kuglice bile crne.

Rešenje: Postavljamo hipoteze

H_1 – izvučene su 3 crne kuglice,
 H_2 – izvučene su 2 crne i jedna plava kuglica,
 H_3 – izvučene su jedna crna i 2 plave kuglice,
 H_4 – izvučene su 3 plave kuglice.

Važi

$$P(H_1) = \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{0}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}, \quad P(H_3) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}, \quad P(H_4) = \frac{1}{56}.$$

Neka je sa A označen događaj da je četvrta izvučena kuglica plava. Tada je

$$P(A|H_1) = \frac{3}{6}, \quad P(A|H_2) = \frac{3}{6}, \quad P(A|H_3) = \frac{2}{6}, \quad P(A|H_4) = \frac{1}{6}.$$

Da bismo odredili $P(H_1|A)$ koristimo Bajesovu formulu i dobijamo

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum_{k=1}^4 P(H_k)P(A|H_k)} = \frac{\frac{10}{56} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{10}{56} \cdot \frac{3}{6} + \frac{30}{56} \cdot \frac{3}{6} + \frac{15}{56} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{6}} = \frac{30}{151}.$$

□

1.3 Slučajne promenljive

Definicija 1.24 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takvo da je $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$, za sve $S \in \mathcal{B}$, zove se slučajna promenljiva. Ekvivalentno, kažemo: X je $\mathcal{F}$ –merljiva slučajna promenljiva.

Umesto oznake $X^{-1}(S)$ često ćemo koristiti oznaku $\{X \in S\}$.

*Pošto je P mera na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, slučajna promenljiva $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je merljivo preslikavanje u odnosu na $(\mathcal{F}, \mathcal{B})$.

*Definicija 1.10

Kako $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i verovatnoća je definisana za svaki skup iz $\mathcal{F}$, to znači da za svako $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ možemo definisati funkciju

$$P_X(S) = P\{X \in S\} = P\{\omega \mid X(\omega) \in S\} = P(X^{-1}(S))$$

koja se zove *raspodela verovatnoća slučajne promenljive* X .

**Raspodela verovatnoća slučajne promenljive X , $P_X : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$, je mera slike verovatnoće P nad merljivim preslikavanjem X i postoji za svaku slučajnu promenljivu.*

**Definicija 1.12*

Primer 1.3 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Indikator događaja $A \in \mathcal{F}$, $I_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definisan sa

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}, \quad \omega \in \Omega$$

je jedan primer slučajne promenljive. □

Teorema 1.11 Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelova funkcija (za svako $S \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}$) i neka je $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada je $f(X)$ takođe slučajna promenljiva.

**Slučajna promenljiva $f(X)$, gde je f Borelova funkcija[†], predstavlja kompoziciju dva merljiva preslikavanja koje je takođe merljivo preslikavanje.*

**Teorema 1.4*

†Definicija 1.11

Funkcija raspodele

Definicija 1.25 Funkcija $F_X : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ definisana sa

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\},$$

naziva se *funkcija raspodele slučajne promenljive* X .

Funkcija raspodele F_X u tački $x \in \mathbb{R}$ predstavlja verovatnoću događaja sastavljenog od onih elementarnih događaja ω čija je slika $X(\omega)$ manja od x . To ćemo kraće pisati

$$F_X(x) = P\{X < x\}.$$

Funkcija raspodele postoji i jedinstvena je za svaku slučajnu promenljivu. Pored toga, za proizvoljnu slučajnu promenljivu X i konstante $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a < b$ važi

$$P\{a \leq X < b\} = F_X(b) - F_X(a).$$

Diskretne slučajne promenljive

Definicija 1.26 Slučajna promenljiva $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup brojeva R_X takav da je $P\{X \in \overline{R_X}\} = 0$, odnosno ako je skup slika od X najviše prebrojiv skup.

Ako je skup slika $X(\Omega)$ konačan skup, kažemo da je X prosta slučajna promenljiva.

Ako je $\Omega = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $\{x_1, x_2, \dots\}$ je skup realnih brojeva, a događaji $A_1, A_2, \dots$ su definisani sa $A_i = \{\omega \mid X(\omega) = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, onda se prosta slučajna promenljiva X sa skupom slika $\{x_1, x_2, \dots\}$ može zapisati kao linearna kombinacija indikatora događaja $I_{A_1}, I_{A_2}, \dots$,

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} x_k I_{A_k}.$$

Skup vrednosti $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ diskretne slučajne promenljive X i odgovarajuće verovatnoće $p_X(x_i) = P\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, čine zakon raspodele slučajne promenljive X , ili kraće, raspodelu slučajne promenljive X . Najčešće zakon raspodele diskretne slučajne promenljive X zapisujemo na sledeći način:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_X(x_1) & p_X(x_2) & \dots \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$.

Funkcija $p_X : R_X \rightarrow [0, 1]$ definisana sa $p_X(x) = P\{X = x\}$ je raspodela verovatnoća diskretne slučajne promenljive X u odnosu na meru

$$\mu := \sum_{x \in R_X} \delta_x,$$

gde δ_x predstavlja Dirakovu meru^{*} u x . Može se pokazati[†] da važi

$$P(A) = \int_A p_X d\mu = \sum_{x \in R_X} I_A(x) p_X(x) = \sum_{x \in A} p_X(x), \quad A \in \mathcal{F}.$$

U opštem slučaju važi sledeće.

Definicija 1.27 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i μ mera na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Ako je

$$P(A) = \int_A f d\mu, \quad A \in \mathcal{F},$$

tada se f naziva raspodela verovatnoća u odnosu na meru μ .

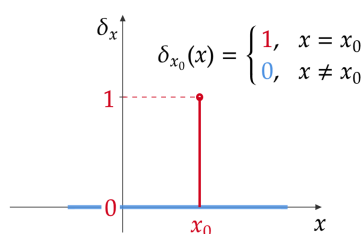
[‡]Kako je verovatnoća P mera, raspodela verovatnoća se može definisati za svaku slučajnu promenljivu.

Definicija 1.28 Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je μ mera na prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ takva da $P_X = \int f_X d\mu$. Tada je f_X raspodela verovatnoća slučajne promenljive X u odnosu na meru μ .

^{*}videti Definiciju 1.6

[†]sledi iz Teoreme 1.5

[‡]Definicija 1.19



Primer 1.4 Slučajna promenljiva

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

je prosta sa skupom vrednosti $R_X = \{-2, 0, 1, 2\}$ i po delovima konstantnom (stepenastom) funkcijom raspodele

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2 \\ \frac{1}{8}, & -2 < x \leq 0 \\ \frac{3}{8}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}.$$

Slučajna promenljiva $Y = X^2 + 2$ je takođe prosta, sa zakonom raspodele

$$Y : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

□

Primetimo da funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X iz Primera 1.4 zadovoljava sledeće uslove:

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.
2. F_X je monotono neopadajuća funkcija.
3. F_X je neprekidna sa leve strane.

Može se pokazati da svaka funkcija raspodele zadovoljava uslove 1. – 3., a važi i obrnuto: Svaka funkcija $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ koja zadovoljava uslove 1. – 3. jeste funkcija raspodele neke slučajne promenljive.

Osnovne raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive**Binomna raspodela**

Izvodi se n nezavisnih eksperimenata i u svakom eksperimentu posmatramo događaj A koji može da se realizuje sa verovatnoćom p ili da se ne realizuje sa verovatnoćom $1 - p$. Slučajna promenljiva S_n predstavlja broj pozitivnih ishoda (odnosno broj realizacija događaja A) u tih n eksperimenata, što zapisujemo sa $S_n : \mathcal{B}(n, p)$. Važi

$$P\{S_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.8)$$

Za slučajnu promenljivu sa zakonom raspodele datim u (1.8) kažemo da ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p , a opisan niz eksperimenata nazivamo Bernulijeva šema.

Poasonova raspodela

Precizno izračunavanje verovatnoća (1.8) za veliko n i malo p obično nije jednostavno i u takvom obliku dovodi do velikih grešaka u zaokruživanju. Zato se kao granični slučaj kada $n \rightarrow \infty$ može koristiti Poasonova slučajna promenljiva $X : \mathcal{P}(\lambda)$ sa parametrom $\lambda > 0$. Važi

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \dots$$

U praksi, binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu aproksimiramo Poasonovom $\mathcal{P}(\lambda)$, gde $\lambda = np$, ako je n veliko i $\lambda = np < 10$.

Geometrijska raspodela

Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj nezavisnih ponavljanja nekog eksperimenta do prve realizacije događaja A , pri čemu je $P(A) = p$ ima geometrijsku raspodelu, što zapisujemo sa $X : \mathcal{G}(p)$. Važi

$$P\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

Apsolutno neprekidne slučajne promenljive

Za razliku od diskretnih, apsolutno neprekidne slučajne promenljive su takve da im ne možemo dodeliti konkretne vrednosti sa odgovarajućim verovatnoćama, već je njihov skup vrednosti neki interval, ili čak čitava realna prava.

Definicija 1.29 Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $-\infty < x < \infty$, takva da je, za svaki skup $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x) dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive X .

**U slučaju apsolutno neprekidne slučajne promenljive X sa Riman integrabilnom gustinom raspodele slučajne promenljive X , φ_X , važi*

$$P(A) = \int_A \varphi_X d\lambda = \int_A \varphi_X(x) dx, \quad A \in \mathcal{B},$$

pri čemu je λ Lebegova mera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

*Videti Definiciju 1.27 za definiciju gustine u odnosu na meru i Teoremu 1.6 za vezu između Rimanovog i Lebegovog integrala.

Specijalno, ako izaberemo $S = (-\infty, x)$ dobijamo

$$F_X(x) = P\{X < x\} = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt \quad \text{za svako } x \in \mathbb{R}.$$

Primer 1.5 Funkcija

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & y \in (1, e) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

je gustina raspodele neke slučajne promenljive (označimo je sa Y) jer je $\varphi(y) \geq 0$ za svako $y \in \mathbb{R}$ i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \int_1^e \frac{1}{t} dt = \ln e - \ln 1 = 1.$$

Tada je funkcija raspodele slučajne promenljive Y jednaka

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = \int_{-\infty}^y \varphi(t) dt = \begin{cases} 0, & y \leq 1 \\ \int_1^y \frac{1}{t} dt = \ln y, & y \in (1, e] \\ 1, & \text{inače} \end{cases}.$$

□

Osnovne raspodele verovatnoća apsolutno neprekidne slučajne promenljive**Eksponencijalna raspodela**

Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$, što zapisujemo $X : \mathcal{E}(\lambda)$, ako su njena gustina i funkcija raspodele redom jednake

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Ova slučajna promenljiva je prirodan izbor za modeliranje vremena izvršenja nekih događaja.

Normalna raspodela

Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ^2 $\sigma > 0, m \in \mathbb{R}$, što zapisujemo $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, ako je njena gustina raspodele jednaka

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Značajna je slučajna promenljiva sa standardizovanom normalnom raspodelom,

$$X^* = \frac{X - m}{\sigma} : \mathcal{N}(0, 1)$$

čija je gustina raspodele jednaka

$$\varphi_{X^*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kako ne postoji primitivna funkcija za $\varphi_{X^*}(x)$, vrednosti integrala

$$F_{X^*}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x > 0,$$

se izračunavaju približno. Te verovatnoće su dobijene približnim računanjem vrednosti integrala

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad x > 0,$$

jer važi $F_{X^*}(x) = 0.5 + \Phi(x)$. Funkcija $\Phi(x)$ naziva se funkcija Laplasa i ima sledeće osobine:

1. $\Phi(0) = 0$,
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$,
3. $\Phi(x) = \frac{1}{2}$ za $x \geq 5$,
4. $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}$ za $3.5 \leq x \leq 5$.

Uniformna raspodela

Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu na intervalu (a, b) , $a < b$, što zapisujemo sa $X : \mathcal{U}(a, b)$, ako su njena gustina i funkcija raspodele redom jednake

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{inače} \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

1.3.1 Višedimenzionalne slučajne promenljive

U slučaju kada su eksperiment ili pojava koju posmatramo okarakterisani sa više slučajnih veličina, često se posmatraju višedimenzionalne slučajne promenljive.

Definicija 1.30 Preslikavanje $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, jeste n -dimenzionalna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako za svako $S \in \mathcal{B}_n$ važi

$$\{\omega \mid \mathbf{X}(\omega) \in S\} = \{\mathbf{X} \in S\} = \mathbf{X}^{-1}(S) \in \mathcal{F}.$$

Svaka koordinata u n -dimenzionalnoj slučajnoj promenljivoj jeste jednodimenzionalna slučajna promenljiva, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 1.12 Preslikavanje $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{X} : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$, jeste n -dimenzionalna slučajna promenljiva ako i samo ako je svaka koordinata X_i , $i = 1, \dots, n$, jednodimenzionalna slučajna promenljiva.

Lema 1.3 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, i neka je $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ n -dimenzionalna slučajna promenljiva definisana na tom prostoru verovatnoća. Tada je

$$\mathcal{F}(\mathbf{X}) := \{\mathbf{X}^{-1}(S) \mid S \in \mathcal{B}_n\}$$

jedna σ -algebra koja se zove σ -algebra generisana slučajnom promenljivom $\mathbf{X}$. To je najmanja σ -algebra, podalgebra od $\mathcal{F}$, takva da je u odnosu na nju $\mathbf{X}$ merljivo.

Intuitivno, σ -algebru $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ možemo posmatrati kao objekat koji sadrži sve relevantne informacije o slučajnoj promenljivoj $\mathbf{X}$.

Lema 1.3 je specijalan slučaj Teoreme 1.3 u kojoj je definisana σ -algebra generisana preslikavanjem, što je u ovom slučaju slučajna promenljiva $\mathbf{X}$.

Lema 1.4 Data je višedimenzionalna slučajna promenljiva $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, Borelova funkcija $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i slučajna promenljiva $\mathbf{Y} = \Phi(\mathbf{X}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tada je $\mathbf{Y}$ $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ -merljiva slučajna promenljiva. Važi i obrnuto, ako je slučajna promenljiva $\mathbf{Y}$ $\mathcal{F}(\mathbf{X})$ -merljiva, onda postoji Borelova funkcija Φ takva da je $\mathbf{Y} = \Phi(\mathbf{X})$.

Slično kao i kod jednodimenzionalnih slučajnih promenljivih, raspodela verovatnoća slučajne promenljive $\mathbf{X}$, $P_{\mathbf{X}}(S)$, $S \in \mathcal{B}_n$, predstavlja verovatnoću da skup vrednosti višedimenzionalne slučajne promenljive $\mathbf{X}$ pripada S :

$$P_{\mathbf{X}}(S) = P\{\mathbf{X} \in S\} \text{ za svako } S \in \mathcal{B}_n.$$

Definicija 1.31 Funkcija raspodele n -dimenzionalne slučajne promenljive $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) &= F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= P(\{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}), -\infty < x_1, \dots, x_n < \infty. \end{aligned}$$

Pomoću funkcije raspodele slučajne promenljive $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ možemo odrediti funkciju raspodele svake koordinate X_k , $k = 1, \dots, n$, kao i funkciju raspodele svake k -dimenzionalne slučajne promenljive $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$, $1 \leq k \leq n$. Tako dobijene funkcije raspodele zovu se *marginalne funkcije raspodele* i određuju se na sledeći način: Funkcija raspodele slučajne promenljive $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$ za koju je $K = \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ se definiše kao

$$F_{(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})}(x_1, \dots, x_k) = P\left(\bigcap_{j \in K} \{X_j < x_j\} \bigcap_{j \in \bar{K}} \{X_j < \infty\}\right),$$

gde je skup $\bar{K}$ komplementaran K u odnosu na $\{1, \dots, n\}$.

Definicija 1.32 Slučajna promenljiva $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je diskretna (ili diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup tačaka u $\mathbb{R}^n$:

$$R_{\mathbf{X}} = \left\{ \left(x_1^{(k_1)}, \dots, x_n^{(k_n)} \right) ; k_1, \dots, k_n = 1, 2, \dots \right\}$$

takav da $P\{\mathbf{X} \in \bar{R}_{\mathbf{X}}\} = 0$. Skup $R_{\mathbf{X}}$ je skup svih mogućih vrednosti slučajne promenljive $\mathbf{X}$.

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom

$$p(x_i, y_j) = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}), \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

marginalne raspodele slučajne promenljive X , odnosno Y su date sa

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \quad i = 1, 2, \dots,$$

odnosno

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i, y_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

$X \setminus Y$	1	2	3	4	5	6	Σ
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
2	0	1/18	0	1/18	0	1/18	1/6
3	0	0	1/12	0	0	1/12	1/6
4	0	0	0	1/6	0	0	1/6
5	0	0	0	0	1/6	0	1/6
6	0	0	0	0	0	1/6	1/6
Σ	1/36	3/36	4/36	9/36	7/36	12/36	1

Tabela 1.1: Zakon raspodele slučajnog vektora (X, Y) iz Primera 1.6.

Primer 1.6 Neka je X slučajan broj koji se bira iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i neka se Y bira iz istog skupa brojeva, ali takvih da su deljivi sa X . Odredimo zakon raspodele slučajnog vektora (X, Y) .

Rešenje: Skup vrednosti slučajnih promenljivih X i Y je isti, $R_X = R_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i važi $P(X = k) = \frac{1}{6}$ za svako $k \in R_X$. Međutim, znamo da ako je $X = 2$, onda se Y bira iz skupa $\{2, 4, 6\}$, tj. vrednost Y zavisi od X . Zakon raspodele slučajnog vektora je dat u Tabeli 1.1. Verovatnoće $P\{X = k, Y = j\}$ se izračunavaju koristeći pravilo množenja

$$P\{X = k, Y = j\} = P\{X = k\}P\{Y = j|X = k\}, \quad j, k = 1, \dots, 6.$$

Na primer,

$$P\{X = 2, Y = 6\} = P\{X = 2\}P\{Y = 6|X = 2\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

jer se Y bira iz skupa $\{2, 4, 6\}$ ako je $X = 2$.

Marginalne raspodele slučajne promenljive X su poznate, a marginalne raspodele za Y se mogu odrediti iz Tabele 1.1. Naime, važi

$$P\{Y = j\} = \sum_{k=1}^6 P\{X = k, Y = j\}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

pa dobijamo

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/36 & 3/36 & 4/36 & 9/36 & 7/36 & 12/36 \end{pmatrix}.$$

□

Definicija 1.33 Slučajna promenljiva $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ je n -dimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija

$$\varphi_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad -\infty < x_1, \dots, x_n < \infty,$$

takva da je, za svaki Borelov skup $S \in \mathcal{B}_n$,

$$P\{(X_1, \dots, X_n) \in S\} = \int \cdots \int_S \varphi_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}(x)$ zove se gustina raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive $\mathbf{X}$.

Neka je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$. Marginalne gustine slučajnih promenljivih X i Y su

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.9)$$

i

$$\varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) dx, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (1.10)$$

redom.

Koristeći teoriju mere mogu se definisati marginalne gustine za proizvoljnu višedimenzionalnu slučajnu promenljivu.

*Neka je data dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, sa gustinom raspodele $f_{(X,Y)}$ i neka su $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \nu)$ prostori sa merom. *Pretpostavimo da su mere μ i ν σ -konačne i da je zajednička raspodela $P_{(X,Y)}$ apsolutno neprekidna u odnosu na proizvod mera μ i ν koji označavamo sa $\mu \otimes \nu$. Tada je*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int f_{(X,Y)} \nu(dy) \quad \text{skoro sigurno u odnosu na meru } \mu, \\ f_Y(y) &= \int f_{(X,Y)} \mu(dx) \quad \text{skoro sigurno u odnosu na meru } \nu. \end{aligned} \quad (1.11)$$

[†]Funkcija f_X se naziva marginalna gustina slučajne promenljive X u odnosu na meru μ , a f_Y se naziva marginalna gustina slučajne promenljive Y u odnosu na meru ν .

Za slučajnu promenljivu (X, Y) apsolutno neprekidnog tipa sa Riman integrabilnom gustinom $\varphi_{(X,Y)}$ i Lebegove mere takve da $\mu = \nu$, (1.11) se svodi na (1.9) i (1.10).

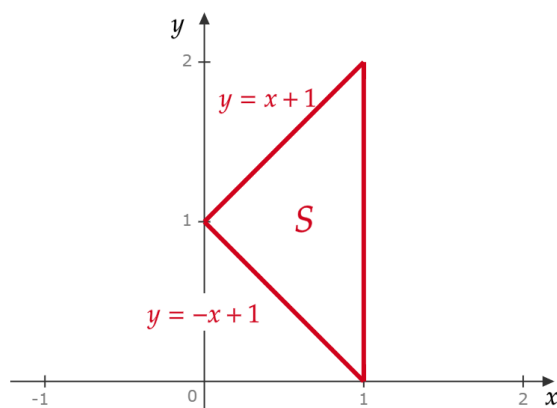
*Definicije σ -konačnih mera, apsolutne neprekidnosti i proizvoda mera videti u Definicijama 1.7, 1.20 i 1.8, redom.

[†]Za detaljnije videti [21]

Primer 1.7 Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) ima gustinu

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & (x, y) \in S, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus S, \end{cases}$$

gde je $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y - 1| < x < 1\}$.



- (a) Odrediti $P\{X > 1\}$ i $P\{X < 1, Y < 1\}$.
- (b) Odrediti marginalnu funkcije gustine i raspodele slučajne promenljive Y .
- (c) Izračunati $P\{Y < 1\}$.

Rešenje:

- (a) $P\{X > 1\} = 0$, jer je $\varphi_{(X,Y)}(x, y) = 0$ za $x > 1$. Dalje,

$$P\{X < 1, Y < 1\} = \int_0^1 \int_{-x+1}^1 \frac{3}{2}x dy dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x(1 - (-x + 1))dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

- (b) Koristeći formulu (1.10) za marginalnu gustinu slučajne promenljive Y , dobijamo da je $\varphi_Y(y) = 0$ za $y \notin (0, 2)$, za $y \in (0, 1]$ važi

$$\varphi_Y(y) = \int_{1-y}^1 \frac{3}{2}x dx = \frac{3}{4}(1 - (1 - y)^2) = \frac{3}{4}(-y^2 + 2y),$$

i za $y \in (1, 2)$,

$$\varphi_Y(y) = \int_{y-1}^1 \frac{3}{2}x dx = \frac{3}{4}(1 - (y - 1)^2) = \frac{3}{4}(-y^2 + 2y) = \frac{3}{4}y(2 - y).$$

Dakle,

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y(2 - y), & y \in (0, 2) \\ 0, & y \notin (0, 2) \end{cases}$$

i

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \int_0^y \frac{3}{4}t(2 - t)dt = \frac{1}{4}y^2(3 - y), & 0 < y \leq 2 \\ 1, & y > 2. \end{cases}$$

- (c) Verovatnoća $P\{Y < 1\}$ je funkcija raspodele slučajne promenljive Y u 1 koja se može izračunati koristeći gore dobijenu marginalnu gustinu φ_Y ,

$$P\{Y < 1\} = \int_{-\infty}^1 \varphi_Y(y) dy = \int_0^1 \frac{3}{4}y(2 - y) dy = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

ili zamenom $y = 1$ u $F_Y(y)$. □

Uslovne raspodele

Funkcija raspodele uslovnih verovatnoća slučajne promenljive X pri uslovu $\{Y \in S\}$ je

$$F_X(x | \{Y \in S\}) = \frac{P(\{X < x\} \cap \{Y \in S\})}{P\{Y \in S\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako je (X, Y) diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$, uslovna raspodela slučajne promenljive X pri uslovu $\{Y = y_j\}$, pri čemu je $P\{Y = y_j\} = q(y_j) > 0$, je jednaka

$$p(x_i|y_j) = P\{X = x_i|Y = y_j\} = \frac{p(x_i, y_j)}{q(y_j)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

Slično, za $P\{X = x_i\} = p(x_i) > 0$,

$$q(y_j|x_i) = P\{Y = y_j|X = x_i\} = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Primer 1.8 Uslovne raspodele za slučajne promenljive X i Y iz Primera 1.6 se dobijaju iz formula (1.12) i (1.13), jer su zajednička raspodela za (X, Y) i marginalne raspodele za X i Y već poznate.

Kako $P\{X = i|Y = k\} = \frac{P\{X = i, Y = k\}}{P\{Y = k\}}$ važi za sve $i, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, dobijamo

$$\begin{aligned} X|Y=1 &: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X|Y=2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad X|Y=3 : \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}, \\ X|Y=4 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/9 & 2/9 & 6/9 \end{pmatrix}, \quad X|Y=5 : \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1/7 & 6/7 \end{pmatrix}, \\ X|Y=6 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1/12 & 2/12 & 3/12 & 6/12 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Na isti način se mogu izračunati raspodele za $Y|\{X = i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. □

Primer 1.9 Baca se šestostrana kockica za igru i registruje se broj koji padne. Slučajna promenljiva X uzima vrednost 1 ako padne neparan broj, odnosno vrednost 2 ako padne paran broj. Definišimo događaj A - pao je broj veći od 3. Slučajna promenljiva X je data sa

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ P(B) & P(\bar{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

pri čemu je sa B označen događaj da je na kockici za igru pao paran broj. Ukoliko bi sa Y bila označena slučajna promenljiva koja uzima vrednost koja padne na kockici za igru, događaj A bismo mogli zapisati sa $A = \{Y \geq 4\}$, dok bi događaji $\{Y = 1\} \cup \{Y = 3\} \cup \{Y = 5\}$ i $\{X = 1\}$ bili ekvivalentni. Raspodelu slučajne promenljive $X|A$ određujemo koristeći uslovnu verovatnoću,

$$P(\{X = 1\}|A) = \frac{P(\{X = 1\} \cap A)}{P(A)} = \frac{P\{Y = 5\}}{P\{Y \geq 4\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad P(\{X = 2\}|A) = \frac{2}{3}.$$

Dakle, $X|A : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Slično, dobijamo $X|\bar{A} : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. □

Neka je sada (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Uslovna gustina za X pri uslovu $\{Y = y\}$, $\varphi_Y(y) > 0$ je

$$\varphi_X(x|y) = \frac{\varphi_{(X,Y)}(x, y)}{\varphi_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Analogno, uslovna gustina za Y pri uslovu $\{X = x\}$, $\varphi_X(x) > 0$, je

$$\varphi_Y(y|x) = \frac{\varphi_{(X,Y)}(x, y)}{\varphi_X(x)}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Primer 1.10 U Primeru 1.7 je za datu zajedničku gustinu vektora (X, Y) izračunata marginalna gustina za Y , što je dovoljno za izračunavanje uslovnih gustina za apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X i to koristeći da je

$$\varphi_X(x|y) = \frac{\varphi_{(X,Y)}(x, y)}{\varphi_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in (0, 2).$$

Dakle, za $y \in (0, 2)$ imamo

$$\varphi_X(x|y) = \begin{cases} \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{4}y(2-y)}, & x \in (1-y, y-1) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

□

1.3.2 Nezavisnost slučajnih promenljivih

Nezavisnost slučajnih promenljivih definišemo pomoću nezavisnosti odgovarajućih događaja.

Definicija 1.34 Jednodimenzionalne slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots$ su nezavisne ako su događaji $X_1^{-1}(S_1), X_2^{-1}(S_2), \dots$ nezavisni, za sve Borelove skupove $S_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots$.

Teorema 1.13 Neka su $X_1, \dots, X_n$ jednodimenzionalne slučajne promenljive na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potreban i dovoljan uslov da slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$ budu nezavisne je da važi

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \dots F_{X_n}(x_n), \quad \text{za svako } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Specijalno, ako je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) diskretnog tipa sa raspodelom $p(x_i, y_j)$, $i, j = 1, 2, \dots$, onda je potreban i dovoljan uslov za nezavisnost X i Y

$$P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\}, \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Primer 1.11 Slučajne promenljive X i Y iz Primera 1.6 nisu nezavisne, jer postoje i i j takvi da

$$P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) \neq P\{X = i\}P\{Y = j\}.$$

Na primer,

$$0 = P\{X = 2, Y = 1\} \neq P\{X = 2\}P\{Y = 1\} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36}.$$

□

Može se pokazati da važi sledeće:

Posledica 1.1 Za nezavisne slučajne promenljive $X_1, \dots, X_k$, takve da $X_i : \mathcal{P}(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$, važi

$$X_1 + \dots + X_k : \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k).$$

Posledica 1.2 Za nezavisne slučajne promenljive $X_1, \dots, X_k$, takve da $X_i : \mathcal{B}(n_i, p)$, $i = 1, \dots, k$, važi

$$X_1 + \dots + X_k : \mathcal{B}(n_1 + \dots + n_k, p).$$

Neka je data apsolutno neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X, Y) sa gustinom $\varphi_{(X,Y)}(x, y)$, $-\infty < x, y < \infty$. Potreban i dovoljan uslov za nezavisnost X i Y je

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x) \varphi_Y(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Primer 1.12 Ako su slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(0, 1)$ i $Y : \mathcal{U}(1, 2)$ nezavisne, onda je njihova zajednička funkcija gustine jednaka

$$\varphi_{(X,Y)}(x, y) = \varphi_X(x) \varphi_Y(y) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1), y \in (1, 2) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

□

Posledica 1.3 Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive i $X_i : \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, n$, važi

$$\sum_{i=1}^n a_i X_i : \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n a_i m_i, \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2\right), \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n.$$

1.3.3 Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Često nije neophodno u potpunosti opisati slučajnu promenljivu određivanjem njene funkcije raspodele, nego je dovoljno izračunati pojedine parametre koji do izvesnog stepena opisuju raspodelu verovatnoća slučajne promenljive. Kao najznačajnije izdvajamo očekivanje koje je mera centralne tendencije i disperziju koja pripada grupi parametara koji mere rasturanje oko centra.

Na početku dajemo definiciju (matematičkog) očekivanja jednodimenzionalnih slučajnih promenljivih sa kojim smo se već upoznali na kursu iz Verovatnoće, gde smo posebno dali definiciju očekivanja diskretnih slučajnih promenljivih, a zatim i definiciju očekivanja apsolutno neprekidnih slučajnih promenljivih. Koristeći tada dostupan matematički aparat i bez poznavanja teorije mere, nije bilo moguće dati univerzalnu formulu (ili definiciju) koja bi omogućila izračunavanje očekivanja proizvoljne slučajne promenljive. Ta definicija (koja je data dole) je neophodna kako bi se precizno definisalo uslovno očekivanje koje će se obrađivati u nastavku. Ovde pronalazimo jedan od osnovnih razloga zašto je bilo potrebno definisati osnovne pojmove iz teorije verovatnoće i u kontekstu teorije mere.

Definicija 1.35 Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sa

$$E(X) := \int X dP \quad (1.14)$$

definišemo očekivanje slučajne promenljive X (u odnosu na P).

*Ako slučajna promenljiva X nije kvazi-integrabilna, a samim tim nije ni integrabilna u odnosu na meru P , onda kažemo da očekivanje od X u odnosu na P ne postoji.

†Očekivanje slučajne promenljive X postoji ako je $|X|$ integrabilna u odnosu na P , tj.

$$\int |X| dP < \infty.$$

*Definicija 1.18

†Lema 1.1

Očekivanje $E(X)$ jednodimenzionalne diskretne slučajne promenljive X sa raspodelom $p(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$, definiše se sa

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

i postoji ako i samo ako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Očekivanje proste slučajne promenljive X sa skupom vrednosti $\{x_1, \dots, x_n\}$ uvek postoji, a formula (1.14) se svodi na

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P\{X = x_i\} \quad (1.15)$$

pomoću Teoreme 1.5. Očekivanje diskretne slučajne promenljive sa najviše prebrojivim skupom vrednosti ne postoji uvek.

Može se pokazati da za svaku slučajnu promenljivu X postoji niz diskretnih slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ koji uniformno konvergira ka X kada $n \rightarrow \infty$. Tada je odgovarajući niz očekivanja $\{E(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev, što nam omogućava da definišemo očekivanje slučajne promenljive X (ako ono postoji) kao graničnu vrednost niza $\{E(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ kada $n \rightarrow \infty$, tj.

$$E(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n).$$

Osim ako nije drugačije navedeno, u nastavku ćemo pretpostavljati da očekivanje slučajne promenljive postoji tamo gde se ono koristi.

Specijalno, izdvajamo apsolutno neprekidne slučajne promenljive. Naime, za jednodimenzionalnu apsolutno neprekidnu slučajnu promenljivu X , sa gustinom $\varphi_X(x)$, očekivanje je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx,$$

i ono postoji ako prethodni integral apsolutno konvergira, odnosno, ako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X(x) dx < \infty.$$

Neke od osobina očekivanja su

1. $|E(X)| \leq E(|X|)$
2. Ako je $c \in \mathbb{R}$ konstanta, onda $E(c) = c$ i $E(cX) = cE(X)$.
3. Ako slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, imaju očekivanja, onda

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n E(X_k).$$

4. Ako za svako $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$, onda $E(X) \geq 0$.
5. Ako $X \geq Y$ (za svako $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq Y(\omega)$), onda $E(X) \geq E(Y)$.
6. Ako su slučajne promenljive $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$ nezavisne i imaju očekivanja, onda

$$E\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n E(X_k).$$

7. Ako $E(X)$ postoji, onda $E(X - E(X)) = 0$.

Neka je slučajna promenljiva Y definisana sa $Y = f(X)$, pri čemu je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelova funkcija i X proizvoljna jednodimenzionalna slučajna promenljiva. Moguće je izračunati očekivanje slučajne promenljive Y koristeći raspodelu slučajne promenljive X i nije neophodno poznavati raspodelu za Y . Naime, ukoliko je X slučajna promenljiva diskretnog tipa sa skupom vrednosti $\{x_1, x_2, \dots\}$, onda je i Y diskretnog tipa i važi

$$E(Y) = E(f(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) P\{X = x_i\}.$$

Ako je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva, onda

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_X(x) dx.$$

Neka je X jednodimenzionalna slučajna promenljiva i $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borelova funkcija. Ako postoji, očekivanje slučajne promenljive $Y = f(X)$ se definiše sa

$$E(f(X)) = \int f(X) dP = \int f(x) P_X(dx) = \int f dP_X,$$

gde je P_X raspodela verovatnoća slučajne promenljive X .

Podsetimo se sada definicije disperzije jednodimenzionalne slučajne promenljive.

Definicija 1.36 Disperzija (varijansa) jednodimensionalne slučajne promenljive X je

$$D(X) = E((X - E(X))^2).$$

Napomena 1.12 Disperzija slučajne promenljive X je centralni momenat reda 2. Centralni momenat reda k je $E((X - E(X))^k)$, dok je momenat reda k definisan sa $E(X^k)$. Može se pokazati da ako (centralni) momenat reda k postoji, onda postoje i svi (centralni) momenti nižeg reda.

Za izračunavanje disperzije često se koristi formula $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Definicija 1.37 Standardna devijacija (standardno odstupanje, prosečno odstupanje) slučajne promenljive X se definiše kao

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Neke od osobina disperzije su

1. $D(X) \geq 0$,
2. $D(X) = 0$ ako i samo ako je $X = c = \text{const}$ skoro sigurno.
3. Ako je $c \in \mathbb{R}$ konstanta, onda $D(cX) = c^2 D(X)$ i $D(X + c) = D(X)$.
4. Ako su $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, nezavisne i imaju disperziju, onda je

$$D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n D(X_k).$$

Primer 1.13 Očekivanje slučajne promenljive

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

je jednako

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

Koristeći osobine očekivanja dobijamo

$$E(2X^2 + 2) = 2E(X^2) + 2 = 2\left(0 + 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{5}{8}\right) + 2 = \frac{15}{2}.$$

Disperzija slučajne promenljive X je

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{11}{4} - \frac{81}{64} = \frac{95}{64}.$$

Korišćenjem osobina disperzije može se izračunati disperzija slučajne promenljive oblika $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$$D(aX + b) = a^2 D(X) = \frac{95}{64} a^2.$$

□

Primer 1.14 Momenat reda $k \in \mathbb{N}$ apsolutno neprekidne slučajne promenljive Y sa gustinom

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{4}y(2-y), & y \in (0, 2) \\ 0, & y \notin (0, 2) \end{cases}$$

je

$$E(Y^k) = \int_{-\infty}^{\infty} y^k \varphi_Y(y) dy = \int_0^2 \frac{3}{4} y^{k+1} (2-y) dy = 3 \cdot 2^{k+1} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Onda je $E(Y) = 1$. □

OČEKIVANJE I DISPERZIJA NEKIH TIPOVA SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Diskretne slučajne promenljive

$X : \mathcal{B}(n, p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= np \\ D(X) &= np(1-p) \end{aligned}$$

$X : \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ D(X) &= \lambda \end{aligned}$$

$X : \mathcal{G}(p)$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} \\ D(X) &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

Apsolutno neprekidne slučajne promenljive

$X : \mathcal{U}(a, b), a < b$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a+b}{2} \\ D(X) &= \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

$X : \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\lambda} \\ D(X) &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} E(X) &= m \\ D(X) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

Neka je X jednodimenzionalna slučajna promenljiva sa očekivanjem $E(X)$ i disperzijom $D(X)$. Standardizovana (normalizovana) slučajna promenljiva X^* je

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

i važi

$$E(X^*) = 0 \text{ i } D(X^*) = 1.$$

Očekivanje i disperzija višedimenzionalne slučajne promenljive se dobijaju preko očekivanja i disperzije njihovih komponenti. Radi jednostavnosti, u nastavku dajemo definicije numeričkih karakteristika dvodimenzionalne slučajne promenljive.

Definicija 1.38 Očekivanje slučajne promenljive (X, Y) , ukoliko postoji, je uređen par

$$E(X, Y) = (E(X), E(Y)),$$

gde su $E(X)$ i $E(Y)$ očekivanja slučajnih promenljivih X i Y .

Disperzija slučajne promenljive (X, Y) , ukoliko postoji, je uređen par

$$D(X, Y) = (D(X), D(Y)),$$

gde su $D(X)$ i $D(Y)$ disperzije slučajnih promenljivih X i Y .

Definicija 1.39 Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) je

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 1.40 Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) je

$$\rho_{XY} = \text{cov}(X^*, Y^*) = \text{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right),$$

gde su X^* i Y^* standardizovane slučajne promenljive.

1.4 Vrste konvergencije u teoriji verovatnoće

U teoriji verovatnoće posmatraju se uglavnom četiri vrste konvergencije niza slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$, ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \rightarrow \infty$.

Definicija 1.41 Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ konvergira u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \rightarrow \infty$ (skraćeno $X_n \xrightarrow{p} X, n \rightarrow \infty$) ako, za svako $\varepsilon > 0$ važi

$$P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Definicija 1.42 Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ skoro sigurno konvergira ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \rightarrow \infty$ (skraćeno $X_n \xrightarrow{s.s.} X, n \rightarrow \infty$) ako

$$P\{X_n \rightarrow X, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

Definicija 1.43 Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ konvergira srednje kvadratno ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \rightarrow \infty$ (skraćeno $X_n \xrightarrow{s.k.} X, n \rightarrow \infty$), ako

- 1) $E(X_n^2) < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$
- 2) $E((X_n - X)^2) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$

Definicija 1.44 Niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj X kada $n \rightarrow \infty$ (skraćeno $X_n \xrightarrow{r} X, n \rightarrow \infty$), ako niz odgovarajućih funkcija raspodele $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), \dots$ kompletno konvergira ka funkciji raspodele slučajne promenljive X , $F_X(x)$, (što znači da konvergira za svako $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ za koje je $F_X(x)$ neprekidna funkcija).

Može se pokazati da skoro sigurna i srednje kvadratna konvergencija nisu uporedive, ali da obe impliciraju konvergenciju u verovatnoći, dok konvergencija u verovatnoći implicira konvergenciju u raspodeli. Ako niz slučajnih promenljivih konvergira u raspodeli ka konstanti kada $n \rightarrow \infty$, onda taj niz konvergira i u verovatnoći ka istoj konstanti.

1.5 Centralna granična teorema

Teorema 1.14 (Centralna granična teorema) Ako su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom $D(X_k) = \sigma^2$, $k = 1, 2, \dots$, onda važi

$$P \left\{ \frac{\sum_{k=1}^n X_k - E(\sum_{k=1}^n X_k)}{\sqrt{D(\sum_{k=1}^n X_k)}} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

Napomena 1.13 Označimo sa $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, pri čemu $X_1, X_2, \dots$ zadovoljavaju pretpostavke iz Teoreme 1.14. Centralna granična teorema govori da niz standardizovanih slučajnih promenljivih $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$, $n = 1, 2, \dots$ konvergira u raspodeli ka slučajnoj promenljivoj sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom kada $n \rightarrow \infty$, tj.

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}} \xrightarrow{r} X^*, \quad n \rightarrow \infty,$$

gde $X^* : \mathcal{N}(0, 1)$.

Primer 1.15 Na tržištu postoji četiri vrste hartija od vrednosti: za $\frac{2}{5}$ je poznato da neće dati profit, a koštaće 10 evra, $\frac{1}{5}$ košta 20 evra i daje profit 10%, jedna u 10 košta 30 evra i daje profit od 20%, dok se za ostale zna da neće dati profit, ali ni povrat uloženog novca (jedna takva hartija od vrednosti košta 5 evra).

- (a) Ponuđeno nam je da slučajnim odabirom sastavimo portfolio od 5 hartija od vrednosti koje se biraju nezavisno jedna od druge. Postavlja se pitanje da li prihvatiti ovakvu ponudu, tj. da li očekujemo da ćemo ostvariti profit od tako sačinjenog portfolija.

Neka je sa X_i označen profit od i -te hartije od vrednosti. Slučajna promenljiva X_i je prosta sa zakonom raspodele

$$X_i : \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 & 6 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Očekivani profit od i -te hartije od vrednosti je negativan, jer je

$$E(X_i) = -\frac{15}{10} + 0 + \frac{2}{5} + \frac{6}{10} = -0.5.$$

Dakle, očekujemo da ćemo od ovako sastavljenog portfolija imati gubitke, pa ne treba prihvatiti ponudu.

- (b) Ponuđeno nam je da slučajnim biranjem sastavimo portfolio od 400 hartija od vrednosti koje se biraju nezavisno jedna od druge i data nam je opcija da u njega dodamo hartiju od vrednosti kod koje za uloženi 200 evra ostvarujemo i dodatan profit od 5%. Želimo da odredimo verovatnoću da od ovako sastavljenog portfolija nećemo imati gubitke.

Važi

$$E(X_i^2) = 0 + \frac{4}{5} + \frac{36}{10} + \frac{75}{10} = \frac{119}{10}, \quad D(X_i) = \frac{119}{10} - \frac{25}{100} = \frac{1165}{100}.$$

Neka je $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ ukupan profit od n hartija od vrednosti. Tada $E(S_n) = -0.5 \cdot n$. Pod pretpostavkom da je $n = 400$ dovoljno veliki broj, koristeći Centralnu graničnu teoremu možemo aproksimirati traženu verovatnoću

$$\begin{aligned} P(S_{400} + 10 \geq 0) &= P\left(S_{400}^* \geq \frac{-10 + 200}{2\sqrt{1165}}\right) \approx 0.5 - \Phi\left(\frac{190}{2\sqrt{1165}}\right) \\ &= 0.5 - \Phi(2.78) = 0.5 - 0.497 = 0.003, \end{aligned}$$

gde je

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$$

standardizovana slučajna promenljiva čija raspodela se aproksimira sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom kada $n \rightarrow \infty$. $\square$

Teorema 1.15 (Moavr Laplasova teorema) U Bernulijevoj šemi sa $p > 0$ važi:

- 1) $P\{S_n = j\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sqrt{npq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{j - np}{\sqrt{npq}},$ uniformno po x u svakom konačnom intervalu, kada $n \rightarrow \infty$.
- 2) $P\left\{a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad n \rightarrow \infty.$

Moavr Laplasova teorema nam omogućava da binomnu raspodelu $\mathcal{B}(n, p)$ aproksimiramo sa normalnom kada je n veliko i $np \geq 10$. To možemo zapisati i na sledeći način

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{r} Z^* : \mathcal{N}(0, 1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Primer 1.16 Broj potencijalnih studenata MAP smeru na osnovnim akademskim studijama matematike koji bi ove godine mogao da upiše master studije *Primenjena matematika* je 50. Poznato je da svaki student, nezavisno od bilo kog drugog studenta, neće uspeti da na vreme položi sve ispite sa verovatnoćom 0.3 (on samim tim neće završiti osnovne studije i neće steći uslov da ove godine upiše master studije). Studenti koji završe osnovne studije ove godine odlučice da ne upišu master studije *Primenjena matematika* sa verovatnoćom 0.2. Označimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja broj studenata MAP smeru koji će na kraju godine upisati master studije *Primenjena matematika*.

Takođe, neka je A događaj da potencijalni student MAP smeru upiše master studije *Primenjena matematika* na kraju godine i H_1 događaj da će student MAP smeru završiti osnovne studije u ovoj godini. Tada

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) = 0.8 \cdot 0.7 = 0.56$$

i važi $X : \mathcal{B}(50, 0.56)$. Sledi, $E(X) = 50 \cdot 0.56 = 28$.

Raspodelu slučajne promenljive X možemo aproksimirati sa normalnom raspodelom koristeći Moavr Laplasovu teoremu. Verovatnoća da će manje od 35 studenata MAP smeru upisati master studije *Primenjena matematika* na kraju godine je približno jednaka

$$\begin{aligned} P\{X < 35\} &= P\left\{X^* < \frac{35 - 50 \cdot 0.56}{\sqrt{50 \cdot 0.56 \cdot 0.44}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{35 - 50 \cdot 0.56}{\sqrt{50 \cdot 0.56 \cdot 0.44}}\right) + 0.5 \\ &= \Phi\left(\frac{7}{3.51}\right) + 0.5 = \Phi(1.994) + 0.5 \approx 0.977. \end{aligned}$$

Do istog zaključka možemo doći koristeći Centralnu graničnu teoremu. U tom slučaju bismo definisali nezavisne slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots$, gde X_i sa verovatnoćom $P(A)$ uzima vrednost 1 ako je i -ti student MAP smera upisao master studije na kraju godine, a 0 inače. Tada je broj studenata MAP smera koji će ove godine upisati master studije $S_{50} = \sum_{i=1}^{50} X_i$. Pošto su X_i , $i = 1, \dots, 50$ međusobno nezavisne, iz Posledice 1.2 sledi da $S_{50} = X : \mathcal{B}(50, P(A))$. $\square$

Kao što je ilustrovano u Primeru 1.16, Teorema Moavr-Laplase je specijalni slučaj Centralne granične teoreme, jer slučajnu promenljivu $S_n : \mathcal{B}(n, p)$ možemo prikazati kao zbir nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, \dots, X_n$ sa binomnom $\mathcal{B}(1, p)$ raspodelom, pa je zato

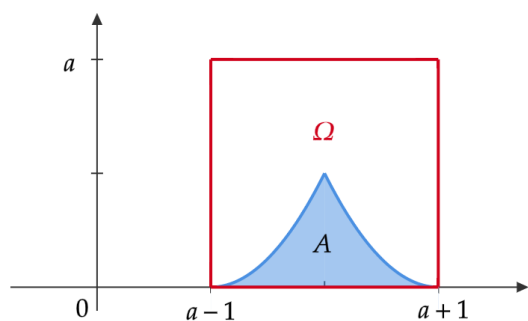
$$\begin{aligned} E(S_n) &= E(X_1 + \dots + X_n) = E(X_1) + \dots + E(X_n) = np, \\ D(S_n) &= D(X_1 + \dots + X_n) = D(X_1) + \dots + D(X_n) = npq, \end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje.

1.6 Zadaci

ZADATAK 1.1 Izaberite proizvoljan broj $a \geq 1$. Računar će vam vratiti proizvoljnu tačku (x, y) iz pravougaonika $[a-1, a+1] \times [0, a]$. Ukoliko je $y \leq (x - (a-1))^2$ i $y \leq (x - (a+1))^2$ na račun će vam biti uplaćen iznos od 100 000 evra. Kolika je verovatnoća da se to desi? Kako se ta verovatnoća menja sa porastom broja a ?

Rešenje:



Tražena verovatnoća je $p = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, gde

$$\begin{aligned} \Omega &= [a-1, a+1] \times [0, a], \\ A &= \{(x, y) \in \Omega : y \leq (x - (a-1))^2, \\ &\quad y \leq (x - (a+1))^2\}, \end{aligned}$$

a m je oznaka za geometrijsku meru (u ovom slučaju površinu oblasti). Znamo da je $m(\Omega) = 2a$.

Površina oblasti A je

$$m(A) = \int_{a-1}^a (x - (a-1))^2 dx + \int_a^{a+1} (x - (a+1))^2 dx = 2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

Dakle,

$$p = \frac{1}{3a}.$$

Tražena verovatnoća se smanjuje sa porastom a . $\square$

ZADATAK 1.2 Milan i Uroš bacaju kockicu za jamb, nezavisno jedan od drugog. Ako je suma 5, 6 ili 7, Milan pobeđuje. U suprotnom, Uroš pobeđuje.

(a) Odrediti verovatnoću da Milan pobedi.

(b) Odrediti verovatnoću da je Milan bacio broj 3, ako se zna da je on pobedio.

Rešenje:

- (a) Označimo sa A događaj da je Milan pobedio. Ako je Ω skup svih mogućih događaja, onda $|\Omega| = 36$. Neka je $A = \Omega_5 + \Omega_6 + \Omega_7$, gde je

$$\Omega_5 = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}, \Omega_6 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\},$$

$$\Omega_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Sledi $|A| = 4 + 5 + 6 = 15$, pa je

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

- (b) Neka je D događaj da je Milan bacio broj 3. Važi $P(D) = 1/6$. Verovatnoća da je Milan bacio broj 3, ako se zna da je on pobedio je jednaka

$$P(D|A) = \frac{P(DA)}{P(A)} = \frac{P(D)P(A|D)}{P(A)}.$$

Važi

$$P(A|D) = P(\text{Uroš je bacio 2, 3 ili 4}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

pa sledi

$$P(D|A) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}.$$

□

ZADATAK 1.3 U kutiji se nalazi 8 belih i 2 crne kuglice.

1. Igrač A izvlači dva puta po jednu kuglicu bez vraćanja. Pri svakom izvlačenju bele kuglice on dobija 300 dinara, a pri svakom izvlačenju crne kuglice on plaća 500 dinara.
 - (i) Odrediti verovatnoću da je igrač A u prvom izvlačenju izvukao belu kuglicu.
 - (ii) Odrediti verovatnoću da je igrač A u drugom izvlačenju izvukao belu kuglicu.
 - (iii) Odrediti raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvučenih belih kuglica u ta 2 izvlačenja, kao i $F_X(1.5)$.
 - (iv) Odrediti očekivani dobitak igrača A .
2. Igrač B izvlačenja vrši sa vraćanjem, jer procenjuje da bi njegov očekivani dobitak u tom slučaju bio veći. Da li je igrač B u pravu?

Rešenje:

1. (i) Označimo sa H_1 događaj da je u prvom izvlačenju izvučena bela kuglica. Tada je $P(H_1) = \frac{8}{10}$.
- (ii) Neka je sa H_2 označen događaj da je u drugom izvlačenju izvučena bela kuglica,

$$P(H_2) = P(H_1)P(H_2|H_1) + P(\bar{H}_1)P(H_2|\bar{H}_1) = \frac{8}{10} \frac{7}{9} + \frac{2}{10} \frac{8}{9} = \frac{8}{10}.$$

(iii) Dakle, zakon raspodele slučajne promenljive X je

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ P(\bar{H}_1\bar{H}_2) & P(H_1\bar{H}_2) + P(\bar{H}_1H_2) & P(H_1H_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{90} & \frac{32}{90} & \frac{56}{90} \end{pmatrix},$$

gde

$$P(\bar{H}_1\bar{H}_2) = P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2|\bar{H}_1) = \frac{2}{10}\frac{1}{9}, \quad P(H_1\bar{H}_2) = \frac{8}{10}\frac{2}{9},$$

$$P(\bar{H}_1H_2) = \frac{2}{10}\frac{8}{9}, \quad P(H_1H_2) = \frac{8}{10}\frac{7}{9}.$$

Takođe, $F_X(1.5) = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} = \frac{34}{90}$.

(iv) Neka je Y dobitak igrača A,

$$Y : \begin{pmatrix} -1000 & -200 & 600 \\ \frac{2}{90} & \frac{32}{90} & \frac{56}{90} \end{pmatrix}.$$

Dobijamo $E(Y) = 280$.

2. Neka je sa Z označen dobitak igrača B,

$$Z : \begin{pmatrix} -1000 & -200 & 600 \\ \frac{2^2}{10^2} & 2\frac{2}{10}\frac{8}{10} & \frac{8^2}{10^2} \end{pmatrix}.$$

Dobijamo

$$E(Z) = \frac{1}{100}(-4000 - 6400 + 38400) = 280.$$

Oba igrača imaju isti očekivani dobitak.

ZADATAK 1.4 *Da bi odredila koliku premiju treba na naplate, osiguravajuća društva često koriste eksponencijalni model na sledeći način: Označimo sa X slučajan iznos koji bi kompanija trebala da isplati u slučaju nezgode. Tada je premija koju će naplatiti korisniku data sa*

$$\Pi = \frac{1}{a} \ln E(e^{aX}), \quad a > 0.$$

Odrediti premiju ako je X slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom sa parametrom $\lambda > 0$ i važi $a = \alpha\lambda$, $0 < \alpha < 1$.

Rešenje: Važi

$$E(e^{aX}) = \int_0^\infty e^{a\lambda x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{1 - \alpha},$$

pa je premija jednaka

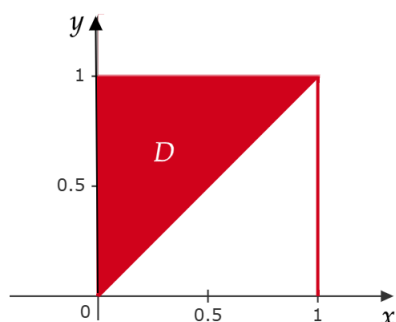
$$\Pi = \frac{1}{\alpha\lambda} \ln \frac{1}{1 - \alpha} = -\frac{\ln(1 - \alpha)}{\alpha\lambda}.$$

□

ZADATAK 1.5 Data je funkcija $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} axy, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D, \end{cases}$$

gde je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge x \leq y \leq 1\}$.



(a) Odrediti konstantu $a \in \mathbb{R}$, tako da funkcija φ bude gustina raspodele neke dvodimenzionalne slučajne promenljive (X, Y) .

(b) Odrediti $P(\{Y > \frac{1}{2}\} | \{X > \frac{1}{2}\})$.

(c) Na slučajan način se biraju brojevi v i ω iz intervala $[0, 1]$. Odrediti verovatnoću da

$$E(vX + \omega Y) \in [0, 1/15].$$

Rešenje:

(a) Tražimo $a \geq 0$ tako da $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) dx dy = 1$ i dobijamo $a = 8$.

(b) Da bismo odredili verovatnoću

$$P\left(\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} \middle| \left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) = \frac{P(\{Y > \frac{1}{2}\} \cap \{X > \frac{1}{2}\})}{P\{X > \frac{1}{2}\}},$$

treba da pronađemo marginalnu gustinu za X ,

$$\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{(X,Y)}(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za $x \notin (0, 1)$ važi $\varphi_X(x) = 0$, dok za $x \in (0, 1)$ imamo

$$\varphi_X(x) = \int_x^1 \varphi_{(X,Y)}(x, y) dy = 4x(1 - x^2).$$

Kako je

$$\begin{aligned} P\left(\left\{Y > \frac{1}{2}\right\} \cap \left\{X > \frac{1}{2}\right\}\right) &= \int_{1/2}^1 \int_x^1 8xy dy dx = \frac{9}{16}, \\ P\left\{X > \frac{1}{2}\right\} &= \int_{1/2}^1 4x(1 - x^2) dx = \frac{9}{16}, \end{aligned}$$

sledi $P(\{Y > \frac{1}{2}\} | \{X > \frac{1}{2}\}) = 1$.

(c) Za $v, \omega \in \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned} E(vX + \omega Y) &= \int_0^1 \int_x^1 (vx + \omega y) 8xy dy dx = \int_0^1 8vx^2 \frac{1-x^2}{2} dx + \int_0^1 8\omega x \frac{1-x^3}{3} dx \\ &= 4v\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \frac{8}{3}\omega\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{15}v + \frac{12}{15}\omega \end{aligned}$$

Dalje,

$$\frac{8}{15}v + \frac{12}{15}\omega \in \left[0, \frac{1}{15}\right] \quad \text{ako } 8v + 12\omega \in [0, 1].$$

Traženu verovatnoću računamo kao

$$p = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

gde je

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1], \quad A = \{(\omega, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{1}{8} - \frac{3}{2}\omega\}$$

i m je oznaka za geometrijsku meru (u ovom slučaju površinu). Kako je $m(\Omega) = 1$ i $m(A) = \frac{1}{192}$ dobijamo da je $p = \frac{1}{192}$. $\square$

ZADATAK 1.6 Za izradu delova u fabrici auto delova koriste se dve mašine (stara i nova).

- (a) Verovatnoća da stara mašina izradi neispravan deo jednaka je $\frac{5}{1000}$, a verovatnoća da nova mašina izradi neispravan deo jednaka je $\frac{3}{1000}$. U jednoj kutiji se nalazi 3 dela koje je izradila stara mašina i 9 delova koje je izradila nova mašina. Odrediti verovatnoću da je slučajno izvučeni deo iz kutije ispravan, kao i verovatnoću da je slučajno izabrani ispravan deo proizvela nova mašina.
- (b) Broj delova koje nova mašina napravi u jednom danu ima Poasonovu $\mathcal{P}(4)$ raspodelu, a broj delova koje stara mašina napravi u jednom danu ima Poasonovu $\mathcal{P}(3)$ raspodelu. Mašine rade nezavisno jedna od druge.
 - (i) Odrediti verovatnoću da nova mašina u jednom danu napravi manje od 3 dela.
 - (ii) Odrediti verovatnoću da ove dve mašine zajedno naprave tačno 5 delova u jednom danu.
- (c) Iz prodavnice je poručeno 50 delova. Vlasnik fabrike je odgovorio da očekuje da će za n dana dve mašine proizvesti 50 delova. Odrediti n .
- (d) Vreme T_1 (u satima) koje je potrebno novoj mašini da napravi jedan deo ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 6, dok vreme T_2 (u satima) potrebno staroj mašini da napravi isti takav deo ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 8. Vremena rada dve mašine su međusobno nezavisna.
 - (i) Odrediti verovatnoću da nova mašina napravi deo za manje od 5 sati.
 - (ii) Zbog sigurnosne provere, nova mašina je počela sa izradom dela 2 sata nakon stare. Odrediti verovatnoću da stara mašina napravi deo pre nove.
 - (iii) Izračunati $D(2T_1 + 1)$.
 - (iv) Odrediti gustinu raspodele slučajne promenljive $T_1 + T_2$.
- (e) Odrediti verovatnoću da nova mašina za 400 dana napravi bar 1800 delova iste vrste. (Smatramo da su izrade delova međusobno nezavisne i da je 400 dovoljno veliki broj.)

Rešenje:

- (a) Neka je sa A označen događaj da je proizvod ispravan. Koristimo formulu totalne verovatnoće sa dve hipoteze: H_1 – deo je proizvela nova mašina, H_2 – deo je proizvela stara mašina). Važi

$$P(A) = \frac{3}{12} \left(1 - \frac{5}{1000}\right) + \frac{9}{12} \left(1 - \frac{3}{1000}\right) = \frac{3086}{4000}$$

i

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{12}(1 - \frac{5}{1000})}{\frac{3086}{4000}} = \frac{995}{3086}.$$

- (b) Označimo sa X broj delova koje nova mašina proizvede u danu, a sa Y broj delova koje stara mašina proizvede u danu. Znamo da $X : \mathcal{P}(4)$ i $Y : \mathcal{P}(3)$.

- (i) Verovatnoća da nova mašina u jednom danu napravi manje od 3 dela je

$$P\{X < 3\} = P\{X = 0\} + P\{X = 1\} + P\{X = 2\} = e^{-4}(1 + 4 + 8) = 13e^{-4}.$$

- (ii) Verovatnoća da nova i stara mašina zajedno naprave tačno 5 delova u jednom danu je

$$\begin{aligned} P\{X + Y = 5\} &= P\{X = 0, Y = 5\} + P\{X = 1, Y = 4\} + P\{X = 2, Y = 3\} \\ &\quad + P\{X = 3, Y = 2\} + P\{X = 4, Y = 1\} + P\{X = 5, Y = 0\} \\ &= e^{-4}e^{-3} \left(\frac{4^0}{0!} \cdot \frac{3^5}{5!} + \frac{4^1}{1!} \cdot \frac{3^4}{4!} + \frac{4^2}{2!} \cdot \frac{3^3}{3!} + \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{3^2}{2!} + \frac{4^4}{4!} \cdot \frac{3^1}{1!} + \frac{4^5}{5!} \cdot \frac{3^0}{0!} \right) \\ &= e^{-7} \left(\frac{3^5 + 4^5}{5!} + \frac{4 + 3^4}{4!} + \frac{16 + 27}{2!3!} \right), \end{aligned}$$

što sledi iz nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y ,

$$P\{X = k, Y = j\} = P\{X = k\}P\{Y = j\} \quad \text{za svako } k, j = 0, 1, \dots$$

- (c) Traži se n takvo da je $E(nX + nY) = nE(X) + nE(Y) = 50$. Dakle, važi

$$n(4 + 3) = 50,$$

pa sledi $n = \left\lceil \frac{50}{7} \right\rceil = 8$ dana.

- (d) Neka je $T_1 : \mathcal{E}(1/6)$ vreme potrebno da nova mašina napravi deo, a $T_2 : \mathcal{E}(1/8)$ vreme potrebno da stara mašina napravi deo.

- (i) Verovatnoća da nova mašina napravi deo za manje od 5 sati je

$$P\{T_1 < 5\} = F_{T_1}(5) = 1 - e^{-\frac{5}{6}}.$$

- (ii) Treba da odredimo $P\{T_1 + 2 > T_2\}$. Pošto su slučajne promenljive T_1 i T_2 nezavisne, važi

$$\varphi_{(T_1, T_2)}(x_1, x_2) = \varphi_{T_1}(x_1)\varphi_{T_2}(x_2) = \begin{cases} \frac{1}{48}e^{-\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{8}x_2}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P\{T_2 < T_1 + 2\} &= \int_0^\infty \int_0^{x_1+2} \frac{1}{48}e^{-\frac{1}{6}x_1 - \frac{1}{8}x_2} dx_2 dx_1 = \int_0^\infty \frac{1}{48}e^{-\frac{1}{6}x_1} \int_0^{x_1+2} e^{-\frac{1}{8}x_2} dx_2 dx_1 \\ &= 1 - \frac{4}{7}e^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

(iii) Iz osobina disperzije sledi

$$D(2T_1 + 1) = 4D(T_1) = 4 \cdot 36 = 144.$$

(e) Označimo sa S_n broj delova koje je prva mašina napravila u n dana. Tada $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, gde $X_i : \mathcal{P}(4)$ predstavlja broj delova koje je nova mašina napravila i -tog dana. Pošto znamo da su X_i , $i = 1, 2, \dots$ međusobno nezavisne, možemo da koristimo Centralnu graničnu teoremu i raspodelu slučajne promenljive $S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{D(S_n)}}$ aproksimiramo sa standardnom normalnom raspodelom. Dobijamo

$$P\{S_{400} \geq 1800\} = P\left\{\frac{1800 - 400 \cdot 4}{\sqrt{4 \cdot 400}} \leq S_{400}^* < \infty\right\} = P\left\{\frac{200}{40} \leq S_{400}^* < \infty\right\} \approx 0.5 - \Phi(5) = 0.$$

Dakle, nova mašina skoro sigurno neće za 400 dana napraviti bar 1800 delova iste vrste. $\square$

ZADATAK 1.7 Računar na slučajan način formira trocifrene brojeve, birajući cifre iz skupa

$$\{2, 3, 5, 7, 8\},$$

gde pretpostavljamo da se svaka cifra bira sa jednakom verovatnoćom. Ako trocifreni broj ima iste sve 3 cifre, računar će izbaciti još jedan trocifren broj sa ciframa iz skupa $\{2, 3, 8\}$. Ako je broj deljiv sa 5 i prva cifra mu je 2, računar će izbaciti trocifren broj sa ciframa iz skupa $\{2, 3, 5, 8\}$, a u suprotnom će izbaciti trocifren broj sa ciframa iz skupa $\{2, 3, 5, 7, 8\}$. Koja je verovatnoća da je prvi trocifren broj imao sve iste cifre ako se zna da drugi trocifreni broj ima sve iste cifre?

ZADATAK 1.8 Kupili ste 50 lutrijskih listića, svaki je dobitni sa verovatnoćom $p \in (0, 1)$ i dobici su nezavisni.

- Odrediti verovatnoću da je bar jedan listić dobitni ako je $p = \frac{1}{10}$.
- Pretpostavimo da je svaki listić koštao 1 dinar i da je očekivani dobitak od svakog dobitnog listića nezavisan od broja dobitnih listića i jednak $\frac{2(1-p)}{p}e^{-2(1-p)}$ dinara. Odrediti p takvo da je očekivani ostvareni profit maksimalan.

ZADATAK 1.9 Jovana polaže test iz Verovatnoće. Na testu je 10 pitanja i za svako od njih je ponuđeno 4 odgovora, od kojih je samo jedan tačan. Tačan odgovor vredi 5 bodova, a netačan ne donosi bodove. Verovatnoća da Jovana zna odgovor na pitanje je 0.7. Ako zna odgovor na pitanje, Jovana bira taj (tačan) odgovor. Ako ne zna odgovor na pitanje, Jovana na slučajan način bira jedan od 4 ponuđena odgovora (za svaki od ponuđenih odgovora jednako je verovatno da bude odabran). Na navedeni način postupa, nezavisno, za svako od 10 pitanja.

- Odrediti zakone raspodela slučajnih promenljivih

X – broj pitanja na koje je Jovana dala tačan odgovor,

X_i – broj bodova ostvarenih za i -to po redu pitanje, $i = 1, 2, \dots, 10$.

- Odrediti očekivani broj bodova koje će Jovana imati na testu.

- (c) *Da bi položila test, Jovana treba da ostvari bar 25 bodova. Koja je verovatnoća da će Jovana položiti test?*

ZADATAK 1.10 *Dat je niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Gustina raspodele slučajne promenljive X_n je data sa*

$$\varphi_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 + \frac{2}{n}, \\ ne^{n(1-x)+2}, & x > 1 + \frac{2}{n}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (a) *Odrediti funkcije raspodele $F_{X_n}(x)$ slučajnih promenljivih X_n , $n \in \mathbb{N}$.*
- (b) *Dokazati da niz $\{X_n\}_n$ konvergira u raspodeli kada $n \rightarrow \infty$ ka slučajnoj promenljivoj X koja je skoro sigurno jednaka 1. Da li posmatrani niz slučajnih promenljivih konvergira i u verovatnoći ka slučajnoj promenljivoj X ?*

2. USLOVNO OČEKIVANJE

2.1 Pojam uslovnog očekivanja

Podsetimo se

Uslovna verovatnoća $P(A|B)$, tj. verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se definiše tako što se formira novi prostor verovatnoća $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ kod koga je $\tilde{\Omega} = B$, pa imamo

$$P(A|B) := \tilde{P}(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Koristeći definiciju uslovne verovatnoće moguće je definisati uslovnu raspodelu slučajne promenljive X pod uslovom da se desio događaj B ,

$$F_X(x|B) = P(X < x|B) = \frac{P(\{X < x\} \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

Kako je $X|B$ takođe slučajna promenljiva, moguće je izračunati njeno očekivanje $E(X|B)$, ako ono postoji.

Definicija uslovne verovatnoće, kao i definicija očekivanja slučajne promenljive X u odnosu na meru P ,

$$E(X) = \int X dP,$$

omogućava nam da definišemo uslovno očekivanje kao očekivanje slučajne promenljive u odnosu na meru $\tilde{P}$.

Definicija 2.1 Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ako postoji, uslovno očekivanje slučajne promenljive X pod uslovom da se realizovao događaj $B \in \mathcal{F}$, gde je $P(B) > 0$, se definiše kao

$$E(X|B) := \int X d\tilde{P} = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP. \quad (2.1)$$

Mera $\tilde{P}$ je mera sa gustinom* $\frac{1}{P(B)}I_B$ u odnosu na meru P , jer važi

$$\begin{aligned}\tilde{P}(A) = P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int I_{A \cap B} dP \\ &= \frac{1}{P(B)} \int I_A I_B dP = \int_A \frac{1}{P(B)} I_B dP, \quad A, B \in \mathcal{F},\end{aligned}$$

tako da (2.1) sledi iz

$$\begin{aligned}E(X|B) &= \int X d\tilde{P} \stackrel{\text{Teorema 1.7}}{=} \int \frac{1}{P(B)} I_B \cdot X dP \\ &= \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{P(B)} E(I_B \cdot X).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ako $E(X)$ postoji, onda iz (2.2) sledi da postoji i $E(X|B)$.

*Videti Definiciju 1.19

Uslovno očekivanje $E(X|Y)$ ako je Y diskretna slučajna promenljiva

Pretpostavimo sada da je Y slučajna promenljiva diskretnog tipa na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $P\{Y = y\} > 0$. Kako je $\{Y = y\}$ događaj iz $\mathcal{F}$, ako postoji, moguće je odrediti uslovno očekivanje slučajne promenljive X pod uslovom $\{Y = y\}$ koristeći (2.1),

$$E(X|Y = y) = \frac{1}{P(Y = y)} \int_{\{Y=y\}} X dP.$$

Ako je i X diskretna slučajna promenljiva sa skupom vrednosti $\{x_1, x_2, \dots\}$, onda

$$X|Y = y : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ P(X = x_1|Y = y) & P(X = x_2|Y = y) & \dots \end{pmatrix}$$

i

$$E(X|Y = y) = \frac{1}{P(Y = y)} \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i, Y = y).$$

Primer 2.1 *Primetimo da iz (2.2) sledi*

$$E(I_A|B) = \frac{1}{P(B)} E(I_A \cdot I_B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A|B),$$

jer

$$E(I_A \cdot I_B) : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - P(AB) & P(AB) \end{pmatrix}$$

□

U nastavku želimo da definiciju uslovnog očekivanja slučajne promenljive X ako se desio neki događaj proširimo, i definišemo uslovno očekivanje od X ako je data slučajna promenljiva Y .

Uzmimo prvo najjednostavniji slučaj: Neka je Y prosta slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa skupom vrednosti $\{y_1, \dots, y_m\} \subset \mathbb{R}^n$, tj.

$$Y = \sum_{i=1}^m y_i I_{A_i}, \quad A_i = \{\omega | Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tada važi

$$\Omega = \sum_{i=1}^m A_i, \quad P(A_i) > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

i

$$Y = Y(\omega) = \begin{cases} y_1, & \omega \in A_1, \\ y_2, & \omega \in A_2, \\ \vdots & \vdots \\ y_m, & \omega \in A_m \end{cases}.$$

Drugačije zapisano,

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ P(A_1) & P(A_2) & \dots & P(A_m) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Polazimo od toga da znamo kolika je vrednost slučajne promenljive Y . Pošto to znamo, onda znamo i koji od događaja $A_1, \dots, A_m$ se realizovao. Zato sada definišemo uslovno očekivanje slučajne promenljive X u odnosu na Y kao prostu slučajnu promenljivu koja uzima vrednosti

$$E(X|Y = y_i) = E(X|A_i), \quad i = 1, \dots, m,$$

tj.

$$E(X|Y) = \begin{cases} \frac{1}{P(A_1)} \int_{A_1} X dP, & \omega \in A_1 \\ \frac{1}{P(A_2)} \int_{A_2} X dP, & \omega \in A_2 \\ \vdots \\ \frac{1}{P(A_m)} \int_{A_m} X dP, & \omega \in A_m \end{cases} = \begin{cases} E(X|A_1), & \omega \in A_1 \\ E(X|A_2), & \omega \in A_2 \\ \vdots \\ E(X|A_m), & \omega \in A_m \end{cases},$$

što možemo zapisati na sledeći način

$$E(X|Y) = \sum_{i=1}^m E(X|Y = y_i) \cdot I_{A_i} = \sum_{i=1}^m E(X|A_i) \cdot I_{A_i}.$$

Dalje, definiciju uslovnog očekivanja možemo proširiti i na slučaj kada je Y diskretna slučajna promenljiva sa, u opštem slučaju, najviše prebrojivo mnogo vrednosti.

Definicija 2.2 Neka je X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ čije očekivanje postoji i neka je Y diskretna slučajna promenljiva na istom prostoru verovatnoća sa skupom vrednosti $\{y_1, y_2, \dots\}$. Uсловno očekivanje slučajne promenljive X ako je data slučajna promenljiva Y se definiše kao

$$E(X|Y) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|Y = y_i) \cdot I_{A_i}. \quad (2.4)$$

Napomena 2.1 Uсловno očekivanje (2.4) je dobro definisano, jer $E(X) < \infty$, pa iz (2.2) sledi da i $E(X|Y = y_i)$ postoji za svako i .

Napomena 2.2 *Primetimo da je uslovno očekivanje $E(X|Y)$, koje je slučajna promenljiva (a ne broj), merljivo u odnosu na σ -algebru $\mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)$ generisanu skupovima $A_1, A_2, \dots$ i da $\mathcal{F}(A_1, A_2, \dots) = \mathcal{F}(Y)$ (Teorema 1.2). Takodje, primetimo da skup vrednosti koje prima slučajna promenljiva Y (videti (2.3)) ne utiče na raspodelu uslovnog očekivanja $E(X|Y)$, ali događaji $A_1, A_2, \dots$ utiču.*

Primer 2.2 *U Primeru 1.6 je data raspodela slučajnog vektora (X, Y) , kao i marginalne raspodele za X i Y , a u Primeru 1.8 su zatim određene uslovne raspodele za $X|\{Y = k\}$. Korišćenjem tih rezultata, lako se dobija raspodela uslovnog očekivanja od X ako je data slučajna promenljiva Y ,*

$$\begin{aligned} E(X|Y) &: \begin{pmatrix} E(X|Y=1) & E(X|Y=2) & \dots & E(X|Y=6) \\ P(Y=1) & P(Y=2) & \dots & P(Y=6) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5/3 & 10/4 & 29/9 & 31/7 & 50/12 \\ 1/36 & 3/36 & 4/36 & 9/36 & 7/36 & 12/36 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Primer 2.3 *Broj X se slučajno bira iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Zatim se broj Y bira iz istog skupa, ali tako da je manji ili jednak od prethodno izabranog X . Želimo da odredimo $E(X|Y)$.*

Jasno, slučajne promenljive X i Y imaju isti skup vrednosti $R = \{1, 2, 3, 4\}$, ali nisu nezavisne. Da bismo odredili uslovno očekivanje $E(X|Y)$, najpre moramo odrediti zakon raspodele slučajnog vektora (X, Y) , kao i marginalne raspodele za X i Y (videti Tabelu 2.1).

$X \setminus Y$	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	0	1/4
	25/48	13/48	7/48	3/48	1

Tabela 2.1: Zajednička raspodela za (X, Y) iz Primera 2.3.

Definišimo događaje $A_k = \{Y = k\}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Tada je uslovno očekivanje

$$E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}(A_1, A_2, A_3, A_4))$$

jednako

$$E(X|Y) : \begin{pmatrix} E(X|A_1) & E(X|A_2) & E(X|A_3) & E(X|A_4) \\ P(A_1) & P(A_2) & P(A_3) & P(A_4) \end{pmatrix}.$$

Slučajne promenljive $X|A_k$, $k = 1, 2, 3, 4$ se određuju kao što je to pokazano u Primeru 1.9, koristeći formulu

$$P(\{X = i\}|\{Y = j\}) = \frac{P(\{X = i\} \cap \{Y = j\})}{P\{Y = j\}}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Tako dobijamo

$$\begin{aligned} X|Y=1 &: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 12/25 & 6/25 & 4/25 & 3/25 \end{pmatrix}, \\ X|Y=2 &: \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6/13 & 4/13 & 3/13 \end{pmatrix}, \\ X|Y=3 &: \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4/7 & 3/7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

i $X|Y=4 = 4$. Sledi

$$E(X|Y) : \begin{pmatrix} 48/25 & 36/13 & 24/7 & 4 \\ 25/48 & 13/48 & 7/48 & 3/48 \end{pmatrix}.$$

Lako se pokazuje da važi $E(E(X|Y)) = E(X)$. □

Teorema 2.1 Neka je X proizvoljna slučajna promenljiva čije očekivanje postoji i neka je Y diskretna slučajna promenljiva sa skupom vrednosti $\{y_1, y_2, \dots\}$. Tada za svako $A \in \mathcal{F}(Y)$ važi

$$\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP. \quad (2.5)$$

Dokaz. Iz definicije uslovnog očekivanja znamo da je $E(X|Y)$ konstantno na svakom od skupova $A_1, A_2, \dots$, gde $A_i = \{\omega : Y(\omega) = y_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ i da je ono $\mathcal{F}(Y)$ -merljivo. Dakle, važi

$$\int_{A_i} E(X|Y) dP = \int_{Y=y_i} E(X|Y = y_i) dP = \int_{Y=y_i} X dP.$$

Kako je $\mathcal{F}(Y) = \mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)$, onda se svako $A \in \mathcal{F}(Y)$ može zapisati pomoću $A_1, A_2, \dots$ pa sledi (2.5).

Uslovno očekivanje u opštem slučaju

Do sada smo definisali uslovno očekivanje proizvoljne slučajne promenljive pod uslovom da je dat događaj ili diskretna slučajna promenljiva. Dalje, želimo da definiciju uopštimo na slučaj kada je data proizvoljna slučajna promenljiva ili sigma algebra koja može ali ne mora biti generisana slučajnom promenljivom. Motivaciju za tu definiciju dobijamo iz Teoreme 2.1, odnosno jednakosti (2.5) za koju smo pokazali da važi u slučaju kada je uslov diskretna slučajna promenljiva Y .

Definicija 2.3 Neka su $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ slučajne promenljive na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Uslovno očekivanje $E(X|Y)$ je (svaka) proizvoljna, $\mathcal{F}(Y)$ -merljiva slučajna promenljiva koja zadovoljava uslov

$$\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}(Y).$$

U Napomeni 2.2 smo naveli da skup vrednosti slučajna promenljive Y nije bitan, već je bitna σ -algebra koju Y generiše. To nam daje opravdanje za sledeću definiciju.

Definicija 2.4 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ proizvoljna σ -algebra. Ako je $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ integrabilna slučajna promenljiva, $E(X|\mathcal{V})$ definišemo kao proizvoljnu $\mathcal{V}$ -merljivu slučajnu promenljivu takvu da važi

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP \quad \text{za svako } A \in \mathcal{V}. \quad (2.6)$$

Uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{V})$ intuitivno shvatamo na sledeći način. Na osnovu informacija dostupnih iz σ -algebre $\mathcal{V}$, želimo da napravimo procenu za X . Pošto je slučajna promenljiva $E(X|\mathcal{V})$ $\mathcal{V}$ -merljiva, ta procena se može konstruisati na osnovu informacija iz $\mathcal{V}$, a jednakost (2.6) zahteva da naše procene budu konzistentne sa X , barem što se tiče integracije.*

*Ova interpretacija je u saglasnosti sa interpretacijom uslovnog očekivanja datom u [6]

Sledeće osobine su direktna posledica definicije uslovnog očekivanja $E(X|\mathcal{V})$.

1. Iz Definicije 2.3 i 2.4 vidimo da važi

$$E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}(Y)).$$

2. Ako je $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$ trivijalna σ -algebra, onda

$$E(X|\mathcal{V}) = E(X).$$

Dokaz. Ova osobina je direktna posledica Definicije 2.4, jer

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\Omega} E(X) dP$$

i

$$\int_{\emptyset} E(X) dP = \int_{\emptyset} X dP = 0,$$

pa za svako $A \in \mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$ važi

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP.$$

3. Važi $E(E(X|\mathcal{V})|A) = E(X|A)$ za svako $A \in \mathcal{F}$, tj.

$$\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP, \quad A \in \mathcal{F}.$$

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{F}$ takvo da $P(A) > 0$. Tada iz (2.1) i Definicije 2.4 sledi

$$E(E(X|\mathcal{V})|A) = \frac{1}{P(A)} \int_A E(X|\mathcal{V}) dP = \frac{1}{P(A)} \int_A X dP = E(X|A).$$

Teorema 2.2 (Egzistencija i jedinstvenost u odnosu na P) Neka je X integrabilna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Tada za svaku σ -algebru $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{V})$ postoji i jedinstveno je do na skupove P -mere nula.

Dokaz Teoreme 2.2 se može pronaći u [1].

U skladu sa Definicijom 1.13 možemo dati definiciju slučajnih promenljivih koje su jednake do na skupove P -mere nula.

Definicija 2.5 Slučajne promenljive X i Y definisane na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su ekvivalentne do na skupove P -mere nula, što zapisujemo sa $X \stackrel{P}{=} Y$, ako postoji događaj $A \in \mathcal{F}$ takav da za svako $\omega \in \Omega \setminus A$ važi

$$X(\omega) = Y(\omega) \quad \text{ i } \quad P(A) = 0.$$

Ako ne postoji mogućnost zabune, često kažemo da su slučajne promenljive X i Y skoro sigurno jednake.

JEDINSTVENOST USLOVNOG OČEKIVANJA (DO NA SKUPOVE MERE NULA):

Ako su Z, Z^ dve slučajne promenljive na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da $\mathcal{F}(Z), \mathcal{F}(Z^*) \subseteq \mathcal{F}$ i*

$$\int_A X dP = \int_A Z dP = \int_A Z^* dP \quad \text{ za svako } A \in \mathcal{V},$$

onda $Z \stackrel{P}{=} Z^$.*

EGZISTENCIJA USLOVNOG OČEKIVANJA:

Teorema 2.2 tvrdi da za svaku σ -algebru $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$, uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{V})$ postoji, što znači da za svako $\mathcal{V}$ postoji $\mathcal{V}$ -merljiva slučajna promenljiva Z na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takva da

$$\int_A X dP = \int_A Z dP \quad \text{ za svako } A \in \mathcal{V}.$$

Napomena 2.3 Skrenimo pažnju na Definiciju 2.3, gde navodimo da je uslovno očekivanje $E(X|Y)$ svaka slučajna promenljiva koja zadovoljava uslove iz definicije. Kao što smo videli u Teoremi 2.2, uslovno očekivanje je jedinstveno ali do na skupove P -mere nula. Postoji više “verzija” uslovnog očekivanja, ali ono u nekim slučajevima jeste jedinstveno, što ćemo pokazati u nastavku.

Uzmimo sada σ -algebru koja je generisana najviše prebrojivom unijom disjunktnih skupova iz Ω . Može se pokazati da je u tom slučaju uslovno očekivanje jedinstveno.

Lema 2.1 (Jedinstvenost uslovnog očekivanja) Neka je X integrabilna slučajna promenljiva (u odnosu na P) na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $\mathcal{A} = \mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)$ σ -algebra generisana konačnom ili najviše prebrojivom particijom $\{A_1, A_2, \dots\}$ skupa Ω . Tada su svake dve slučajne promenljive Z i Z^* na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ za koje važi

$$\int_A X dP = \int_A Z dP = \int_A Z^* dP \quad \text{ za svako } A \in \mathcal{A}, \quad (2.7)$$

takve da je $Z = Z^*$ ako i samo ako

$$P(A_i) > 0 \quad \text{za svako } A_i \in \mathcal{A}. \quad (2.8)$$

Dodatno,

$$E(X|\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|A_i)I_{A_i} : \begin{pmatrix} E(X|A_1) & E(X|A_2) & \dots \\ P(A_1) & P(A_2) & \dots \end{pmatrix}.$$

Dokaz Leme 2.1. Iz Teoreme 1.2 znamo da je slučajna promenljiva Z merljiva u odnosu na $\mathcal{A}$ ako postoje $a_i \in \bar{\mathbb{R}}, i = 1, 2, \dots$ takvi da

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{A_i}.$$

Pretpostavimo da važi (2.8). Ako su Z i Z^* slučajne promenljive koje zadovoljavaju (2.7), onda postoje konstante $a_i, a_i^*, i = 1, 2, \dots$ takve da

$$Z = \sum_{i=1}^{\infty} a_i I_{A_i} \quad \text{ i } \quad Z^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* I_{A_i}. \quad (2.9)$$

Tada

$$P(\{Z \neq Z^*\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \chi_i, \quad \text{ gde } \chi_i := \begin{cases} 1, & a_i \neq a_i^* \\ 0, & a_i = a_i^* \end{cases}.$$

Iz Teoreme 2.2 (uslovno očekivanje je jedinstveno do na skupove P -mere nula) i Definicije 1.13 (definicija o ekvivalentnim preslikavanjima do na skupove P -mere nula) sledi da je

$$P(\{Z \neq Z^*\}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \chi_i = 0,$$

pa zaključujemo da ne postoji i takvo da $a_i \neq a_i^*$. Sledi $\{Z \neq Z^*\} = \emptyset$, pa $Z = Z^*$ skoro sigurno.

Neka sada $Z = Z^*$, tj. $\{Z \neq Z^*\} = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno: neka postoji j takvo da $P(A_j) = 0$. Definišimo Z i Z^* tako da važi (2.9), gde $a_i = a_i^*$, za sve $i \neq j$ i $a_j^* = a_j + 1$. Sledi da su Z i Z^* ekvivalentne do na skupove P -mere nula i zadovoljavaju (2.7), ali $A_j \neq \emptyset$ i $A_j \subset \{\omega : Z(\omega) \neq Z^*(\omega)\}$. To je u kontradikciji sa pretpostavkom $\{Z \neq Z^*\} = \emptyset$, pa sledi (2.8).

Primer 2.4 Vratimo se na Primer 1.9. Koristeći Lemu 2.1, dobijamo da je uslovno očekivanje slučajne promenljive X pod uslovom da je data σ -algebra generisana događajem A prosta slučajna promenljiva

$$E(X|\mathcal{F}(A)) : \begin{pmatrix} E(X|A) & E(X|\bar{A}) \\ P(A) & P(\bar{A}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 & 4/3 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Lako se proverava da je $E(E(X|\mathcal{F}(A))) = \frac{3}{2} = E(X)$. □

Napomena 2.4 Može se primetiti da je Definicija 2.2 konzistentna sa Lemom 2.1 i da za diskretnu slučajnu promenljivu Y sa skupom vrednosti $\{y_1, y_2, \dots\}$ važi

$$E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}(Y)) = E(X|\mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)),$$

gde je

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i I_{A_i}, \quad A_i = \{\omega \mid Y(\omega) = y_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

2.2 Osobine uslovnog očekivanja

U nastavku su date osobine uslovnog očekivanja koje su posebno korisne prilikom njegovog izračunavanja. Pretpostavljamo da su ispunjeni svi uslovi neophodni da bi navedene operacije bile dobro definisane. Neka su X i Y integrabilne slučajne promenljive definisane na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ proizvoljna σ -algebra.

1. Ako je slučajna promenljiva X $\mathcal{V}$ -merljiva, tada je

$$E(X|\mathcal{V}) = X \quad \text{skoro sigurno.}$$

Dokaz. Sledi direktno iz definicije uslovnog očekivanja. Naime, za svako $A \in \mathcal{V}$ važi

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\mathcal{V}) dP,$$

i X i $E(X|\mathcal{V})$ su obe $\mathcal{V}$ -merljive slučajne promenljive, pa sledi

$$X = E(X|\mathcal{V}) \quad \text{skoro sigurno.}$$

2. Ako su a, b konstante, važi

$$E(aX + bY|\mathcal{V}) = aE(X|\mathcal{V}) + bE(Y|\mathcal{V}) \quad \text{skoro sigurno.}$$

Dokaz. Dokaz sledi iz

$$\begin{aligned} \int_A (aE(X|\mathcal{V}) + bE(Y|\mathcal{V})) dP &= a \int_A E(X|\mathcal{V}) dP + b \int_A E(Y|\mathcal{V}) dP \\ &= a \int_A X dP + b \int_A Y dP \\ &= \int_A (aX + bY) dP \\ &= \int_A E(aX + bY|\mathcal{V}) dP, \quad \text{za svako } A \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

3. Ako je X $\mathcal{V}$ -merljiva i XY integrabilna, onda važi

$$E(XY|\mathcal{V}) = XE(Y|\mathcal{V}) \quad \text{skoro sigurno.} \quad (2.10)$$

Dokaz. Pokazaćemo da ova osobina važi za $\mathcal{V}$ –merljivu prostu slučajnu promenljivu X . Opšti slučaj dobijamo tako što proizvoljnu $\mathcal{V}$ –merljivu slučajnu promenljivu aproksimiramo nizom diskretnih slučajnih promenljivih koji ka njoj uniformno konvergira. Pokažimo prvo da za $A \in \mathcal{V}$ važi

$$E(I_A Y | \mathcal{V}) = I_A E(Y | \mathcal{V}) \quad \text{skoro sigurno.}$$

To sledi iz

$$\int_B I_A E(Y | \mathcal{V}) dP = \int_{A \cap B} E(Y | \mathcal{V}) dP = \int_{A \cap B} Y dP = \int_B I_A Y dP, \quad B \in \mathcal{V}.$$

Kako znamo da $\mathcal{V}$ –merljivu prostu slučajnu promenljivu X sa skupom vrednosti $\{x_1, \dots, x_n\}$ možemo zapisati kao step funkciju,

$$X = \sum_{i=1}^n x_i I_{A_i}, \quad A_i \in \mathcal{V}, \quad i = 1, \dots, n,$$

lako se pokazuje da (2.10) važi i za takvo X .

4. Ako je $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$, onda važi

$$E(E(X | \mathcal{V}) | \mathcal{V}_1) = E(E(X | \mathcal{V}_1) | \mathcal{V}) = E(X | \mathcal{V}_1) \quad \text{skoro sigurno.}$$

Dokaz. Označimo $Z = E(X | \mathcal{V}_1)$. Onda je Z $\mathcal{V}_1$ –merljiva. Iz $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ sledi da je Z i $\mathcal{V}$ –merljiva, pa važi

$$E(Z | \mathcal{V}) = Z \quad \text{skoro sigurno.}$$

Neka je dalje $W = E(X | \mathcal{V})$. Da bismo pokazali da važi

$$E(W | \mathcal{V}_1) = Z \quad \text{skoro sigurno}$$

koristimo da je Z $\mathcal{V}_1$ –merljiva i da za svako $A \in \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$ važi

$$\int_A Z dP = \int_A E(X | \mathcal{V}_1) dP = \int_A X dP = \int_A E(X | \mathcal{V}) dP = \int_A W dP = \int_A E(W | \mathcal{V}_1) dP.$$

5. Ako je $X \leq Y$, onda je

$$E(X | \mathcal{V}) \leq E(Y | \mathcal{V}) \quad \text{skoro sigurno.} \quad (2.11)$$

Dokaz. Ova osobina je posledica osobine: Za $Z \geq 0$ važi

$$E(Z | \mathcal{V}) \geq 0 \quad \text{skoro sigurno.}$$

Za $Z = X - Y$, dobijamo (2.11).

Neka je

$$A_n = \left\{ E(Z | \mathcal{V}) \leq -\frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $Z \geq 0$, onda

$$0 \leq \int_{A_n} Z dP = \int_{A_n} E(Z | \mathcal{V}) dP \leq -\frac{1}{n} P(A_n),$$

pa sledi $P(A_n) = 0$ za svako n . Kako važi

$$\{E(Z | \mathcal{V}) < 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

sledi

$$P\{E(Z | \mathcal{V}) < 0\} = 0.$$

6. Za svaku proizvoljnu σ -algebru $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$ važi

$$E(E(X|\mathcal{V})) = E(X).$$

Dokaz. Ova osobina se dobija direktno iz (2.6) ako je $A = \Omega$.

Napomena 2.5 Neke osobine uslovnog očekivanja su direktna posledica definicije i prethodno navedenih osobina, pa ih nećemo posebno navoditi. Na primer, znamo da je $E(X|\mathcal{V})$ $\mathcal{V}$ -merljiva slučajna promenljiva i da važi

$$E(X|Y) = E(X|\mathcal{F}(Y)) \quad \text{skoro sigurno,}$$

pa sledi

$$E(X|\mathcal{V}) = E(X|E(X|\mathcal{V})) \quad \text{skoro sigurno.}$$

Takođe, iz istog razloga gore navedene osobine važe i u slučaju kada je $\mathcal{V}$ zamenjeno sa $\mathcal{F}(Y)$, odnosno Y .

Napomena 2.6 Uslovno očekivanje ako je data diskretna slučajna promenljiva i Osobina 6 su naročito korisni u slučajevima kada je potrebno odrediti $E(X)$, pri čemu je X po delovima definisana slučajna promenljiva koja ne mora biti u potpunosti poznata. Preciznije, za potpun sistem događaja $\{A_1, \dots, A_n\}$, poznate su uslovne raspodele $X|A_k$, $k = 1, \dots, n$ ili bar njihova očekivanja $E(X|A_k)$. Tada je moguće odrediti uslovno očekivanje $E(X|\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n))$, a samim tim i očekivanje slučajne promenljive X iz

$$E(X) = E(E(X|\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n))).$$

Primer 2.5 Milan i Uroš igraju seriju mini igara. Oni bacaju kockicu za jamb, nezavisno jedan od drugog i ako je suma 5, 6 ili 7, Milan pobeđuje u mini igri. U suprotnom, Uroš pobeđuje. Ukupan pobednik je igrač koji prvi ostvari 2 pobeđe više u mini igrama. Koristeći Osobinu 6 moguće je odrediti očekivani broj mini igara koje su Milan i Uroš igrali.

Označimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja odigran broj mini igara. Verovatnoća da Milan pobeđi u mini igri je $p = \frac{5}{12}$. Dalje, označimo sa Y broj Milanovih pobeđa u prve dve mini igre. Ukoliko je Y jednak 0 ili 2, pobednik je određen u prve dve mini igre pa je i ukupan broj mini igara poznat. A ako je rezultat nerešen u prve dve igre, očekivan ukupan broj igara je jednak $2 + E(X)$, jer se mini igre igraju nezavisno jedna od druge. Dakle, dobijamo

$$\begin{aligned} E(X|\mathcal{F}(Y=0, Y=1, Y=2)) &: \begin{pmatrix} E(X|Y=0) & E(X|Y=1) & E(X|Y=2) \\ P(Y=0) & P(Y=1) & P(Y=2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2+E(X) & 2 \\ \frac{7^2}{12^2} & 2 \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} & \frac{5^2}{12^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pošto važi

$$E(X) = E(E(X|\mathcal{F}(Y=0, Y=1, Y=2))),$$

moguće je odrediti $E(X)$ kao rešenje jednačine

$$E(X) = \frac{98}{144} + \frac{140}{144} + \frac{50}{144} + \frac{70}{144}E(X).$$

Dobijamo da je $E(X) = \frac{144}{37} \approx 3.89$. □

Primer 2.6 Sistem svakog dana sakuplja određenu količinu podataka i sabira novac zarađen tog dana. Zatim program klasifikuje prethodni dan u kategoriju. Svaki dan može da se klasifikuje kao Tip i , $i = 1, \dots, k$. Poznato je da je dan klasifikovan kao Tip i sa verovatnoćom p_i i da važi

$$\sum_{i=1}^k p_i^2 = 0.5.$$

Takođe, očekivana zarada tokom dana Tipa i je $\ln\left(\frac{a}{e^{p_i}}\right)$ miliona, gde $a > 1$. Želimo da izračunamo očekivanu zaradu tokom proizvoljno izabranog dana.

Označimo sa A_i događaj da je dan klasifikovan kao Tip i , $i = 1, \dots, k$, gde $P(A_i) = p_i$. Dalje, neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zaradu tokom dana. Data je očekivana zarada tokom dana Tipa i ,

$$E(X|A_i) = \ln\left(\frac{a}{e^{p_i}}\right) = \ln a - p_i.$$

Uslovno očekivanje slučajne promenljive X ako je data σ -algebra generisana događajima $A_1, \dots, A_k$ je poznato

$$E(X|\mathcal{F}(A_1, \dots, A_k)) = \begin{cases} E(X|A_1), & \text{ako se desio događaj } A_1, \\ \dots \\ E(X|A_k), & \text{ako se desio događaj } A_k. \end{cases}$$

Dakle, iz $E(X) = E(E(X|\mathcal{F}(A_1, \dots, A_k)))$ moguće je odrediti očekivanu zaradu tokom proizvoljno izabranog dana,

$$E(X) = \sum_{i=1}^k p_i(\ln a - p_i) = \ln a \sum_{i=1}^k p_i - \sum_{i=1}^k p_i^2 = \ln a - 0.5.$$

□

Definicija 2.6 (Slučajna promenljiva nezavisna od σ -algebre) Neka je X integrabilna slučajna promenljiva definisana na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i neka je $\mathcal{G}$ σ -algebra takva da $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Kažemo da je X nezavisna od $\mathcal{G}$ ako važi

$$E(X|\mathcal{G}) = E(X) \quad \text{skoro sigurno.}$$

Napomena 2.7 Neka su slučajne promenljive X i Z nezavisne. Tada je X nezavisna od $\mathcal{F}(Z)$ i važi

$$E(X|Z) = E(X|\mathcal{F}(Z)) = E(X).$$

Primer 2.7 Slučajna promenljiva X iz Primera 1.9 nije merljiva u odnosu na σ -algebru $\mathcal{F}(A)$, jer bi u tom slučaju za svako $S \in \mathcal{B}$ moralo da važi $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}(A)$. Međutim, $X^{-1}(\{1\}) = B \notin \mathcal{F}(A)$. Isto se može zaključiti koristeći Osobinu 1., jer $E(X|\mathcal{F}(A)) \neq X$ skoro sigurno. Sa druge strane, X jeste $\mathcal{F}(B)$ -merljivo pa samim tim važi $\mathcal{F}(B) = \mathcal{F}(X)$.

Navedimo sada jedan primer kada slučajna promenljiva jeste merljiva u odnosu na σ -algebru koja se posmatra.

Primer 2.8 Novčić se baca sve dok prvi put ne padne grb. Označimo sa A_i događaj da je grb prvi put pao u i -tom po redu bacanju, gde $i = 1, 2, \dots$, a sa A događaj da je pao grb. Jasno $A_i = \underbrace{\bar{A} \dots \bar{A}}_{i-1 \text{ put}} A$.

Neka slučajna promenljiva Y uzima vrednost -1 ako je grb prvi put pao u neparnom po redu bacanju, a 1 ako je prvi put pao u parnom po redu bacanju. Važi

$$P\{Y = -1\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1}\right\} = \frac{2}{3}, \quad P\{Y = 1\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Lako se pokazuje da $Y|A_{2n} = 1$, $Y|A_{2n-1} = -1$, pa je uslovno očekivanje $E(Y|\mathcal{F}(A_1, A_2, \dots))$ skoro sigurno jednako Y . Isto se može zaključiti i iz činjenice da je slučajna promenljiva Y $\mathcal{F}(A_1, A_2, \dots)$ -merljiva. To sledi iz

$$Y^{-1}(\{-1\}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \in \mathcal{F}(A_1, A_2, \dots),$$

$$Y^{-1}(\{1\}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \in \mathcal{F}(A_1, A_2, \dots).$$

□

Primer 2.9 Neka su slučajne promenljive X i Y nezavisne i neka je Φ Borelova funkcija. Posmatramo uslovno očekivanje $E(X^2\Phi(Y)|\mathcal{F}(X))$. Slučajna promenljiva X^2 je $\mathcal{F}(X)$ -merljiva, a iz nezavisnosti X i Y sledi nezavisnost $\Phi(Y)$ od σ -algebre $\mathcal{F}(X)$. Koristeći osobine 2, 3 i Definiciju 2.6, dobijamo

$$E(X^2\Phi(Y) + 2X|\mathcal{F}(X)) = X^2E(\Phi(Y)|\mathcal{F}(X)) + 2X = X^2E(\Phi(Y)) + 2X.$$

□

Primer 2.10 Nakon branja radnici vrše selekciju jabuka koje zadovoljavaju kriterijume za izvoz, nezavisno jednu od druge. Označimo sa X_k slučajnu promenljivu koja uzima vrednost 1 ukoliko k -ta pregledana jabuka zadovoljava kriterijume za izvoz (poznato je da je kod ovogodišnjeg roda verovatnoća da se to desi $p \in (0, 1)$), a u suprotnom uzima vrednost 0 . Dakle, X_k , $k = 1, \dots, n$ su nezavisne slučajne promenljive sa raspodelama

$$X_k : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Neka slučajna promenljiva S_n predstavlja broj jabuka selektovanih za izvoz od ukupno n pregledanih. Ona se može predstaviti kao zbir nezavisnih slučajnih promenljivih sa binomnom raspodelom, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, pa važi $S_n : \mathcal{B}(n, p)$.

- (a) Odredimo sada zakone raspodela slučajnih promenljivih $S_n|\{X_n = 0\}$ i $S_n|\{X_n = 1\}$. Ako je $X_n = 0$, onda iz $S_n = k$, $k = 0, \dots, n-1$, sledi $S_{n-1} = k$, pa zaključujemo da

$$S_n|\{X_n = 0\} : \mathcal{B}(n-1, p).$$

Slično, ako je $X_n = 1$, onda iz $S_n = k$, $k = 1, \dots, n$, sledi $S_{n-1} = k-1$ i

$$P(\{S_n = k\}|\{X_n = 1\}) = \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Primetimo da je $P(\{S_n = n\}|\{X_n = 0\}) = 0$ i $P(\{S_n = 0\}|\{X_n = 1\}) = 0$.

(b) Odredimo zakone raspodela slučajnih promenljivih $X_n|\{S_n = k\}$, $k = 0, \dots, n$ i

$$E(X_n|\{S_n = k\}), \quad k = 0, \dots, n.$$

Naime, za $k = 0, \dots, n-1$ imamo

$$P(\{X_n = 0\}|\{S_n = k\}) = \frac{P(\{S_n = k\}|\{X_n = 0\})P\{X_n = 0\}}{P(\{S_n = k\})} = \frac{n-k}{n}.$$

Gore dobijeni rezultat se može primeniti i u slučaju $k = n$, jer važi

$$P(\{X_n = 0\}|\{S_n = k\}) = \frac{n-n}{n} = 0.$$

Dalje,

$$P(\{X_n = 1\}|\{S_n = k\}) = 1 - P(\{X_n = 0\}|\{S_n = k\}) = \frac{k}{n}, \quad k = 0, \dots, n,$$

pa važi $E(X_n|\{S_n = k\}) = \frac{k}{n}$, $k = 0, \dots, n$.

(c) Koristeći rezultat pod (b) možemo odrediti uslovno očekivanje

$$E(X_n|S_n) : \begin{pmatrix} E(X_n|\{S_n = 0\}) & \cdots & E(X_n|\{S_n = n\}) \\ P\{S_n = 0\} & \cdots & P\{S_n = n\} \end{pmatrix} = \frac{S_n}{n}.$$

Vidimo da se slučajna promenljiva $E(X_n|S_n)$ može predstaviti kao funkcija od S_n , što je očekivani rezultat, jer je poznato da je $E(X_n|S_n)$ $\mathcal{F}(S_n)$ -merljiva slučajna promenljiva.

(d) Lako se proverava da $E(E(X_n|S_n)) = E(X_n) = p$. □

U nastavku navodimo Jensenovu nejednakost koja će biti korisna kasnije.

Teorema 2.3 (Jensenova nejednakost) Neka je $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija i neka je ξ integrabilna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takva da je $\varphi(\xi)$ takođe integrabilna. Tada za svaku σ -algebru $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ važi

$$\varphi(E(\xi|\mathcal{G})) \leq E(\varphi(\xi)|\mathcal{G}) \quad \text{skoro sigurno.}$$

2.3 Uslovna verovatnoća u odnosu na sigma algebru

Na sličan način kao što je postepeno definisano uslovno očekivanje slučajne promenljive ako je data proizvoljna sigma algebra, može se definisati uslovna verovatnoća događaja ako je data sigma algebra.

Posmatramo konačnu particiju $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ skupa Ω takvu da je

1. $P(G_i) > 0$ za svako $i = 1, \dots, m$.
2. $G_i \cap G_j = \emptyset$ za svako $i \neq j$.
3. $\sum_{i=1}^m G_i = \Omega$,

tj. $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ čine potpun sistem događaja. Kako je

$$P(A|G_i) = \frac{P(AG_i)}{P(G_i)},$$

uslovnu verovatnoću događaja ako je data sigma algebra generisana događajima $G_1, \dots, G_m$, definišemo na sledeći način

$$P(A|\mathcal{F}(G_1, G_2, \dots, G_m))(\omega) = \begin{cases} P(A|G_1), & \text{ako } \omega \in G_1 \\ \vdots & \vdots \\ P(A|G_m), & \text{ako } \omega \in G_m \end{cases}, \quad \omega \in \Omega.$$

Označimo sa $\mathcal{G}$ sigma algebru generisanu događajima $\{G_1, G_2, \dots, G_m\}$, tj.

$$\mathcal{G} := \mathcal{F}(G_1, G_2, \dots, G_m).$$

Vidimo da je uslovna verovatnoća $P(A|\mathcal{G})$ (diskretna) slučajna promenljiva, a ne broj. Koristeći definiciju očekivanja diskretne slučajne promenljive se lako pokazuje da važi

$$E(P(A|\mathcal{G})) = P(A).$$

Takođe, može se pokazati (videti [17]) da za svako $H \in \mathcal{G}$ važi

$$E(I_H P(A|\mathcal{G})) = P(A \cap H),$$

pri čemu je I_H indikator događaja H . Ova osobina služi kao motivacija za definiciju uslovne verovatnoće događaja u odnosu na proizvoljnu sigma algebru.

Definicija 2.7 *Dat je prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i proizvoljna sigma algebra $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Uslovna verovatnoća $P(A|\mathcal{H})$ događaja $A \in \mathcal{F}$ u odnosu na sigma algebru $\mathcal{H}$ je $\mathcal{H}$ -merljiva slučajna promenljiva koja za svako $H \in \mathcal{H}$ zadovoljava uslov*

$$E(I_H P(A|\mathcal{H})) = P(A \cap H).$$

Kao i uslovno očekivanje, uslovna verovatnoća u odnosu na sigma algebru je jedinstvena do na skupove P -mere nula.

Kao što smo pokazali u Primeru 2.1, ako su data dva događaja A i B i $P(B) > 0$, važi

$$P(A|B) = E(I_A|B),$$

što nagoveštava da uslovnu verovatnoću $P(A|\mathcal{H})$ možemo posmatrati kao specijalan slučaj uslovnog očekivanja. Zbog toga se u literaturi uslovna verovatnoća događaja u odnosu na σ -algebru često definiše na sledeći način:

Definicija 2.8 *Ako je $\mathcal{V}$ σ -algebra, takva da $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{F}$, tada je sa*

$$P(A|\mathcal{V}) := E(I_A|\mathcal{V}) \quad \text{za svako } A \in \mathcal{F}$$

definisana uslovna verovatnoća događaja A u odnosu na $\mathcal{V}$.

2.4 Zadaci

U ovom delu dati su zadaci za vežbu uz odabrana rešenja. Čitaoci treba da imaju u vidu da će izbor zadataka u kojima se primenjuje uslovno očekivanje i njegove osobine biti obogaćen u nastavku uvođenjem pojma stohastičkih procesa i martingala.

ZADATAK 2.1 *Studenti čekaju rezultate testa koji su radili. Nastavnik im je rekao da će rezultate moći da vide za tačno 2 sata sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ ili za tačno 6 sati sa verovatnoćom $\frac{1}{3}$. Inače, rezultate će dobiti tokom časa koji će početi za tačno 20 sati i trajati 2 sata (smatra se da je u tom slučaju rezultate mogu da dobiju bilo kada u toku dva sata). Neka je sa X označena proizvoljna slučajna promenljiva, nezavisna od slučajne promenljive Y koja predstavlja vreme čekanja studenata. Izračunati $E(Y|X + \text{sgn}X)$.*

Rešenje: Koristeći uslovno očekivanje ako je data slučajna promenljiva diskretnog tipa dobijamo $E(Y) = 6.5$, a kako su X i Y nezavisne, sledi

$$E(Y|X + \text{sgn}X) = E(Y|X) = E(Y) = 6.5.$$

□

ZADATAK 2.2 *Data je $\mathcal{V}$ -merljiva slučajna promenljiva X . Poznato je da*

$$E(X|\mathcal{V}) : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

(a) *Odrediti X i $E(X)$.*

(b) *Dokazati da ne postoji Borelova funkcija f takva da $Y = f(X)$ ako*

$$E(Y|\mathcal{V}) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$\text{ i } F_Y(3) = \frac{1}{2}.$$

Rešenje:

(a) Kako je X $\mathcal{V}$ -merljiva, važi $X = E(X|\mathcal{V})$. Dodatno

$$E(X) = E(E(X|\mathcal{V})) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}.$$

(b) Ako je $Y = f(X)$, onda je i Y $\mathcal{V}$ -merljiva, pa sledi $E(Y|\mathcal{V}) = Y$. U tom slučaju bismo imali

$$F_Y(3) = P(Y < 3) = P(Y = -1) + P(Y = 1) = -\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{2},$$

pa sledi da ne postoji Borelova funkcija f takva da Y zadovoljava uslove zadatka i da je $Y = f(X)$. □

ZADATAK 2.3 Igra se igra na sreću. Mašina redom izbacuje cifre 0 i 1 na ekranu sa verovatnoćama $1 - p$ i p , redom. Igra se završava kada se prvi put pojavi 0. Ako je ulog u igri jednak $a > 0$, osvojena suma je jednaka ukupnom zbiru svih cifara koje su se pojavile na ekranu u toj igri. Odrediti očekivani iznos koji će igrač osvojiti u jednoj igri? Izračunati verovatnoću p takvu da je igra fer (ulog je jednak dobitku).

Rešenje: Koristeći definiciju uslovnog očekivanja $E(N|\mathcal{F}(A))$, gde je N slučajna promenljiva koja predstavlja broj cifara, a A je događaj da je prva cifra nula, dobijamo da je očekivani iznos koji će igrač osvojiti je $E(N) - 1 = \frac{1}{1-p} - 1 = \frac{p}{1-p}$. Igra je fer ako je $E(N) - 1 = a$. Dakle, verovatnoća da je igra fer je $p = \frac{a}{1+a}$. $\square$

ZADATAK 2.4 U razredu ima n studenata i rezultat i -tog studenta na testu je x_i . Studenti su podeljeni u k disjunktih sekcija $A_1, \dots, A_k$. Neka je sa n_s označen broj studenata u sekciji s . Tada je prosečan (očekivan) rezultat u sekciji s jednak

$$m_s = \frac{1}{n_s} \sum_{i \in A_s} x_i.$$

Odrediti očekivan rezultat slučajno izabranog studenta i dokazati da dobijena vrednost ne zavisi od m_s i n_s , $s = 1, \dots, k$.

Rešenje: Važi

$$E(X) = E(E(X|\mathcal{F}(A_1, \dots, A_k))) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \sum_{j \in A_i} x_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$\square$

ZADATAK 2.5 U jednom kazinu ljudi imaju mogućnost da zavrte točak sreće za 100 evra. Igrač može dobiti jednu od ukupno 30 nagrada, od čega polovina ima vrednost 30 evra, a 14 nagrada vredni između 60 i 120 evra. Takođe postoji i *jackpot* nagrada kojom igrač osvaja 900 evra i priliku da još jednom zavrte točak. Svaki igrač ima jednaku verovatnoću da osvoji bilo koju od 30 nagrada. Odrediti očekivanu vrednost nagrade koju prosečan igrač osvoji sa uloženi 100 evra.

ZADATAK 2.6 Date su dve slučajne promenljive X i Y , pri čemu je Y nenegativna. Pronaći Borelovu funkciju f takvu da važi

$$E\left(E(E(X|Y) + E(X|f(X)))|Y\right) + E(Xf(Y^2)|\mathcal{F}(Y)) - YE(X|Y) = 2E(X).$$

Rešenje: Koristeći osobine uslovnog očekivanja dobijamo

$$\begin{aligned} & E\left(E(E(X|Y) + E(X|f(X)))|Y\right) + E(Xf(Y^2)|\mathcal{F}(Y)) - YE(X|Y) \\ &= E\left(E(E(X|Y)) + E(E(X|f(X)))|Y\right) + f(Y^2)E(X|Y) - YE(X|Y) \\ &= E(X) + E(X) + f(Y^2)E(X|Y) - YE(X|Y). \end{aligned}$$

Dakle, $f(Y^2) = Y$, pa sledi $f(x) = \sqrt{x}$, jer je Y nenegativna. $\square$

3. POJAM I OSNOVNA SVOJSTVA STOHAISTIČKIH PROCESA

U matematičkim modelima koji opisuju realne probleme izuzetno je važno posmatrati promene promenljivih kroz vreme. Zbog toga je neophodno uvesti pojam stohastičkog procesa koji predstavlja kolekciju slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća.

3.1 Pojam stohastičkog procesa

Neka je dat prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zamislamo da se u svakom vremenskom trenutku $t \in I$, gde $I = [t_0, T]$, posmatra neka karakteristika X razmatranog sistema koji je slučajnog karaktera. Dakle, $X(t)$ je slučajna promenljiva za svako $t \in I$. Tada na skup svih slučajnih promenljivih $\{X(t)\}_{t \in I}$ možemo gledati kao na slučajnu veličinu koja se menja u vremenu, tj. dobijamo slučajnu funkciju vremena. U tom slučaju, familiju $\{X(t)\}_{t \in I}$ zovemo **stohastički (slučajni) proces**.

Definicija 3.1 *Stohastički (slučajni) proces $\{X(t), t \in I\} = \{X(t)\}_{t \in I}$ je familija slučajnih promenljivih definisana na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Skup I nazivamo parametarski skup, a skup svih mogućih vrednosti stohastičkog procesa $\{X(t), t \in I\}$ nazivamo skup stanja.*

Napomena 3.1 *Slučajni proces $\{X(t), t \in I\} = \{X(t, \omega)\}_{t \in I}$ je zapravo funkcija dva parametra, $t \in I$ i $\omega \in \Omega$, ali se ω često izostavlja u zapisu. Kraće zapisujemo kao $\{X_t\}_{t \in I}$ ako je poznat parametarski skup.*

Ukoliko ne postoji mogućnost zabune, umesto $\{X_t, t \in I\}$, često ćemo izostavljati vitičaste zagrade i stohastički proces zapisivati samo sa $X(t)$ ili X_t .

Stohastički proces može biti diskretan ili neprekidan u odnosu na vreme, u zavisnosti od toga da li je parametarski skup I najviše prebrojiv ($I = \mathbb{Z}$) ili neprebrojiv ($I = \mathbb{R}$).

U ovoj knjizi će fokus biti na jednodimenzionalnim stohastičkim procesima (X_t je za svako fiksirano t jednodimenzionalna slučajna promenljiva) sa realnim skupom stanja i to u nastavku neće biti posebno naznačeno.

Primeri 3.1 *Sada navodimo neke primere stohastičkih procesa.*

- (1) *Brzina aviona. Umesto da posmatramo brzinu V kao konstantnu veličinu, mi posmatramo funkciju $V = V(t)$, $t \in I$, jer razni faktori utiču na to da se brzina aviona menja kroz vreme (ali je blizu neke komandovane brzine).*

- (2) *Potresi zemljišnog tla, promene pritiska ili temperature u atmosferi u zavisnosti od vremena.*
- (3) *Cene akcija na berzi koje se menjaju sa vremenom.*
- (4) *Razni procesi koji se pojavljuju u teoriji masovnog opsluživanja i upravljanja.* □

U gore navedenim primerima argument t je vreme, što ne mora uvek biti slučaj, npr. temperatura vazduha se može posmatrati kao slučajna funkcija visine. Takođe, proces ne mora biti funkcija jednog nego i više parametara.

Kao što je gore rečeno, stohastički proces $\{X(t, \omega), t \in I\}$ posmatramo kao funkciju dve promenljive definisanu na $I \times \Omega$. Važi sledeće:

- i) Ako fiksiramo $t \in I$, dobijemo jednu slučajnu promenljivu $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
- ii) Ako fiksiramo $\omega \in \Omega$, dobijamo realnu funkciju, $t \rightarrow X(t, \omega)$, definisanu na I , i ona se zove trajektorija (realizacija) stohastičkog procesa $\{X(t)\}$.

Neka, na primer avion treba da se kreće konstantnom brzinom V_0 u toku vremenskog intervala $[t_0, T]$. Zbog dejstva raznih slučajnih faktora njegova brzina će varirati oko V_0 . Svaki drugi avion koji treba da se kreće po istim zakonima imaće drugu realizaciju (trajektoriju), te na taj način dobijamo familiju trajektorija.

3.2 Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa

Već smo napomenuli da za svako fiksirano $t \in I$ dobijamo slučajnu promenljivu koja se zove **zasek** ili **sečenje** stohastičkog procesa u trenutku t . Ta slučajna promenljiva ima funkciju raspodele

$$F(t, x) = F_{X_t}(x) = P\{X_t < x\} \quad \text{za fiksirano } t.$$

Primer 3.1 *Stohastički proces $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ dat je sa*

$$X(t) = X_t = at + X_0, \quad a \in \mathbb{R},$$

pri čemu je X_0 jednodimenzionalna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $F_{X_0}(x)$. Za svako fiksirano t dobijamo funkciju raspodele slučajne promenljive X_t

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= F(t, x) = P\{X_t < x\} = P\{at + X_0 < x\} \\ &= P\{X_0 < x - at\} = F_{X_0}(x - at). \end{aligned}$$

□

Primer 3.2 *Posmatramo stohastički proces*

$$X_t = a + tX_0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

X_0 je slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele $F_{X_0}(x)$. Funkcija raspodele stohastičkog procesa X_t je

$$F_{X_t}(x) = P\{X_t < x\} = P\{a + tX_0 < x\} = P\{tX_0 < x - a\}.$$

Kako je $t \in \mathbb{R}$, da bismo je bliže odredili neophodno je razmotriti 3 slučaja:

1) Ako je $t > 0$, onda

$$F_{X_t}(x) = P\left\{X_0 < \frac{x-a}{t}\right\} = F_{X_0}\left(\frac{x-a}{t}\right)$$

2) Ako je $t < 0$, onda

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= P\{tX_0 < x - a\} = P\left\{X_0 > \frac{x-a}{t}\right\} \\ &= 1 - P\left\{X_0 \leq \frac{x-a}{t}\right\} = 1 - \left(P\left\{X_0 = \frac{x-a}{t}\right\} + P\left\{X_0 < \frac{x-a}{t}\right\}\right) \\ &= 1 - P\left\{X_0 = \frac{x-a}{t}\right\} - F_{X_0}\left(\frac{x-a}{t}\right) \\ &= 1 - c - F_{X_0}\left(\frac{x-a}{t}\right). \end{aligned}$$

Ako je slučajna promenljiva apsolutno neprekidnog tipa, konstanta $c = P\left\{X_0 = \frac{x-a}{t}\right\}$ je jednaka nuli.

3) Ako je $t = 0$, onda je $X_t = a$ i važi

$$F_{X_t}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ 1, & x > a. \end{cases}$$

□

Ovi jednodimenzionalni zakoni raspodele nisu dovoljni za karakterizaciju stohastičkog procesa, osim u nekim specijalnim slučajevima. U opštem slučaju, neophodno je poznavati višedimenzionalne zakone raspodela, odnosno konačno-dimenzionalne raspodele procesa.

Kao što za svako fiksirano $t \in I$ dobijamo (jednodimenzionalno) sečenje stohastičkog procesa $\{X_t, t \in I\}$, ako fiksiramo n -torku $(t_1, \dots, t_n)$, $t_i \in I$, $i = 1, \dots, n$, dobijamo n -dimenzionalno sečenje $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ tog procesa, koje ima funkciju raspodele.

Definicija 3.2 Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ date su sa:

$$\begin{aligned} F_t(x) &= F_1(t; x) = P\{X_t < x\} \\ F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &= F_2(t_1, t_2; x_1, x_2) = P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2\} \\ &\vdots \\ F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) &= F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = P\{X_{t_1} < x_1, \dots, X_{t_n} < x_n\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

gde su $t, t_1, t_2, \dots, t_n \in I$ i $x, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Primer 3.3 Dvodimenzionalne raspodele stohastičkog procesa X_t iz Primera 3.1 su:

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) &= P\{X_{t_1} < x_1, X_{t_2} < x_2\} \\ &= P\{at_1 + X_0 < x_1, at_2 + X_0 < x_2\} \\ &= P\{X_0 < x_1 - at_1, X_0 < x_2 - at_2\} \\ &= P\{X_0 < \min\{x_1 - at_1, x_2 - at_2\}\} \\ &= F_{X_0}(\min\{x_1 - at_1, x_2 - at_2\}). \end{aligned}$$

□

Konačno-dimenzionalne raspodele stohastičkih procesa, između ostalog, zadovoljavaju sledeća dva uslova:

1. USLOV SIMETRIJE:

Ako je $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ permutacija brojeva $1, 2, \dots, n$, tada je

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}).$$

2. USLOV SAGLASNOSTI:

Za $m < n$ i proizvoljne $t_{m+1}, \dots, t_n \in I$ važi

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$

Teorema 3.1 (Fundamentalna teorema Kolmogorova) *Za svaku familiju funkcija raspodela koje zadovoljavaju uslove simetrije i saglasnosti, postoji prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i proces definisan na njemu koji ima date funkcije raspodela kao svoje konačno-dimenzionalne raspodele.*

Fundamentalna teorema Kolmogorova tvrdi ekvivalenciju dva koncepta, tj. da je svejedno da li ćemo proces definisati preko slučajnih promenljivih ili preko familija raspodela koje zadovoljavaju uslov simetrije i uslov saglasnosti.

3.3 Neka svojstva stohastičkih procesa

Definicija 3.3 *Srednja vrednost stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$, odnosno očekivanje procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ je funkcija $m_X : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ definisana sa*

$$m_X(t) = m(t) = E(X_t).$$

Definicija 3.4 *Autokovarijansna funkcija ili korelaciona funkcija stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ je*

$$K_X(t, s) = K(t, s) = E((X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s))) = E(X_t X_s) - m_X(t)m_X(s).$$

Definicija 3.5 *Uzajamna korelaciona funkcija dva procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ i $\{Y_t, t \in [t_0, T]\}$ je*

$$K_{XY}(t, s) = E((X_t - m_X(t))(Y_s - m_Y(s))).$$

Definicija 3.6 *Disperzija stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ je*

$$D_X(t) = D(t) = K_X(t, t) = K(t, t) = E(X_t^2) - m_X^2(t) = E(X_t^2) - E^2(X_t).$$

Definicija 3.7 *Koeficijent korelacije stohastičkog procesa $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ je*

$$\rho_X(t, s) = \rho(t, s) = \frac{K_X(t, s)}{\sqrt{D(t)D(s)}}.$$

Primer 3.4 Neka je stohastički proces $\{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ dat sa

$$X_t = U + tV, \quad t \in \mathbb{R},$$

pri čemu su U i V nezavisne slučajne promenljive.

- a) Pokažimo prvo da su trajektorije ovog procesa prave u ravni. Znamo $X_t(w) = X(t, w) = U(w) + tV(w)$ i

$$X : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{tj. } X : (t, w) \mapsto X(t, w).$$

Trajektorija stohastičkog procesa X_t za fiksirano $w \in \Omega$ je oblika

$$X_w(t) = U(w) + tV(w), \quad U(w), V(w) \in \mathbb{R},$$

pa zaključujemo da je $X_w : t \mapsto U(w) + tV(w)$ prava u ravni. Primetimo da nam za sada nije trebala nezavisnost promenljivih U i V .

- b) Odredimo samo $m_X(t)$, $K_X(t, s)$ i $D_X(t)$. Srednja vrednost stohastičkog procesa X_t je

$$m_X(t) = m(t) = E(X_t) = E(U + tV) = E(U) + tE(V).$$

Sučajne promenljive U i V su nezavisne, pa je autokovarijansna funkcija $K_X(t, s)$ jednaka

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E(X_t X_s) - m(t)m(s) \\ &= E((U + tV)(U + sV)) - (E(U) + tE(V))(E(U) + sE(V)) \\ &= E(U^2 + sUV + tUV + tsV^2) - (E^2(U) + (t + s)E(U)E(V) + tsE^2(V)) \\ &= E(U^2) - E^2(U) + (t + s)E(U)E(V) - (t + s)E(U)E(V) + tsE(V^2) - tsE^2(V) \\ &= D(U) + tsD(V), \end{aligned}$$

pod uslovom da $D(U)$ i $D(V)$ postoje.

Disperzija stohastičkog procesa X_t je $D_X(t) = K_X(t, t) = D(U) + t^2D(V)$.

Specijalno, ako U i V imaju $\mathcal{U}(0, 1)$ raspodelu, imamo

$$\begin{aligned} E(U) &= E(V) = \frac{1}{2}, \quad D(U) = D(V) = \frac{(1-0)^2}{12} = \frac{1}{12}, \\ m_X(t) &= \frac{1}{2} + t\frac{1}{2} = \frac{1+t}{2}, \quad K_X(t, s) = \frac{1+st}{12}, \quad D_X(t) = \frac{1+t^2}{12}. \end{aligned}$$

□

Primer 3.5 Dat je stohastički proces $X_t = tX_0 + \lambda$, gde je $X_0 : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ i $\lambda = \text{const}$.

Znamo da ako $X : \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ i $Y = aX + b$, onda $Y : \mathcal{N}(am + b, a^2\sigma^2)$. Sledi, $X_t = tX_0 + \lambda : \mathcal{N}(tm + \lambda, t^2\sigma^2)$, odakle dobijamo funkciju gustine stohastičkog procesa X_t ,

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t^2 \sigma^2}} e^{-\frac{(x - tm - \lambda)^2}{2t^2 \sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kako su slučajne promenljive X_0 i λ nezavisne, jer je $\lambda = \text{const}$, koristeći Primer 3.4 dobijamo srednju vrednost $m(t)$, autokovarijansnu funkciju $K(t, s)$ i disperziju $D(t)$ datog procesa,

$$\begin{aligned} m(t) &= tE(X_0) + \lambda = tm + \lambda, \\ K(t, s) &= D(\lambda) + tsD(X_0) = 0 + ts\sigma^2 = ts\sigma^2, \\ D(t) &= K(t, t) = t^2\sigma^2. \end{aligned}$$

□

Primer 3.6 Slučajne promenljive X i Y su nezavisne, pri čemu je X određena gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{4}{3} - x^2, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1) \end{cases}$$

i $Y : \mathcal{U}(0, \pi)$. Odredimo očekivanje, autokovarijansnu funkciju i disperziju stohastičkog procesa datog sa

$$U_t = X \cos(t - Y), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Znamo da je gustina raspodele slučajne promenljive Y data sa

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & y \in (0, \pi) \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Očekivanje stohastičkog procesa U_t je

$$\begin{aligned} m_U(t) &= E(U_t) = E(X \cos(t - Y)) = E(X)E(\cos(t - Y)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t - y) \varphi_Y(y) dy \\ &= \int_0^1 x \left(\frac{4}{3} - x^2\right) dx \cdot \int_0^\pi \cos(t - y) \frac{1}{\pi} dy \\ &= \left(\frac{4}{3} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\pi} \int_{t-\pi}^t \cos x dx = \frac{5}{12\pi} \sin x \Big|_{t-\pi}^t \\ &= \frac{5}{12\pi} (\sin t - \sin(t - \pi)) = \frac{5}{12\pi} \cdot 2 \sin t = \frac{5}{6\pi} \sin t. \end{aligned}$$

Autokovarijansna funkcija procesa U_t je

$$K_U(t, s) = E(U_t U_s) - m_U(t) m_U(s),$$

gde

$$\begin{aligned} E(U_t U_s) &= E\left(X \cos(t - Y) X \cos(s - Y)\right) = E(X^2) E\left(\cos(t - Y) \cos(s - Y)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi_X(x) dx \cdot E\left(\frac{1}{2} \cos(t + s - 2Y) + \frac{1}{2} \cos(t - s)\right) \\ &= \int_0^1 x^2 \left(\frac{4}{3} - x^2\right) dx \cdot \left(\int_0^\pi \frac{1}{2\pi} \cos(t + s - 2y) dy + \frac{\cos(t - s)}{2}\right) \\ &= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \int_{t+s-2\pi}^{t+s} \cos x dx + \frac{\cos(t - s)}{2}\right) \\ &= \frac{11}{45} \left(0 + \frac{\cos(t - s)}{2}\right) = \frac{11}{90} \cos(s - t). \end{aligned}$$

Tada

$$\begin{aligned} K_U(t, s) &= \frac{11}{90} \cos(s - t) - \left(\frac{5}{6\pi}\right)^2 \sin t \sin s, \\ D_U(t) &= K_U(t, t) = \frac{11}{90} \cos 0 - \left(\frac{5}{6\pi}\right)^2 \sin^2 t = \frac{11}{90} - \left(\frac{5}{6\pi}\right)^2 \sin^2 t. \end{aligned}$$

□

Primer 3.7 Neka su U i V nezavisne slučajne promenljive takve da

$$U : \mathcal{U}(-2, 2), \quad V : \mathcal{N}(0, 1).$$

Pronađimo očekivanje, autokovarijansnu funkciju i disperziju stohastičkog procesa datog sa

$$X_t = V \cdot 2^t + U \cdot t^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Očekivanje stohastičkog procesa X_t je

$$m_X(t) = E(X_t) = E(V \cdot 2^t + U \cdot t^2) = 2^t E(V) + t^2 E(U) = 0.$$

Kako znamo

$$\begin{aligned} U : \mathcal{U}(-2, 2) \quad & \text{pa } E(U) = 0, \quad D(U) = \frac{4}{3} = E(U^2), \\ V : \mathcal{N}(0, 1) \quad & \text{pa } E(V) = 0, \quad D(V) = 1 = E(V^2), \end{aligned}$$

dobijamo autokovarijansnu funkciju

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E(X_t X_s) = E\left((V \cdot 2^t + U \cdot t^2)(V \cdot 2^s + U \cdot s^2)\right) \\ &= 2^{t+s} E(V^2) + t^2 2^s E(U)E(V) + 2^t s^2 E(U)E(V) + t^2 s^2 E(U^2) \\ &= 2^{t+s} \cdot 1 + (st)^2 \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= 2^{t+s} + \frac{4}{3}(st)^2, \\ D_X(t) &= K_X(t, t) = 2^{2t} + \frac{4}{3}t^4 = 4^t + \frac{4}{3}t^4. \end{aligned}$$

□

3.4 Neke klase stohastičkih procesa

1. PROCES SA NEZAVISNIM VREDNOSTIMA.

$\{X_t\}$ je proces sa nezavisnim vrednostima ako su slučajne promenljive $X_{t_1}, X_{t_2}, \dots$ (sa fiksnim vremenskim trenucima) nezavisne:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1)F_{t_2}(x_2) \dots F_{t_n}(x_n).$$

2. PROCES SA ORTOGONALNIM VREDNOSTIMA.

$\{X_t\}$ je proces sa ortogonalnim vrednostima ako važi da je $E(X_t X_s) = 0$ za $t \neq s$.

3. PROCES SA NEKOLINEARNIM VREDNOSTIMA.

To je proces $\{X_t\}$ kod koga važi $K(t, s) = 0$ za $t \neq s$.

4. PROCES SA NEZAVISNIM PRIRAŠTAJIMA.

To je proces $\{X_t\}$ za koji važi da su slučajne promenljive (tzv. priraštaji)

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \dots$$

nezavisne za bilo koji izbor $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq \dots$

Za ove procese dovoljno je poznavati samo jednodimenzionalne i dvodimenzionalne raspodele.

5. PROCES SA KONAČNIM MOMENTIMA DRUGOG REDA ILI L^2 -PROCES.

To je proces $\{X_t\}$ takav da važi $E(X_t^2) < \infty$ za svako t

6. PROCES SA ORTOGONALNIM PRIRAŠTAJIMA.

To je proces $\{X_t\}$ takav da važi $E((X_t - X_s)^2) < \infty$ i

$$E((X_{t_4} - X_{t_3})(X_{t_2} - X_{t_1})) = 0, \quad \text{za } t_1 < t_2 < t_3 < t_4.$$

7. STROGO STACIONARAN PROCES.

To je proces $\{X_t\}$ koji ima osobinu da su sve njegove konačno-dimenzionalne raspodele invarijantne u odnosu na translaciju vremena, odnosno da za svako $t_1, t_2, \dots, t_n \in I$, raspodela slučajnih promenljivih $X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}$ ne zavisi od h (koje je isto za svaku translaciju vremena), tj.

$$F_{t_1+h, t_2+h, \dots, t_n+h}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Ako je strogo stacionarni proces $\{X_t\}$ ujedno i L^2 -proces, onda važi:

1. Srednja vrednost tog stohastičkog procesa je konstantna, tj.

$$m_x(t) = E(X_t) = E(X_{t+h}) = m_x(t+h) = \text{const} = m$$

2. Autokovarijansna funkcija je funkcija koja zavisi samo od $t - s$, tj.

$$\begin{aligned} K(t, s) &= E(X_t - m_X(t))(X_s - m_X(s)) = E(X_t - m)(X_s - m) \\ &= E(X_{t-s} - m)(X_{s-s} - m) = E((X_{t-s} - m)(X_0 - m)) = C(t - s). \end{aligned}$$

U literaturi se često razmatraju procesi koji su slabiji od strogo stacionarnog procesa, ali zadovoljavaju dve gore pokazane osobine.

8. SLABO STACIONARAN PROCES.

To je proces $\{X_t\}$ takav da je:

1. $E(X_t) = m = \text{const}$,
2. $K(t, s) = C(t - s)$.

Naravno, svaki strogo stacionaran stohastički proces je ujedno i slabo stacionaran, ali obrnuto ne važi (osim u specijalnim slučajevima).

Primer 3.8 Pokazaćemo da je stohastički proces dat sa

$$X_t = \cos(\lambda t + U), \quad \lambda = \text{const},$$

gde je $U : \mathcal{U}(0, 2\pi)$, slabo stacionaran.

Funkcija gustine slučajne promenljive U je

$$\varphi_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & u \in (0, 2\pi) \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

pa koristeći da $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$, jer je $\cos x$ parna funkcija, dobijamo srednju vrednost stohastičkog procesa X_t

$$\begin{aligned} m_X(t) &= E(X_t) = E(\cos(\lambda t + U)) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda t + u) \varphi_U(u) du \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(\lambda t + u) \frac{1}{2\pi} du = 0. \end{aligned}$$

Dalje, autokovariationsna funkcija je data sa

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E(\cos(\lambda t + U) \cos(\lambda s + U)) - m_X(t)m_X(s) \\ &= E\left(\frac{1}{2} \cos(\lambda t + U + \lambda s + U) + \frac{1}{2} \cos(\lambda t + U - \lambda s - U)\right) \\ &= E\left(\frac{1}{2} \cos(\lambda(t + s) + 2U)\right) + E\left(\frac{1}{2} \cos(\lambda(t - s))\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda(t - s) + 2u) \frac{1}{2\pi} du + \frac{1}{2} \cos(\lambda(t - s)). \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$K_X(t, s) = \frac{1}{2} \cos(\lambda(t - s)) =: f(t - s),$$

pa sledi da je X_t slabo stacionaran stohastički proces. $\square$

9. GAUSOVSKI PROCES.

Definicija 3.8 Realni stohastički proces $\{X_t, t \in [t_0, T]\}$ je gausovski proces ako je svako njegovo n -dimenzionalno sečenje jedna gausovska slučajna promenljiva, tj. ako su sve njegove konačno - dimenzionalne raspodele gausovske (normalne).

Ako je slučajna promenljiva Y zadata kao linearna kombinacija $Y = a_1 X_{t_1} + \dots + a_n X_{t_n}$, gde je $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ proizvoljno n -dimenzionalno sečenje gausovskog procesa $\{X_t\}$, tada Y ima normalnu raspodelu. Važi i obrnuto. Ta osobina je korišćena u Primeru 3.5, gde je analiziran stohastički proces X_t koji je gausovski.

Gausovski procesi imaju neke lepe osobine. Jedna od njih je data u sledećoj teoremi koja tvrdi da je gausovski proces koji je slabo stacionaran takođe i strogo stacionaran, što u opštem slučaju ne važi.

Teorema 3.2 Ako je stohastički proces $\{X_t, t \in I\}$ gausovski i njegova srednja vrednost $m_X(t)$ je konstantna, a autokovarijationsna funkcija $K_X(t, t + s)$ zavisi samo od s , tada je taj proces strogo stacionaran.

Definicija 3.9 Dva procesa $\{X_t, t \in I\}$ i $\{\tilde{X}_t, t \in I\}$ definisana na istom prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ su (stohastički) ekvivalentna ako je $X_t \equiv \tilde{X}_t$ skoro sigurno (sa verovatnoćom 1). U tom slučaju kažemo da je $\tilde{X}_t$ modifikacija ili verzija procesa X_t , i obrnuto.

Ako su ova dva procesa ekvivalentna, njihove konačno-dimenzionalne raspodele se poklapaju. Međutim, oni mogu imati različita analitička svojstva.

Na primer, stohastički procesi dati sa

$$X_t \equiv 0$$

i

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq t \\ 1, & \omega = t \end{cases}$$

imaju jednake konačno-dimenzionalne raspodele, jer je $\tilde{X}_t$ skoro svuda jednak nuli, ali imaju različita analitička svojstva. Naime, trajektorije procesa X_t su neprekidne, a procesa $\tilde{X}_t$ prekidne.

Zbog toga se u literaturi često biraju one verzije stohastičkih procesa koje imaju poželjna analitička svojstva (poput neprekidnih trajektorija).

Definicija 3.10 *Istorija stohastičkog procesa $\{X_t, t \in I\}$ do trenutka t je σ -algebra generisana svim stanjima tog procesa do trenutka t (uključujući t),*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}\{X_s | s \in I, s \leq t\},$$

Analogno, budućnost stohastičkog procesa $\{X_t, t \in I\}$ nakon trenutka t je σ -algebra definisana sa

$$\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}\{X_s - X_t | s \in I, s > t\}.$$

3.5 Zadaci

ZADATAK 3.1 *Dat je stohastički proces $X_t = -2 + (t+1)Y$, $t \in \mathbb{R}$, gde*

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/3 & 1/4 & 5/12 \end{pmatrix}.$$

Odrediti jednodimenzionalnu funkciju raspodele $F_t(x)$ procesa X_t . Naći vrednost x za koju je $F_0(x) = 7/12$.

Rešenje: Ako $t > -1$,

$$F_t(x) = F_Y\left(\frac{x+2}{t+1}\right),$$

dok za $t < -1$ važi

$$F_t(x) = 1 - P\left\{Y = \frac{x+2}{t+1}\right\} - F_Y\left(\frac{x+2}{t+1}\right).$$

Dalje,

$$F_0(x) = F_Y(x+2) = \frac{7}{12} \text{ ako i samo ako } 2 < x+2 \leq 3.$$

Dakle, $0 < x \leq 1$. □

ZADATAK 3.2 *Dat je stohastički proces X_t sa nezavisnim priraštajima takav da $E(X_t) = c$ i $D(X_t) = 2t$ za svako $t > 0$. Neka je $U : \mathcal{N}(0, c^2)$ nezavisna u odnosu na X_t , $t > 0$. Pronaći očekivanje i autokovarijansnu funkciju stohastičkog procesa $Y_t = X_t - tU$, $t > 0$.*

Rešenje: Za $s < t$ važi,

$$\begin{aligned}
 m(Y_t) &= E(X_t) - tE(U) = c, \\
 K_Y(t, s) &= E((X_t - tU)(X_s - sU)) - c^2 \\
 &= E(X_t X_s) - sE(U)E(X_t) - tE(U)E(X_s) + tsE(U^2) - c^2 \\
 &= E(X_t - X_s)E(X_s) + E(X_s^2) + (ts - 1)c^2 = 0 + D(X_s) + E^2(X_s) + (ts - 1)c^2 \\
 &= 2s + c^2 + (ts - 1)c^2 = s(2 + t).
 \end{aligned}$$

□

ZADATAK 3.3 Date su dve nezavisne slučajne promenljive X i Y . Gustina raspodele slučajne promenljive X je $\varphi_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$, dok $Y : \mathcal{U}(0, 1/2)$. Pronađi autokovarijansnu funkciju stohastičkog procesa $Z_t = (t + 1)XY^2$.

Rešenje: Srednja vrednost procesa Z_t je

$$E(Z_t) = (t + 1)E(XY^2) = (t + 1)E(X)E(Y^2),$$

gde

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}xe^{-|x-1|}dx = \frac{1}{2} \underbrace{\int_{-\infty}^1 xe^{x-1}dx}_{:=I_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_1^{\infty} xe^{-x+1}dx}_{:=I_2} = 1,$$

$$I_1 = xe^{x-1} \Big|_{-\infty}^1 - \int_{-\infty}^1 e^{x-1}dx = 0,$$

$$I_2 = -xe^{-x+1} \Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-x+1}dx = 1 + 1 = 2,$$

$$E(Y^2) = D(Y) + E^2(Y) = \frac{1}{12}.$$

Sledi $E(Z_t) = \frac{t+1}{12}$. Dalje,

$$E(Z_t Z_s) = (t + 1)(s + 1)E(X^2)E(Y^4),$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x^2e^{-|x-1|}dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^1 x^2e^{x-1}dx + \frac{1}{2} \int_1^{\infty} x^2e^{-x+1}dx = 1 + 3 = 4,$$

$$\int_{-\infty}^1 x^2e^{x-1}dx = 2xe^{x-1} \Big|_{-\infty}^1 - 2I_1 = 2,$$

$$\int_1^{\infty} x^2e^{-x+1}dx = -2xe^{-x+1} \Big|_1^{\infty} + 2I_2 = 6,$$

$$E(Y^4) = \int_0^{1/2} 2y^4dy = \frac{2}{5} \frac{1}{2^5} = \frac{1}{80}.$$

Konačno, autokovarijansna funkcija procesa Z_t je jednaka

$$K_Z(t, s) = (t + 1)(s + 1) \cdot 4 \cdot \frac{1}{80} - (t + 1)(s + 1) \frac{1}{12^2} = (t + 1)(s + 1) \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{12^2} \right).$$

□

ZADATAK 3.4 Posmatramo uređaj čije je vreme rada T slučajna promenljiva sa gustinom raspodele

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} \frac{2}{\left(\frac{t}{3} + 1\right)^3}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

1. Odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive T i izračunati očekivano vreme rada tog uređaja.
2. Izraziti autokovarijansnu funkciju stohastičkog procesa datog sa

$$X_t = \frac{4\sqrt{T}}{E(T)} - t, \quad t \geq 0$$

kao funkciju od $D(\sqrt{T})$.

Rešenje:

1. Ako $t > 0$, onda

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^t \varphi_T(x) dx = \int_0^t \frac{2}{3\left(\frac{x}{3} + 1\right)^3} dx = \int_1^{\frac{t}{3}+1} 2y^{-3} dy = -y^{-2} \Big|_1^{\frac{t}{3}+1} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{t}{3} + 1\right)^2}$$

(koristimo smenu promenljivih $y = \frac{x}{3} + 1$), dok za $t \leq 0$, imamo $F_T(t) = 0$. Očekivano vreme rada je

$$E(T) = \int_0^{\infty} \frac{2t}{3\left(\frac{t}{3} + 1\right)^3} dt = \int_1^{\infty} \frac{6(y-1)}{y^3} dy = 6 \frac{y^{-1}}{-1} \Big|_1^{\infty} - 6 \frac{y^{-2}}{-2} \Big|_1^{\infty} = 6 - 3 = 3.$$

2. Autokovarijansna funkcija procesa X_t je

$$K(t, s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s).$$

Važi

$$E(X_t X_s) = E\left(\left(\frac{4}{3}\sqrt{T} - t\right)\left(\frac{4}{3}\sqrt{T} - s\right)\right) = E\left(\frac{16}{9}T\right) - \frac{4}{3}E(\sqrt{T})(t+s) + ts$$

i

$$E(X_t) = \frac{4}{3}E(\sqrt{T}) - t,$$

pa dobijamo

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{16}{9}E((\sqrt{T})^2) - \frac{4}{3}E(\sqrt{T})(t+s) + ts - \frac{16}{9}E^2(\sqrt{T}) + \frac{4}{3}E(\sqrt{T})(t+s) - ts \\ &= \frac{16}{9}(E((\sqrt{T})^2) - E^2(\sqrt{T})) = \frac{16}{9}D(\sqrt{T}). \end{aligned}$$

□

ZADATAK 3.5 Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je dat sa $X_t = tX + 2Y$, gde su X i Y dve nezavisne slučajne promenljive takve da

$$X : \mathcal{N}(a, 1), \quad Y : \mathcal{U}(0, b), \quad b > 1.$$

1. Pronaći autokovarijansnu funkciju i srednju vrednost stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$.
2. Dokazati da za $b \leq a$ ne postoji $t > 0$ takvo da

$$P\{X_t < b | Y = 1\} = 1 \quad \text{skoro sigurno.}$$

4. LANCI MARKOVA

4.1 Uvodne napomene o procesima Markova

Jedan od značajnih stohastičkih procesa je proces Markova koji, najprostije rečeno, ima osobinu da evolucija sistema u budućnosti ne zavisi od ponašanja sistema u prošlosti, već samo od stanja sistema u sadašnjosti. To svojstvo se naziva Markovsko svojstvo i biće preciznije dato u narednoj definiciji.

Podsetimo se da je istorija procesa $\{X_t, t \in T\}$ do trenutka t , uključujući i t , σ -algebra definisana sa

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s | s \leq t, s, t \in T).$$

Definicija 4.1 *Stohastički proces $\{X_t, t \in T\}$ definisan na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se zove **proces Markova** ili **Markovski proces** ako važi*

$$P\{X_t \in B | \mathcal{F}_s\} = P\{X_t \in B | X_s\} \quad \text{skoro sigurno}$$

za svako $s \leq t$, $s, t \in T$ i za svako proizvoljno $B \in \mathcal{B}$.

Napomena 4.1 *Kao što smo naveli, uslovno očekivanje je opštije od uslovne verovatnoće, pa se može pokazati da je $\{X_t, t \in T\}$ proces Markova ako i samo ako važi*

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s) = E(f(X_t) | X_s) \quad \text{skoro sigurno}$$

za svako $s \leq t$, $s, t \in T$ i svaku Borelovu funkciju f .

Složenost ovih procesa, kao i matematički alat koji se koristi u velikoj meri zavise od strukture parametarskog skupa i skupa stanja.

- Ako je skup stanja diskretan, onda govorimo o lancima Markova koji mogu biti diskretni ($T \subseteq \mathbb{N}$) ili neprekidni ($T \subseteq \mathbb{R}$) u vremenu.

Ovde će akcenat biti stavljen na lance Markova koji su diskretni u vremenu, a na kraju ćemo se kratko osvrnuti na neka svojstva lanaca Markova koji su neprekidni u vremenu, da bismo uveli Poasonov proces kao jedan primer.

- Ako je skup stanja neprekidan, ponovo možemo napraviti podelu u zavisnosti od toga da li je parametarski skup diskretan ili neprekidan. Kasnije ćemo se upoznati sa Braunovim kretanjem koji je proces Markova neprekidan i u odnosu na vreme, i može se konstruisati kao rešenje stohastičke diferencijalne jednačine.

Iako svi oblici procesa Markova pronalaze veliku primenu, za razumevanje i analizu procesa Markova koji imaju neprekidan skup stanja je neophodno veće matematičko predznanje (npr. iz teorije mere), pa takvi procesi ovde neće biti detaljno analizirani. Lanci Markova koji su diskretni u vremenu zahtevaju osnovno predznanje iz teorije verovatnoće i linearne algebre, pa dozvoljavaju čitaocu da se upozna sa osnovnim odlikama ovih procesa. To sve omogućava lakše razumevanje ponekad apstraktnih definicija i pojmova koji su mogu javiti u teoriji procesa Markova sa neprekidnim skupom stanja.

4.2 Pojam lanaca Markova diskretnih u vremenu

Posmatramo stohastički proces $\{X_t, t \in I\}$ kod koga su skup stanja S (tj. skup svih mogućih vrednosti) i parametarski skup diskretni u vremenu.

Preciznije, razmatramo stohastički proces $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ sa konačnim ili prebrojivim skupom mogućih vrednosti. Ako ne naglasimo drugačije, skup mogućih vrednosti ćemo označavati sa $S = \{x_1, x_2, \dots\}$. Dakle, ako je

$$X_n = x_i,$$

onda kažemo da je proces u stanju x_i (ili i -tom stanju) u trenutku n .

Definicija 4.2 Niz slučajnih promenljivih sa istim skupom stanja $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ zove se **lanac Markova** (diskretan u vremenu*) ako za proizvoljne $n > k_1 > \dots > k_r, r \in \mathbb{R}$ važi

$$P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}, \dots, X_{k_r} = x_{k_r}\} = P\{X_n = x_n | X_{k_1} = x_{k_1}\}. \quad (4.1)$$

Osobina (4.1) naziva se Markovsko svojstvo.

Markovsko svojstvo (4.1) možemo interpretirati na sledeći način: Uslovna raspodela budućeg stanja X_{n+1} , ako su data prošla stanja $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ i sadašnje stanje X_n , je nezavisna od prošlih stanja i zavisi samo od sadašnjeg stanja.

Definicija 4.3 Verovatnoća prelaza iz i -tog u trenutku m u j -to stanje u trenutku $m+1$, lanca Markova $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ je

$$P\{X_{m+1} = x_j | X_m = x_i\} = p_{ij}^{m,m+1}.$$

Ako verovatnoća $p_{ij}^{m,m+1}$ ne zavisi od m (pišemo p_{ij} umesto $p_{ij}^{m,m+1}$), onda je lanac **homogen**. Matrica

$$P = [p_{ij}]_{i,j=1,2,\dots} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdot \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

takva da je

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} p_{ij} = 1, \quad \text{za sve } i = 1, 2, \dots, \quad (4.2)$$

zove se **matrica prelaza za jedan korak**.

*Pod lancima Markova ćemo podrazumevati lance koji su diskretni u vremenu, što u nastavku nećemo posebno naglašavati

Suma verovatnoća u svakoj vrsti matrice prelaza P je jednaka 1 (uslov (4.2)), što sledi iz činjenice da skup stanja S kod lanca Markova obuhvata sva stanja u kojima se dati sistem može naći, a verovatnoće prelaza su nenegativne. Ova osobina je zadovoljena kod svakog lanca Markova, nezavisno od toga da li je lanac Markova homogen ili ne. Drugim rečima, sa svako $i = 1, 2, \dots$ $m \in \mathbb{N}$ važi

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}^{m,m+1} = 1,$$

što se vidi i u narednim primerima.

Primer 4.1 Neka je matrica prelaza za jedan korak kod homogenog lanca Markova $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sa skupom stanja $S = \{1, 2, 3\}$ data sa

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Tada je, na primer, verovatnoća prelaza (za jedan korak) iz stanja 1 u stanje 2 jednaka

$$p_{12} = P\{X_{m+1} = 2 | X_m = 1\} = \frac{1}{3}$$

i ne zavisi od trenutka $m \in \mathbb{N}$ u kom se posmatrani sistem nalazi, jer je dati lanac Markova homogen. Slično, verovatnoća prelaza iz stanja 2 u stanje 3 je $p_{23} = \frac{1}{6}$. $\square$

Primer 4.2 Dati su prirodni brojevi $N \geq 2$ i $s \leq N - 1$. U kutiji se na početku nalazi ukupno N kuglica, od koji su s bele, a ostale su crne. U svakom koraku izvači se po jedna kuglica i ponavlja se sledeći postupak: ako je kuglica bela, ona se vraća u kutiju, a ako je crna, pored izabrane crne u kutiju se ubacuje još jedna bela kuglica. Označimo sa X_n , $n \in \mathbb{N}$ broj belih kuglica u kutiji posle n -tog izvlačenja. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ predstavlja lanac Markova, jer broj belih kuglica posle $(n + 1)$ -og izvlačenja zavisi samo od broja belih kuglica posle n -tog izvlačenja, a ne izvlačenja pre tog. Takođe, dati lanac Markova je nehomogen, jer se broj belih kuglica u kutiji menja, a samim tim i verovatnoće da se izvuče bela, odnosno crna kuglica. Odredimo sada verovatnoće prelaza za jedan korak $p_{ij}^{n,n+1}$.

Primetimo da se broj crnih kuglica ne menja i u svakom koraku je jednak $N - s$. Neka je broj belih kuglica posle n -tog izvlačenja $m := m(n) \geq s$. To znači da je ukupan broj kuglica posle n -tog izvlačenja $N - s + m$. Broj belih kuglica može da ostane isti (ako je izvučena bela kuglica) ili da poraste za jedan (ako je izvučena crna kuglica) u jednom koraku. Tada imamo

$$\begin{aligned} p_{m,m+1}^{n,n+1} &= P\{X_{n+1} = m + 1 | X_n = m\} = \frac{N - s}{N - s + m}, \\ p_{m,m}^{n,n+1} &= P\{X_{n+1} = m | X_n = m\} = \frac{m}{N - s + m}, \\ p_{m,k}^{n,n+1} &= 0 \text{ za } k \notin \{m, m + 1\}. \end{aligned}$$

$\square$

Radi jednostavnijeg zapisa, fokusiraćemo se na homogene lance Markove. Teorija nehomogenih lanaca Markova se lako može uopštiti, što se vidi iz prethodnog primera. Treba imati u vidu da u većini slučajeva nije neophodno posebno naglašavati da li je lanac Markova homogen ili ne, jer se to lako može uočiti iz osobina sistema koji se posmatra.

Dalje, možemo da govorimo o verovatnoći prelaza iz i -tog u j -to stanje lanca Markova $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ sa skupom stanja $S = \{x_1, x_2, \dots\}$, ali u n koraka.

Definicija 4.4 Verovatnoća prelaza iz i -tog u j -to stanje u n koraka homogenog lanca Markova $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ sa skupom stanja $S = \{x_1, x_2, \dots\}$ je

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+k} = x_j | X_k = x_i\}.$$

Takođe, slično definišemo matricu prelaza za n koraka,

$$P(n) = P_n = [p_{ij}(n)]_{i,j}.$$

4.3 Jednačine Čepmen - Kolmogorova

Jednačine Čepmen - Kolmogorova nam obezbeđuju metod za izračunavanje verovatnoće prelaza u n koraka i glase

$$p_{ij}(n+m) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}(n) p_{kj}(m), \quad \text{za svako } m, n \geq 0 \text{ i svako } i, j.$$

Data formula se najjednostavnije može shvatiti ako posmatramo situaciju na sledeći način: proces iz i -tog u j -to stanje stiže u $n+m$ koraka (prelaza) preko staze koja ga dovodi u k -to stanje u n -tom koraku (prelazu).

Matrično zapisano,

$$P_{n+m} = P_n P_m \quad \text{ili} \quad P_n = P_m P_{n-m}, \quad n > m.$$

Ako u jednačini $P_{n+m} = P_n P_m$ važi $n = m = 1$, dobijamo:

$$P_2 = P P = P^2.$$

Dalje,

$$\begin{aligned} P_3 &= P_2 P = P^2 P = P^3, \\ P_4 &= P_3 P = P^3 P = P^4, \\ &\vdots \\ P_n &= P^n, \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Kao što se može videti, jednačine Čepmen Kolmogorova nam omogućavaju da verovatnoće prelaza odredimo vrlo lako, množenjem matrica, samo na osnovu poznavanja matrice prelaza za jedan korak P .

Primer 4.3 Posmatramo lanac Markova iz Primera 4.1. Verovatnoća prelaza za dva koraka iz prvog u treće stanje je

$$p_{13}(2) = P\{X_{m+2} = 3 | X_m = 1\} = \sum_{j=1}^3 p_{1j} p_{j3} = \frac{1}{4},$$

što je elemenat iz prve vrste i treće kolone matrice prelaza za dva koraka P_2 . Iz jednačina Čepmen-Kolmogorova dobijamo

$$P_2 = P^2 = \frac{1}{144} \begin{bmatrix} 52 & 56 & 36 \\ 54 & 52 & 58 \\ 57 & 54 & 33 \end{bmatrix}.$$

□

Primer 4.4 Posmatramo kretanje tačke po celobrojnoj rešetki na pravoj, takvo da se iz i – tog stanja prelazi u stanje $i - 1$, i ili $i + 1$ sa verovatnoćama $1/3$, a verovatnoće prelaza ne zavise od toga kako je tačka došla do stanja i . Označimo sa X_n stanje u kom se tačka nalazi u trenutku $n \in \mathbb{N}$. Zbog činjenice da verovatnoće prelaza iz jednog u drugo stanje ne zavise od prošlosti, tj. od toga kako je tačka dospela u dato stanje, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ predstavlja homogeni lanac Markova sa skupom stanja $S = \mathbb{Z}$ i verovatnoćama prelaza za jedan korak

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & j \in \{i - 1, i, i + 1\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

U dva koraka tačka može da se pomeri najviše dva koraka levo ili desno, pa su verovatnoće prelaza za dva koraka jednake

$$\begin{aligned} p_{i,i-2}(2) &= p_{i,i-1}p_{i-1,i-2} = \frac{1}{9}, \\ p_{i,i-1}(2) &= p_{i,i}p_{i,i-1} + p_{i,i-1}p_{i-1,i-1} = \frac{2}{9}, \\ p_{i,i}(2) &= p_{i,i}p_{i,i} + p_{i,i-1}p_{i-1,i} + p_{i,i+1}p_{i+1,i} = \frac{3}{9}, \\ p_{i,i+1}(2) &= p_{i,i}p_{i,i+1} + p_{i,i+1}p_{i+1,i+1} = \frac{2}{9}, \\ p_{i,i+2}(2) &= p_{i,i+1}p_{i+1,i+2} = \frac{1}{9}, \\ p_{i,j}(2) &= 0 \text{ za } j \notin \{i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2\}. \end{aligned}$$

Tako, na primer, slučajne promenljive $X_3|\{X_1 = 1\}$ i $X_{m+2}|\{X_m = 1\}$ imaju istu raspodelu za bilo koje m ,

$$X_3|\{X_1 = 1\} : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Dakle, vidimo da ako se tačka u trenutku 1 nalazila u stanju 1, očekujemo da će se nakon dve vremenske jedinice ona ponovo naći u stanju 1, jer je $E(X_3|\{X_1 = 1\}) = 1$. $\square$

Pretpostavimo, dalje, da u momentu n sistem može biti u nekom od stanja $x_1, x_2, \dots, x_m$. Označimo sa $p_i(n)$ verovatnoću da se proces nađe u i – tom stanju x_i u momentu n ,

$$p_i(n) = P\{X_n = x_i\}.$$

Za fiksirano n , X_n je slučajna promenljiva sa zakonom raspodele

$$X_n : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1(n) & p_2(n) & \dots & p_m(n) \end{pmatrix}.$$

Verovatnoću $p_i(0)$ zovemo **početna verovatnoća**. Vektorski zapisano,

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)P^k,$$

ili

$$[p_1(k) \ p_2(k) \ \dots \ p_m(k)]_{1 \times m} = [p_1(0) \ p_2(0) \ \dots \ p_m(0)]_{1 \times m} P_{m \times m}^k.$$

Definicija 4.5 Ako verovatnoće $\mathbf{p}(k)$ ne zavise od k , tj. ako važi

$$\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0) \quad \text{za svako } k \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

tada kažemo da je lanac Markova **stacionaran**.

Ako je lanac Markova stacionaran, onda iz (4.3) dobijamo

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)P^k = \underbrace{\mathbf{p}(0)P}_{=\mathbf{p}(1)}P^{k-1} = \dots = \mathbf{p}(0)P \quad \text{za } k \in \mathbb{N}.$$

To znači da ako je lanac Markova stacionaran, onda početni vektor verovatnoća $\mathbf{p}(0)$ zadovoljava sistem

$$\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(0)P,$$

a važi i obrnuto.

Ova osobina je veoma korisna, jer se na taj način može lako proveriti stacionarnost lanaca Markova.

Primer 4.5 Lanac Markova sa matricom prelaza $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i početnim vektorom verovatnoća $\mathbf{p}(0) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ je stacionaran, jer $\mathbf{p}(1) = \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}(0)P$ iz čega sledi da je $\mathbf{p}(k) = \mathbf{p}(0)$ za svako k . $\square$

Definicija 4.6 Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da matrica $P_{n_0} = P^{n_0}$ ima sve strogo pozitivne elemente, onda je lanac **ergodičan**. U tom slučaju, za svako i postoje verovatnoće

$$p_j^* = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n),$$

i zovu se **finalne (granične) verovatnoće**.

Finalne verovatnoće shvatamo na sledeći način: iz bilo kog stanja se posle dovoljno dugog vremenskog perioda prelazi u stanje j sa verovatnoćom p_j^* .

Ako je lanac ergodičan, finalne verovatnoće tražimo iz sistema jednačina

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{p}^*P,$$

gde je $\mathbf{p}^*$ vektor finalnih verovatnoća i važi $\sum_{j=1}^n p_j^* = 1$, a tada pišemo

$$X_\infty : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ p_1^* & p_2^* & \dots & p_m^* \end{pmatrix}.$$

Primer 4.6 Lanac Markova sa matricom prelaza $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ i skupom stanja $S = \{1, 2\}$ je ergodičan, jer su svi elementi matrice prelaza P pozitivni. Dakle, finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$ postoje i rešenje su sistema

$$\mathbf{p}^*P = \mathbf{p}^*, \quad p_1^* + p_2^* = 1. \quad (4.4)$$

Lako se pokazuje da su dve jednačine iz sistema $\mathbf{p}^*P = \mathbf{p}^*$ ekvivalentne, pa se (4.4) svodi na

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}p_1^* + \frac{1}{3}p_2^* &= p_1^* \\ p_1^* + p_2^* &= 1.\end{aligned}$$

Konačno, dobijamo da je verovatnoća da će nakon dugog vremenskog perioda sistem završiti u stanju 1 jednaka $\frac{4}{13}$, tj.

$$X_\infty : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4/13 & 9/13 \end{pmatrix}$$

□

Kao što se vidi u Primeru 4.6, osobina ergodičnosti lanca Markova garantuje postojanje finalnih verovatnoća i značajno olakšava njihovo izračunavanje. Međutim, ako lanac Markova nije ergodičan, finalne verovatnoće mogu, ali ne moraju da postoje, što se obično proverava traženjem graničnih vrednosti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n).$$

Ukoliko te granične vrednosti postoje i jednake su za svako i , onda i finalne verovatnoće p_j^* , $j = 1, 2, \dots$ postoje.

Primer 4.7 Lanac Markova sa matricom prelaza $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nije ergodičan. Naime, za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $P^{2k-1} = P$ i $P^{2k} = I$, gde je sa I označena jedinična matrica. Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ postoje $i, j \in \{1, 2\}$ takvi da $p_{ij}(n) = 0$. Ovaj lanac Markova nema finalne verovatnoće, jer za svako $i = 1, 2$ granične vrednosti $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n)$, $j = 1, 2$ ne postoje. □

Sada navodimo jedan primer lanca Markova koji nije ergodičan, ali granične verovatnoće postoje.

Primer 4.8 Lanac Markova sa skupom stanje $S = \{1, 2, 3\}$ i matricom prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nije ergodičan, jer je treća vrsta u matrici P_n ista za svako $n \in \mathbb{N}$, tj. sadrži nule. Međutim, može se utvrditi opšti oblik matrice $P_n = P^n$ za svako n . Naime, važi

$$\begin{aligned}P^{2k-1} &= \begin{bmatrix} 0 & (0.5)^{k-1} & 1 - (0.5)^{k-1} \\ (0.5)^k & 0 & 1 - (0.5)^k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N} \\ P^{2k} &= \begin{bmatrix} (0.5)^k & 0 & 1 - (0.5)^k \\ 0 & (0.5)^k & 1 - (0.5)^k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Dobijamo da za svako $i = 1, 2, 3$ važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{i1} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i2} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i3} = 1.$$

Dakle, finalne verovatnoće postoje i one su

$$p_1^* = p_2^* = 0, \quad p_3^* = 1,$$

što znači da će dugoročno gledano sistem završiti u stanju 3. □

U slučaju kada lanac Markova nije ergodičan, traženje finalnih verovatnoća, ako one postoje, nije uvek jednostavan zadatak, jer je u tom slučaju neophodno odrediti verovatnoće prelaza za n koraka. U nekim slučajevima, kao u Primeru 4.8, moguće je pomoću indukcije izvesti formulu za $p_{ij}(n)$ za svako n . Međutim, to često nije moguće.

Ako se matrica prelaza P može dijagonalizovati, tj. postoji matrica B koja ima inverznu i dijagonalna matrica D , takve da je

$$P = BDB^{-1},$$

onda se matrica prelaza za n koraka, P^n , može lako pronaći određivanjem matrica B i D koje nisu jedinstvene. Naime, važi

$$P^n = (BDB^{-1})^n = BD^nB^{-1}.$$

Matrice B i D se mogu dobiti pomoću karakterističnih korena i vektora matrice P .

Podsetimo se

Za datu kvadratnu matricu A dimenzije n , karakteristični polinom matrice A se definiše sa

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A),$$

pri čemu je sa I označena jedinična matrica dimenzije n . Spektar matrice A je skup svih karakterističnih korena matrice A ,

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : p_A(\lambda) = 0\},$$

tj. $\lambda \in \mathbb{C}$ je karakteristični koren matrice A ako i samo ako $\lambda \in \sigma(A)$. Vektor $x \in \ker(\lambda I - A)$ je karakteristični vektor matrice A koji odgovara karakterističnom korenu λ . U zavisnosti da li matricu $\lambda I - A$ množimo sa leve ili desne strane, razlikujemo leve i desne karakteristične vektore. Desni karakteristični vektor r koji odgovara karakterističnom korenu λ je vektor kolona i važi

$$\lambda r = Ar,$$

dok odgovarajući levi karakteristični vektor l zadovoljava

$$\lambda l = lA$$

i to je vektor vrsta. Za više detalja videti [4].

Neka je dat lanac Markova $\{X_n\}_n$ sa m stanja i matricom prelaza P koja je kvadratna, dimenzije m . Označimo sa $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ karakteristične korene matrice P , a sa $r_1, \dots, r_m$, odnosno $l_1, \dots, l_m$ odgovarajuće desne, odnosno leve karakteristične vektore koji odgovaraju karakterističnim korenima $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ matrice P . Označimo sa $D = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ dijagonalnu matricu sa karakterističnim korenima na glavnoj dijagonali, sa S matricu čije su vrste levi karakteristični vektori $l_1, \dots, l_m$, a sa T matricu čije su kolone desni karakteristični vektori $r_1, \dots, r_m$. Tada važi

$$P = S^{-1}DS = TDT^{-1}.$$

Primer 4.9 Posmatramo lanac Markova sa skupom stanja $S = \{0, 1\}$ i matricom prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}, \quad p, q \in (0, 1).$$

Karakteristični polinom matrice P je

$$|\lambda I - P| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + p & -p \\ -q & \lambda - 1 + q \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda(2 - p - q) + 1 - p - q,$$

pa dobijamo da su karakteristični koreni matrice P jednaki

$$\lambda_1 = \frac{2 - p - q + (p + q)}{2} = 1, \quad \lambda_2 = 1 - (p + q).$$

Matricu P možemo izraziti pomoću karakterističnih korena i odgovarajućih levih karakterističnih vektora l_1, l_2 koji su vrste matrice S , na sledeći način

$$P = S^{-1}DS = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{p}{p+q} \\ 1 & \frac{q}{p+q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica prelaza za n koraka je

$$P^n = \begin{bmatrix} p_{00}(n) & p_{01}(n) \\ p_{10}(n) & p_{11}(n) \end{bmatrix} = S^{-1}D^nS = \frac{1}{p+q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{\lambda_2^n}{p+q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}.$$

Finalne verovatnoće sada lako možemo dobiti traženjem granične vrednosti $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$. Na primer,

$$p_{00}(n) = \frac{q}{p+q} + \frac{\lambda_2^n p}{p+q} = \frac{q + (1 - (p+q))^n p}{p+q}.$$

Pošto su p i q verovatnoće, jasno je da važi $|\lambda_2| \leq 1$, pa dobijamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}(n) = \frac{q}{p+q}.$$

Dati lanac Markova je ergodičan, pa se finalne verovatnoće u ovom slučaju mogu pronaći i rešavanjem sistema (4.4). $\square$

Iz gore navedenih primera vidimo da neka stanja kod lanaca Markova mogu imati specijalna svojstva.

Definicija 4.7 Stanje x_j je **dostižno** iz stanja x_i ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da

$$p_{ij}(n_0) > 0.$$

U suprotnom je stanje x_j **nedostižno**.

Primer 4.10 Kod ergodičnog lanca Markova, stanje x_j je **dostižno** iz stanja x_i za svako i i j . $\square$

Definicija 4.8 Stanje x_j je **povratno** ako je verovatnoća da se sistem iz stanja x_j bar jednom vrati u stanje x_j jednaka 1. U suprotnom je stanje x_j **nepovratno**.

Teorema 4.1 Stanje x_j je povratno ako i samo ako važi

$$\sum_{j=1}^{\infty} p_{jj}(n) < \infty.$$

Definicija 4.9 Stanje x_j je **apsorbujuće** ako je $p_{jj} = 1$.

Primer 4.11 Stanje 3 kod lanca Markova iz Primera 4.8 je povratno i apsorbujuće, dok stanja 1 i 2 nisu dostižna iz stanja 3. $\square$

4.4 Pojam lanaca Markova neprekidnih u vremenu

Do sada je bilo reči o lancima Markova čiji je parametarski skup diskretan, a karakterizuje ih tzv. Markovsko svojstvo koje tvrdi da raspodela u budućem trenutku zavisi samo od događaja u sadašnjosti, a ne toga šta se desilo u prošlosti. Moguće je definisati i neprekidan analogon diskretnim lancima Markova koje karakteriše Markovsko svojstvo, ali je parametarski skup neprekidan. Ovi procesi su naročito korisni kada se modelira promena veličine populacija za koju nije moguće detektovati tačne vremenske trenutke u kojima se promene dešavaju (parametarski skup I je podskup skupa $\mathbb{R}^+$).

Razliku između diskretnih i neprekidnih lanaca Markova možemo objasniti na sledeći način: kod diskretnih je vreme koje proces provede u svakom stanju diskretna slučajna promenljiva sa nenegativnim vrednostima, dok je kod neprekidnih to vreme apsolutno neprekidna slučajna promenljiva.

Definicija 4.10 Stohastički proces $\{X(t), t \geq 0\}$ sa diskretnim skupom stanja S je lanac Markova neprekidan u vremenu ako za svako $t, s \geq 0$ i $i, j \in S$ važi

$$P(X(s+t) = j | X(s) = i, \{X(u) = x(u), 0 \leq u < s\}) = P(X(s+t) = j | X(s) = i) = p_{ij}(t),$$

pri čemu je $x : [0, s) \rightarrow S$ funkcija sa vrednostima u S .

Verovatnoća prelaza $p_{ij}(t)$ predstavlja verovatnoću da će lanac biti u stanju j nakon vremenskog intervala dužine t , ako je sada u stanju i .

Vidimo da se sada verovatnoće prelaza definišu kao funkcije od vremena, dok su kod lanaca Markova diskretnih u odnosu na vreme one bile konstante, jer je sistem morao da ostane u nekom stanju tačno jednu vremensku jedinicu pre nego što napravi tranziciju u neko drugo stanje. Kod lanaca Markova neprekidnih u odnosu na vreme ne postoji to “najmanje vreme” za koje sistem može da napravi tranziciju, što čini njihovu analizu komplikovanijom.

Za nas značajna osobina kod ovih procesa je sledeća: Označimo sa H_i vreme zadržavanja u stanju i , tj. vreme koje sistem provede u stanju i do tranzicije u naredno stanje. Može se pokazati da H_i ima eksponencijalnu raspodelu, što je posledica Markovskog svojstva (videti dokaz

kod Poasonov procesa). Naime, bez obzira koliko dugo je sistem bio u stanju i , preostalo vreme zadržavanja u tom stanju do tranzicije u novo takođe ima eksponencijalnu raspodelu.

U literaturi se mogu pronaći različite verzije definicije lanaca Markova neprekidnih u odnosu na vreme. Jedna od njih definiše lanac Markova $\{X(t), t \geq 0\}$ kao proces sa diskretnim skupom stanja S takav da je za svaki kratak vremenski period, $h > 0$, verovatnoća prelaza iz stanja i u stanje j jednaka

$$\begin{aligned} P\{X(t+h) = j | X(t) = i\} &= q_{ij}h, \quad i \neq j, \\ P\{X(t+h) = i | X(t) = i\} &= 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}h. \end{aligned}$$

U tom slučaju H_i ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom

$$\nu_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}.$$

Označimo sa

$$p_j(t) = P\{X(t) = j\}$$

verovatnoću da je u trenutku t sistem u stanju j . Može se pokazati (videti [22]) da je tada $p_j(t)$ rešenje diferencijalne jednačine

$$p'_j(t) = \sum_i r_{ij} p_i(t),$$

gde je

$$r_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i \neq j \\ -\nu_i, & i = j. \end{cases}$$

Kao najznačajnijeg predstavnika ove klase procesa navodimo Poasonov proces o kome će biti reči u narednoj glavi.

4.4.1 Zadaci

ZADATAK 4.1 Rasejan blagajnik ima dva kišobrana koja koristi u putu od kuće do posla i nazad. Ako pada kiša i kišobran mu je dostupan na trenutnoj lokaciji, on ga uzima. Ako ne pada kiša, on uvek zaboravi da uzme kišobran. Pretpostavimo da svaki put kada on putuje kiša pada sa verovatnoćom p i da ta verovatnoća ne zavisi od prethodnih putovanja. U svakom trenutku on ima dostupno 0, 1 ili 2 kišobrana na trenutnoj lokaciji. Pretpostavimo da je blagajnik na početku imao 2 kišobrana na trenutnoj lokaciji. Naći verovatnoću da on na istoj lokaciji sledećeg dana (tj. posle dva putovanja) neće imati 2 kišobrana.

Rešenje: Verovatnoća da blagajnik na istoj lokaciji sledećeg dana neće imati 2 kišobrana je $p(1-p)$. $\square$

ZADATAK 4.2 Petar je odlučio da smrš, pa će u narednom periodu ponekad ići na posao peške. Pretpostavimo da dan, nezavisno od prethodnog, može biti klasifikovan kao kišan sa verovatnoćom p . Inače je dan sunčan. Ako je dan kišan, Petar će ići na posao autom, bez obzira na to kako je išao prethodnog dana. Ako je dan sunčan, Petrova odluka zavisi od prethodnog dana. Ako je prethodnog dana išao na posao autom i dan je sunčan on će sigurno ići peške na posao. Ako je prethodnog dana išao peške i dan je sunčan, jednako je verovatno da će izabrati da na posao ide peške i autom. Posmatrano dugoročno, koja je verovatnoća da će Petar ići na posao autom?

Rešenje: Skup stanja je $\{F$ (Petar na posao ide peške), C (Petar na posao ide autom) $\}$. Verovatnoće prelaza za jedan korak su

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = F|X_n = C\} &= P\{\text{dan je sunčan}\} = 1 - p \\ P\{X_{n+1} = C|X_n = C\} &= P\{\text{dan je kišovit}\} = p \\ P\{X_{n+1} = F|X_n = F\} &= P\{\text{dan je sunčan}\}P\{\text{ići će peške}|\text{dan je sunčan}\} = \frac{1-p}{2} \\ P\{X_{n+1} = C|X_n = F\} &= P\{\text{dan je sunčan}\}P\{\text{ići će automobilom}|\text{dan je sunčan}\} \\ &\quad + P\{\text{dan je kišovit}\}P\{\text{ići će automobilom}|\text{dan je kišovit}\} \\ &= \frac{1-p}{2} + p = \frac{1+p}{2}. \end{aligned}$$

Finalne verovatnoće $\mathbf{p}^* = (p_C^*, p_F^*)$ zadovoljavaju sistem

$$p_F^* = (1-p)p_C^* + \frac{1}{2}(1-p)p_F^*, \quad p_C^* + p_F^* = 1$$

Odgovor je p_C^* , tj. $p_C^* \cdot 100\%$ vremena će Petar ići na posao autom. $\square$

ZADATAK 4.3 Lanac Markova $\{X_n\}_n$ je formiran na sledeći način:

$$X_0 = X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad X_{n+1} = \min\{X_n, X\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pronađi matricu prelaza za jedan korak i verovatnoće $P\{X_{n+2} = 2|X_n = 0\}$ i $P\{X_2 = 2\}$.

Rešenje: Matrica prelaza za jedan korak je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dalje,

$$p_{0,2} = P\{X_{n+2} = 2|X_n = 0\} = 0, \quad p(2) = p(0)P^2 = \left(\frac{15}{16}, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)P = \left(\frac{37}{64}, \frac{26}{64}, \frac{1}{64}\right).$$

Dakle, $P\{X_2 = 2\} = \frac{1}{64}$. $\square$

ZADATAK 4.4 Bogataš igra niz igara. Ulog u n -toj igri je 1 ili 2 dolara i zavisi od ishoda u prethodnoj igri. Ako je izgubio u $(n-1)$ -oj igri, ulog u n -toj će biti 1 i verovatnoća da će pobediti u n -toj igri je $\frac{1}{2}$. U tom slučaju će zaraditi 1 dolar, dok će u suprotnom izgubiti dolar koji je uložio. Ako je pobedio u $(n-1)$ -oj igri, ulog u n -toj će biti 2 i verovatnoća da će pobediti u toj igri je $\frac{1}{3}$. U tom slučaju će zaraditi 2 dolara, dok će u suprotnom izgubiti 2 dolara koje je uložio. Označimo sa X_n slučajnu promenljivu koja predstavlja dobit u n -toj igri,

$$X_n : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sa X_0 je označeno početno stanje. Neka je $Y_n = \text{sgn } X_n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Pronađi $E(X_n|Y_{n-1})$.

- (b) Odrediti matricu prelaza za jedan korak lanca Markova $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Izračunati procenat igara koje će bogataš izgubiti.
- (c) Da li je lanac Markova $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ stacionaran? Objasniti.
- (d) Izračunati verovatnoće p_i , $i = 1, 2, 3, 4$ i $E(X_n)$.

Rešenje:

- (a) Važi $E(X_n|Y_{n-1}) = E(X_n|\mathcal{F}(Y_{n-1} = -1, Y_{n-1} = 1))$ i

$$E(X_n|Y_{n-1}) : \begin{pmatrix} E(X_n|Y_{n-1} = -1) & E(X_n|Y_{n-1} = 1) \\ P(Y_{n-1} = -1) = p_1 + p_2 & P(Y_{n-1} = 1) = p_3 + p_4 \end{pmatrix},$$

gde

$$X_n|Y_{n-1} = -1 : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad X_n|Y_{n-1} = 1 : \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Iz $E(X_n|Y_{n-1} = -1) = 0$ i $E(X_n|Y_{n-1} = 1) = -\frac{2}{3}$ sledi

$$E(X_n|Y_{n-1}) : \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ p_1 + p_2 & p_3 + p_4 \end{pmatrix}.$$

Dakle, $E(X_n) = E(E(X_n|Y_{n-1})) = -\frac{2}{3}(p_3 + p_4)$.

- (b) Skup stanja lanca Markova $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je $S = \{-1, 1\}$ i važi

$$P(Y_n = -1) = p_1 + p_2, \quad P(Y_n = 1) = p_3 + p_4.$$

Verovatnoće prelaza za jedan korak su jednake

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = -1|Y_n = -1) &= \frac{1}{2} && (\text{ulog je 1, gubi}) \\ P(Y_{n+1} = 1|Y_n = -1) &= \frac{1}{2} && (\text{ulog je 1, pobeđuje}) \\ P(Y_{n+1} = -1|Y_n = 1) &= \frac{2}{3} && (\text{ulog je 2, gubi}) \\ P(Y_{n+1} = 1|Y_n = 1) &= \frac{1}{3} && (\text{ulog je 2, pobeđuje}). \end{aligned}$$

Dobijamo matricu prelaza za jedan korak lanca Markova $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Ovaj lanac Markova je ergodičan jer su svi elementi matrice P pozitivni, pa finalne verovatnoće p_{-1}^* i p_1^* postoje i dobijaju se iz sistema $p^* = p^*P$, $p_{-1}^* + p_1^* = 1$, gde je p^* vektor finalnih verovatnoća. Lako se dobija

$$p_{-1}^* = \frac{4}{7}, \quad p_1^* = \frac{3}{7}.$$

- (c) Lanac Markova $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je stacionaran, jer slučajne promenljive Y_n , $n \in \mathbb{N}_0$ imaju istu raspodelu, pa važi

$$p_1 + p_2 = \frac{4}{7}, \quad p_3 + p_4 = \frac{3}{7}.$$

(d) Do sada znamo,

$$p_1 + p_2 = \frac{4}{7},$$

$$p_3 + p_4 = \frac{3}{7},$$

$$E(X_n) = -2p_1 - p_2 + p_3 + 2p_4 = -\frac{2}{3}(p_3 + p_4) = -\frac{2}{7},$$

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1.$$

Dalje,

$$-p_1 + p_4 = -\frac{2}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{7}, \text{ pa sledi } p_4 = p_1 - \frac{1}{7}.$$

Takođe,

$$p_2 = \frac{4}{7} - p_1, \quad p_3 = \frac{3}{7} - p_4 = \frac{4}{7} - p_1 = p_2.$$

Konačno,

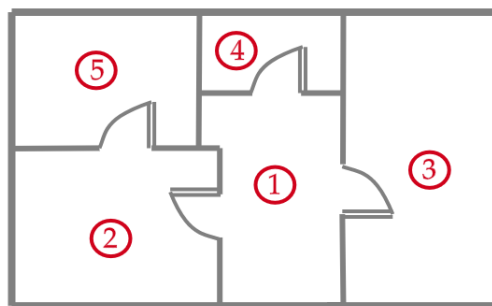
$$\begin{aligned} p_1 &= P(X_n = -2) \\ &= P(X_n = -2 | Y_{n-1} = -1)P(Y_{n-1} = -1) + P(X_n = -2 | Y_{n-1} = 1)P(Y_{n-1} = 1) \\ &= 0 + P(Y_n = -1 | Y_{n-1} = -1)(p_1 + p_2) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

i važi

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{7}, \quad p_4 = \frac{1}{7}.$$

□

ZADATAK 4.5 Miš je zarobljen u kući sa 5 prostorija čija je skica data na Slici 4.1. On se kreće iz jedne u drugu prostoriju sa verovatnoćama proporcionalnim broju vrata u toj prostoriji. Na primer, ako prostorija i ima k izlaza (vrata), verovatnoća da odabere svaki od njih je $1/k$. Međutim, u prostoriji broj 5 nalazi se zamka i ako se miš nađe u toj prostoriji, on će skoro sigurno biti zarobljen i neće moći da izađe napolje. Dat je homogen lanac Markova $\{X_n\}_n$, gde X_n predstavlja broj prostorije u kojoj se miš nalazi u trenutku n . Odrediti verovatnoću da miš iz prostorije broj 1 pređe u prostoriju broj 5 u 3 koraka. Da li je dati lanac Markova ergodičan?



Slika 4.1: Skica uz Zadatak 4.5

Rešenje: Matrica prelaza datog lanca Markova je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Važi

$$p_{11}(2) = \frac{5}{6}, \quad p_{12}(2) = p_{13}(2) = p_{14}(2) = 0, \quad p_{15}(2) = \frac{1}{6},$$

i $p_{15}(3) = \frac{1}{6}$.

Lanac Markova sa gore datom matricom prelaza nije ergodičan, jer kad miš uđe u prostoriju broj 5, on će i ostati u njoj, poslednja vrsta je ista u svakoj matrici prelaza u n koraka, P_n . $\square$

ZADATAK 4.6 Matrica prelaza za jedan korak lanca Markova je data sa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

gde $b, c > 0$. Neka je sa $S = \{0, 1, 2\}$ označen odgovarajući skup stanja.

- Da li je lanac Markova ergodičan? Da li se nešto može zaključiti o postojanju finalnih verovatnoća? Objasniti.
- Naći vektor početnih stanja za koji je lanac Markova stacionaran.
- Navesti sva povratna stanja iz skupa S .

Rešenje:

- Imamo

$$P^2 = Q := \begin{bmatrix} b & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & c \end{bmatrix}, \quad P^3 = P, \quad \dots, P^{2k-1} = P, \quad P^{2k} = Q,$$

pa lanac Markova nije ergodičan. Finalne verovatnoće ne postoje.

- Za $p_0 = (x_0, x_1, x_2)$ lanac Markova je stacionaran ako

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_0 = bx_1, \quad x_2 = cx_1.$$

- Sva stanja iz S su povratna, jer za svako $i \in S$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da $p_{ii}(n_0) > 0$. $\square$

Genetika je danas veoma popularna među naučnicima i na osnovu eksperimentalnih podataka se razvijaju razni sofisticirani stohastički modeli. Jedan od primera je dat u nastavku, a neki jednostavni modeli se mogu naći i u [13].

ZADATAK 4.7 Posmatramo eksperiment ukrštanja zečeva, tj. pratimo evoluciju određenog gena koji se pojavljuje u dva tipa, G ili g . Zec može imati par gena, GG (dominantan), Gg (hibrid - redosled nije bitan, Gg je isto što i gG) ili gg (recesivan). Ukrštanjem dva zeca, potomak nasleđuje gene od oba roditelja sa jednakim verovatnoćama. Dakle, ako ukrštamo dominantnog (ili recesivnog) sa hibridom, potomak je dominantan (ili recesivan) sa verovatnoćom $1/2$ ili hibrid sa istom verovatnoćom. Ako ukrštamo hibrid sa hibridom, potomak je dominantan ili recesivan sa verovatnoćama 0.25 . Krećemo sa zecom datog karaktera (GG , Gg ili gg) i ukrštamo ga sa hibridom. Potomak se zatim ponovo ukršta sa hibridom i proces se ponavlja kroz generacije (potomak se uvek ukršta sa hibridom).

(a) Naći matricu prelaza za jedan korak lanca Markova $\{X_n\}$, gde X_n predstavlja karakter zeca n -te generacije.

(b) Pretpostavimo da je eksperiment započet sa hibridom. Neka je

$$\mu_n = [\mu_n(GG), \mu_n(Gg), \mu_n(gg)]$$

raspodela verovatnoća karaktera zeca n -te generacije. Drugim recima, $\mu_n(GG)$, $\mu_n(Gg)$, $\mu_n(gg)$ su verovatnoće da je n -ta generacija GG , Gg ili gg , redom. Odrediti μ_1 , μ_2 i μ_3 . Šta se može primetiti?

Da ste rešenje ovog zadatka dobili pre 1858. godine kada je Gregor Mendel, koji se smatra začetnikom genetike, počeo da razmnožava grašak u svojoj bašti u manastiru i posmatra ishod ukrštanja, postali biste veoma poznati.

Rešenje:

(a) Označimo skup stanja sa $S = \{GG, Gg, gg\}$. Matrica prelaza za jedan korak lanca Markova $\{X_n\}$ je

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(b) Množenjem matrica dobijamo matrice prelaza za dva i tri koraka,

$$P^2 = 2^{-2} \begin{bmatrix} 1.5 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0.5 & 2 & 1.5 \end{bmatrix}, \quad P^3 = 2^{-3} \begin{bmatrix} 2.5 & 4 & 1.5 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1.5 & 4 & 2.5 \end{bmatrix}$$

Vidimo da važi

$$\mu_i(GG) = 0.25, \quad \mu_i(Gg) = 0.5, \quad \mu_i(gg) = 0.25, \quad i = 1, 2, 3.$$

Može se pokazati da se te verovatnoće ne menjaju sa n . □

ZADATAK 4.8 Organizacija ima N zaposlenih, pri čemu je N velik broj. Svaki zaposleni može biti klasifikovan u jednu od 3 kategorije i menja kategoriju nezavisno i u skladu sa lancem Markova sa matricom prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Koji procenat zaposlenih je u svakoj kategoriji? Ako je na početku svaki zaposleni klasifikovan u prvu kategoriju, koja je verovatnoća da će zaposleni ostati u prvoj kategoriji posle dve izvršene klasifikacije?

ZADATAK 4.9 Univerzitetski fudbalski tim igra seriju utakmica u narednom periodu. Ako pobedi utakmicu, sledeću će pobediti sa verovatnoćom 0.6, a jednako je verovatno da će je izgubiti ili igrati nerešeno. Ako su igrali nerešeno, sledeću utakmicu će pobediti sa verovatnoćom 0.2, dok će je izgubiti sa verovatnoćom 0.3. Ako izgube utakmicu, sledeću će igrati nerešeno sa verovatnoćom 0.3, a neće izgubiti sa verovatnoćom 0.4. Pronađi verovatnoće prelaza za jedan korak homogenog lanca Markova koji prati ishod utakmica igranih od strane Univerzitetskog fudbalskog tima. Da li je moguće da lanac Markova bude stacionaran ako se zna da je verovatnoća da tim neće izgubiti prvu utakmicu jednaka 0.4?

ZADATAK 4.10 Neka je N diskretna slučajna promenljiva sa vrednostima u skupu $S_N = \{1, 2, 3, 4\}$ i odgovarajućim verovatnoćama $p_i = P\{N = i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Koristimo N da kreiramo lanac Markova X_n sa skupom stanja $\{0, 1, 2, 3\}$ na sledeći način: Sistem će ostati u stanju 0 sa verovatnoćom p_1 . Ako je sistem u stanju $i \geq 0$, moguć je prelaz u stanje $i + 1$ sa verovatnoćom $p_{i,i+1} = P\{N > i + 1 | N > i\}$ ili u stanje 0 sa verovatnoćom $p_{i,0} = P\{N = i + 1 | N > i\}$.

(a) Dokazati da $E(N) = 1 + p_{0,1} + p_{0,1}p_{1,2} + p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3}$.

(b) Odrediti stacionarne verovatnoće.

Rešenje:

(a) Tražena relacija sledi iz

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= \frac{P\{N > i + 1\}}{P\{N > i\}}, \\ p_{0,1} &= P\{N > 1\} = 1 - p_1, \\ p_{0,1}p_{1,2} &= P\{N > 2\} = p_3 + p_4, \\ p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} &= P\{N > 3\} = p_4. \end{aligned}$$

(b) Stacionarne verovatnoće $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$ su rešenje sistema

$$q_0p_{0,1} = q_1, \quad q_1p_{1,2} = q_2, \quad q_2p_{2,3} = q_3, \quad q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = 1.$$

Sledi

$$q_2 = q_0p_{0,1}p_{1,2} = q_0(p_3 + p_4), \quad q_3 = q_0p_{0,1}p_{1,2}p_{2,3} = q_0p_4,$$

pa

$$q_0 + q_1 + q_2 + q_3 = q_0(1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_3 + p_4 + p_4) = q_0E(N) = 1.$$

Zaključujemo da važi

$$q_0 = \frac{1}{E(N)}, \quad q_1 = \frac{1 - p_1}{E(N)}, \quad q_2 = \frac{p_3 + p_4}{E(N)}, \quad q_3 = \frac{p_4}{E(N)}.$$

□

ZADATAK 4.11 Dva kockara igraju sledeću igru. Baca se fer novčić. Ako je rezultat glava, igrač A će platiti igraču B jedan dolar, a ako je rezultat pismo, igrač B će platiti igraču A jedan dolar. Igra se nastavlja sve dok jedan igrač ne ostane bez novca. Pretpostavimo da na početku igrač A ima jedan dolar, a igrač B ima 2 dolara (što znači da je u igri tri dolara). Neka X_n predstavlja količinu novca koju poseduje igrač A posle n bacanja novčića.

- (a) Naći očekivani broj bacanja novčića dok jedan od igrača ne ostane bez dolara.
- (b) Pokazati da je $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ lanac Markova i naći verovatnoće prelaza za jedan korak.
- (c) Koja je verovatnoća da je igra završena nakon samo jednog bacanja novčića?
- (d) Pronaći verovatnoće prelaza za dva koraka $P[X_{n+2} = i | X_n = i]$, $i = 1, 2$.

Napomena: Smatra se da kada se igra završi, stanje igrača počinje da se ponavlja sa svakim korakom.

5. POASONOV PROCES

Iako u osnovi jednostavan, Poasonov proces je jedan od najprimenljivijih stohastičkih procesa. To je proces prebrajanja, a u nastavku će pored njegove definicije i osnovnih svojstava, postupno biti definisani neki osnovni tipovi ovog procesa. Kroz primere će čitalac biti u mogućnosti da stekne osnovnu ideju o njegovim mogućim primenama. Potencijal ovog procesa je veliki, a njegove primene kroz razna uopštenja se mogu naći u ekologiji, medicini, geologiji, astronomiji i mnogim drugim naukama.

5.1 Pojam Poasonovog procesa

Definicija 5.1 *Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove **proces prebrajanja** (ili **prebrojavanja**) ako X_t predstavlja ukupan broj događaja koji su se realizovali do vremenskog trenutka t , uključujući i t .*

Jasno je da procesi prebrajanja zadovoljavaju sledeće uslove:

1. $X_t \geq 0$ za svako $t \geq 0$.
2. X_t ima vrednosti u skupu celih brojeva $\mathbb{Z}$.
3. Ako je $s < t$, onda $X_s \leq X_t$.
4. Ako je $s < t$, onda $X_t - X_s$ predstavlja broj događaja koji se realizuju u intervalu $(s, t]$.

Poasonov proces je proces prebrajanja sa nezavisnim i stacionarnim priraštajima.

Definicija 5.2 *Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove **Poasonov proces** sa stopom rasta λ , $\lambda > 0$, ako važi:*

- 1) $X_0 = 0$.
- 2) *Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje, tj. za svako $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$, priraštaji $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_{n+1}} - X_{t_n}, \dots$ su nezavisni.*
- 3) *Broj događaja u proizvoljnom intervalu dužine t ima Poasonovu raspodelu,*

$$P\{X_{t+s} - X_s = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{za svako } t \geq 0. \quad (5.1)$$

Iz uslova 3) sledi da Poasonov proces ima stacionarne priraštaje (raspodela broja događaja koji se pojavljuju u bilo kom vremenskom intervalu zavisi samo od dužine trajanja tog intervala, a ne od njegovog položaja na vremenskoj osi). Drugim rečima, proces (tj. njegove konačno-dimenzijske raspodele) je invarijantan u odnosu na translaciju vremena (ne zavisi od s).

Ako u (5.1) stavimo $s = 0$ onda dobijamo

$$P\{X_t - X_0 = n\} = P\{X_t = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

To znači da broj događaja koji se pojave do trenutka t (uključujući t), X_t , ima Poasonovu raspodelu sa parametrom λt .

Primitimo da je

$$E(X_t) = \lambda t,$$

što ujedno objašnjava zašto se λ zove stopa rasta.

Da bismo proverili da li je neki proces prebrajanja Poasonov, moramo proveriti uslove 1), 2) i 3). Uslovi 1) i 2) mogu se obično direktno proveriti na osnovu poznavanja procesa, dok utvrđivanje da li je uslov 3) zadovoljen nije uvek jednostavno. Zbog toga je pogodno uvesti još jednu definiciju Poasonovog procesa.

Definicija 5.3 *Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ je Poasonov proces sa stopom rasta λ , $\lambda \geq 0$, ako za malo $h > 0$ važi:*

- 1) $X_0 = 0$.
- 2) Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje.
- 3) $P\{X_{t+h} - X_t = 1\} = \lambda h + o(h)$.
- 4) $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = o(h)$.

Teorema 5.1 *Definicija 5.2 i Definicija 5.3 su međusobno ekvivalentne.*

Dokaz. Pokazaćemo tvrđenje samo u jednom pravcu, tačnije da Definicija 5.3 povlači Definiciju 5.2.

Uvedimo pretpostavke i oznake:

- 1) Verovatnoća $p_n(t)$, da se u intervalu dužine t desi tačno n događaja, zavisi od t i od n , ali ne i od položaja intervala na vremenskoj osi.
- 2) Broj događaja koji se dese u proizvoljnom vremenskom intervalu ne zavisi od broja događaja koji se dese u bilo kom drugom, njemu disjunktном vremenskom intervalu (priraštaji su nezavisni).
- 3) Verovatnoća da se u kratkom vremenskom intervalu dužine Δt ostvari tačno jedan događaj je $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta t \rightarrow 0$, a verovatnoća da se desi više od jednog događaja je $o(\Delta t)$, $\Delta t \rightarrow 0$.

Tada za $\Delta t > 0$ važi

$$p_0(t + \Delta t) = p_0(t)p_0(\Delta t), \quad p_0 \in [0, 1],$$

gde je

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

Dalje, važi sledeće

$$\begin{aligned} p_n(t + \Delta t) &= p_{n-1}(t)p_1(\Delta t) + p_n(t)p_0(\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + o(\Delta t) \\ &= p_{n-1}(t)\lambda\Delta t + p_n(t) - p_n(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned}$$

pa dobijamo

$$p_n(t + \Delta t) - p_n(t) = p_{n-1}(t)\lambda\Delta t - p_n(t)\lambda\Delta t + o(\Delta t).$$

Deljenjem gornje jednačine sa $\Delta t > 0$ dobijamo

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

odakle sledi

$$p'_n(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t))$$

kada $\Delta t \rightarrow 0$. Rešenje gornje diferencijalne jednačine je

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Ovim smo dobili Poasonovu raspodelu broja ostvarenih događaja u intervalu dužine t , a odgovarajući proces zovemo Poasonov potok događaja. $\square$

5.2 Raspodela vremena između pojave dva događaja

Neka je dat Poasonov proces $\{X_t, t \geq 0\}$. Označimo sa T_n vreme koje protekne od pojave $(n-1)$ -og do n -tog događaja. Specijalno, T_1 je vreme do pojave prvog događaja.

Najpre primetimo da se događaj $\{T_1 > t\}$ desi ako i samo ako se u intervalu $[0, t]$ ne desi nijedan događaj Poasonovog procesa, odnosno događaji $\{T_1 > t\}$ i $\{X_t = 0\}$ su ekvivalentni pa za $t \geq 0$ važi

$$P\{T_1 > t\} = P\{X_t = 0\} = e^{-\lambda t},$$

odnosno

$$P\{T_1 < t\} = 1 - P\{T_1 \geq t\} = 1 - P\{T_1 > t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Jasno, $P\{T_1 < t\} = 0$ ako je $t < 0$, jer vreme ne može biti negativno, pa zaključujemo da T_1 ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ , odnosno očekivanjem $\frac{1}{\lambda}$.

Pretpostavimo da se prvi događaj u Poasonovom procesu desio u trenutku s i želimo da nađemo raspodelu za T_2 . Iz činjenice da Poasonov proces ima nezavisne i stacionarne priraštaje sledi

$$\begin{aligned} P\{T_2 > t | T_1 = s\} &= P\{X_{t+s} - X_s = 0 | T_1 = s\} \\ &= P\{X_{t+s} - X_s = 0\} = P\{X_t = 0\} = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Primetimo da smo koristili da ako znamo da se prvi događaj desio do trenutka s , onda je vreme koje protekne između prvog i drugog događaja veće od t ako i samo ako se desilo nula događaja u

intervalu $(s, t]$, tj. $X_t - X_s = 0$. Zaključujemo da i T_2 ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ .

Analogno sledi da za svako n važi da će T_n imati eksponencijalnu raspodelu sa parametrom λ , odnosno srednjom vrednošću $\frac{1}{\lambda}$, i da su ovi događaji međusobno nezavisni.

Teorema 5.2 *Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ . Označimo sa T_n , $n = 1, 2, \dots$, vreme koje protekne između $(n-1)$ -og i n -tog događaja u Poasonovom procesu. Tada su T_n , $n = 1, 2, \dots$ nezavisne slučajne promenljive sa eksponencijalnom $\mathcal{E}(\lambda)$ raspodelom.*

Dalje nas interesuje raspodela slučajne promenljive S_n koja predstavlja vreme realizacije n -tog događaja, odnosno

$$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n.$$

Pošto $T_i : \mathcal{E}(\lambda)$, za svako $i = 1, 2, \dots$ i međusobno su nezavisne, može se pokazati da je funkcija gustine slučajne promenljive S_n jednaka

$$\varphi_{S_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \quad (5.2)$$

Jedan način da se to pokaže je sledeći. Najpre primetimo da će se n -ti događaj pojaviti ako i samo ako je broj događaja koji se pojave do vremena t najmanje n . To znači da su događaji $\{X_t \geq n\}$ i $\{S_n \leq t\}$ ekvivalentni, pa sledi

$$P\{S_n \leq t\} = P\{X_t \geq n\} = \sum_{j=n}^{\infty} P\{X_t = j\} = \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}.$$

Diferenciranjem gornje jednačine po t dobijamo

$$\begin{aligned} \varphi_{S_n}(t) &= \sum_{j=n}^{\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{\lambda j (\lambda t)^{j-1}}{j!} \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \\ &= -\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} + \lambda e^{-\lambda t} \left(\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \right) \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Primetimo još i da

$$P\{S_n \leq t\} = P\{S_n < t\} + P\{S_n = t\} = F_{S_n}(t),$$

jer je vreme neprekidno, odnosno S_n je apsolutno neprekidna slučajna promenljiva.

Kako Poasonov proces ima stacionarne priraštaje, vreme proteklo između k -tog i $(n+k)$ -og događaja ima istu raspodelu kao i vreme do n -tog događaja S_n .

Primer 5.1 *Kupci ulaze u supermarket koji radi 24 časa dnevno u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta od $\lambda = 20$ kupaca po satu. Ako sa X_t označimo broj kupaca koji su ušli u supermarket do trenutka t , onda $X_t : \mathcal{P}(20t)$. Vreme koje protekne između dolaska n -tog i $(n+1)$ -og kupca je slučajna promenljiva $T_{n+1} : \mathcal{E}(20)$, dok je vreme koje protekne do dolaska*

n -tog kupca slučajna promenljiva $S_n = T_1 + \dots + T_n$ sa funkcijom gustine (5.2), gde je $\lambda = 20$. Očekivano vreme do dolaska n -tog kupca je

$$E(S_n) = nE(T_1) = \frac{n}{20} \text{ sati.}$$

Isto se može dobiti i korišćenjem funkcije gustine $\varphi_{S_n}(t)$,

$$E(S_n) = \int_{-\infty}^{\infty} t \varphi_{S_n}(t) dt.$$

Znajući sve gore navedeno možemo da odredimo i verovatnoće da se pojedini događaji realizuju. Na primer, verovatnoća da nijedan kupac nije ušao u supermarket u sat vremena je $P\{X_1 = 0\} = e^{-20}$, što je takođe odgovor na pitanje kolika je verovatnoća da je vreme dolaska prvog kupca duže od sat vremena. $\square$

Teorema 5.2 nam omogućava da na još jedan način definišemo Poasonov proces. Pretpostavimo da počinjemo sa nizom $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nezavisnih, jednako eksponencijalno raspodeljenih slučajnih promenljivih sa srednjom vrednošću $\frac{1}{\lambda}$. Definišemo proces prebrajanja tako što ćemo reći da se n -ti događaj pojavljuje u vremenu

$$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n,$$

a rezultujući proces prebrajanja X_t definisan sa

$$X_t = \max\{n : S_n \leq t\}, \quad S_0 = 0,$$

se zove Poasonov proces.

Primer 5.2 U firmi svi zaposleni koriste jedan štampač. Pretpostavimo da su vremena između pristizanja uzastopnih zahteva za štampanje dokumenata međusobno nezavisna i imaju eksponencijalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $1/10$ časova. Štampaču treba tačno 6 sekundi da odštampa jedan list papira. Označimo sa T_n vreme između pristizanja zahteva za štampanje $(n-1)$ -og i n -tog dokumenta. Dato je $T_n : \mathcal{E}(10)$. Dalje, neka je sa X_t označen proces koji broji zahteve za štampanje do trenutka t . Tada $X_t : \mathcal{P}(10t)$.

- (a) Broj zahteva za štampanje dokumenata koji pristignu u intervalu $(s, s+t]$ je slučajna promenljiva $X_{s+t} - X_s : \mathcal{P}(10t)$. Tada je verovatnoća da će tačno k zahteva za štampanje dokumenata pristići u periodu od t časova

$$P\{X_{n+t} - X_n = k\} = P\{X_t = k\} = e^{-10t} \frac{(10t)^k}{k!}.$$

- (b) Odredimo sada verovatnoću da će zahtev za štampanje stići dok prethodni dokument, koji se sastoji od 6 listova papira, nije još uvek odštampan. Vreme koje je potrebno da se odštampa 6 listova papira je 36 sekundi što je jednako 0.01 časova. Mi tražimo verovatnoću da je vreme proteklo između dva uzastopna zahteva za štampanje manje od 36 sekundi, tj.

$$P\{T_n < 0.01\} = F_{T_n}(0.01) = 1 - e^{-10 \cdot 0.01} = 1 - e^{-0.1}.$$

$\square$

Primer 5.3 U jednoj prostoriji zvono zazvoni sa vremena na vreme prateći Poasonov proces sa stopom rasta $\lambda \geq 1$. Igrač ulazi u prostoriju i u trenutku $t = 0$ počinje sledeću igru: Igrač ima mogućnost da odmah posle jednog zvona (nije bitno kog po redu) samo jednom pritisne dugme ispred sebe. Ukoliko od trenutka kada je pritisnuo dugme ispred sebe do trenutka $t = 1$ zvono više ne zazvoni, igrač pobeđuje, a u suprotnom gubi. Igrač odlučuje da čeka do trenutka $s \in [0, 1]$ i da potom pritisne dugme čim prvi put zazvoni zvono.

1. Označimo sa X_t slučajnu promenljivu koja broji koliko puta je zvono zazvonilo u intervalu $[0, t]$. Onda je $\{X_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ . Igrač pobeđuje ako od trenutka s do trenutka $t = 1$ zvono zazvoni samo jednom, tj. ako $X_s - X_1 = 1$, pa je verovatnoća da igrač pobedi jednaka

$$P\{X_s - X_1 = 1\} = \lambda(1 - s)e^{-\lambda(1-s)}.$$

2. Sada želimo da odredimo optimalan trenutak s i njemu odgovarajuću (maksimalnu) verovatnoću za pobedu u igri.

Označimo sa

$$f(s) = \lambda(1 - s)e^{-\lambda(1-s)}, \quad s \in [0, 1]$$

funkciju koja za fiksirano s predstavlja verovatnoću da igrač pobedi u igru. Imamo

$$f'(s) = \lambda e^{-\lambda(1-s)}(\lambda(1 - s) - 1),$$

pa se lako pokazuje da za $\lambda \geq 1$ funkcija $f(s)$ dostiže maksimum za $s = 1 - \frac{1}{\lambda} \in [0, 1]$. Odgovarajuća maksimalna verovatnoća je tada e^{-1} i ona ne zavisi od λ .

3. Za razliku od slučaja kada je $\lambda \geq 1$, ako je $\lambda \in (0, 1)$, maksimalna verovatnoća je $\lambda e^{-\lambda}$, jer se maksimum dostiže u $s = 0$ (sada $1 - \frac{1}{\lambda} < 0$ i $f(s)$ opada za $s > 1 - \frac{1}{\lambda}$). Vidimo da u ovom slučaju maksimalna verovatnoća zavisi od λ . $\square$

5.3 Neka svojstva Poasonovog procesa

Znamo da ako je $\{X_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces, onda važi

$$P\{X_{t+s} - X_s = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots,$$

ili, drugačije zapisano,

$$X_t - X_s : \mathcal{P}(\lambda(t - s)).$$

To znači da

$$P\{X_t - X_s = k\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Ako je $s = 0$, onda imamo $X_t : \mathcal{P}(\lambda t)$, pa su očekivanje i disperzija od X_t (za fiksirano t) jednaki

$$E(X_t) = \lambda t, \quad D(X_t) = \lambda t.$$

Teorema 5.3 Autokovarijansna funkcija Poasonovog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ je

$$K(t, s) = \lambda \min\{t, s\}.$$

Dokaz. Autokovarijansna funkcija je jednaka

$$K(t, s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E(X_t X_s) - \lambda t \lambda s,$$

pa preostaje da odredimo $E(X_t X_s)$.

- 1) Neka je $s > t > 0$. Koristeći nezavisnost priraštaja $X_s - X_t$ i X_t , dobijamo

$$\begin{aligned} E(X_t X_s) &= E(X_t(X_s - X_t + X_t)) = E(X_t(X_s - X_t) + X_t^2) \\ &= E(X_t(X_s - X_t)) + E(X_t^2) \\ &= E((X_t - X_0)(X_s - X_t)) + D(X_t) + E^2(X_t) \\ &= E(X_t)E(X_s - X_t) + \lambda t + (\lambda t)^2 \\ &= \lambda t(E(X_s) - E(X_t)) + \lambda t + \lambda^2 t^2 \\ &= \lambda t(\lambda s - \lambda t) + \lambda t + \lambda^2 t^2 \\ &= \lambda t + \lambda^2 ts \end{aligned}$$

Dakle, ako je $s > t > 0$, onda

$$K(t, s) = \lambda t + \lambda^2 ts - \lambda t \lambda s = \lambda t$$

- 2) Analogno, ako je $t > s > 0$, onda na isti način kao u slučaju $s > t > 0$ dobijamo

$$E(X_t X_s) = E(((X_t - X_s) + X_s)X_s) = \lambda s + \lambda^2 ts,$$

pa sledi $K(t, s) = \lambda s$.

- 3) Ako je $t = s$,

$$E(X_t X_s) = E(X_t^2) = \lambda t + \lambda^2 t^2.$$

Ovim je dokazano da

$$K(t, s) = \lambda \min\{t, s\}. \quad (5.3)$$

□

Koristeći (5.3) možemo lako da odredimo koeficijent korelacije $\rho(t, s)$ Poasonovog procesa X_t sa stopom rasta λ . Bez gubljenja opštosti pretpostavimo da je $0 < t \leq s$. Dobijamo da koeficijent korelacije ne zavisi od λ i važi

$$\rho(t, s) = \frac{K(t, s)}{\sqrt{D(t)D(s)}} = \frac{\lambda \min\{t, s\}}{\sqrt{\lambda t \cdot \lambda s}} = \sqrt{\frac{t}{s}}, \quad 0 < t \leq s.$$

Teorema 5.4 *Poasonov proces je proces Markova, tj. lanac Markova neprekidan u vremenu.*

Dokaz. Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ i neka su $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1}$ i $b_1, \dots, b_n, b_{n+1} \in \mathbb{N}$ takvi da važi $0 \leq b_1 \leq b_1 \leq \dots \leq b_n \leq b_{n+1}$. Treba pokazati da Poasonov proces zadovoljava Markovsko svojstvo,

$$P\{X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, \dots, X_{t_{n-1}} = b_{n-1}, X_{t_n} = b_n\} = P\{X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_{t_n} = b_n\}.$$

Koristeći da Poasonov proces ima nezavisne priraštaje dobijamo

$$\begin{aligned}
& P\{X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, \dots, X_{t_{n-1}} = b_{n-1}, X_{t_n} = b_n\} \\
&= \frac{P\{X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, \dots, X_{t_{n-1}} = b_{n-1}, X_{t_n} = b_n, X_{t_{n+1}} = b_{n+1}\}}{P\{X_0 = 0, X_{t_1} = b_1, \dots, X_{t_{n-1}} = b_{n-1}, X_{t_n} = b_n\}} \\
&= \frac{P\{X_{t_1} - X_0 = b_1, X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1}, X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n\}}{P\{X_{t_1} - X_0 = b_1, X_{t_2} - X_{t_1} = b_2 - b_1, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1}\}} \\
&= \frac{P\{X_{t_1} - X_0 = b_1\} \dots P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1}\} P\{X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n\}}{P\{X_{t_1} - X_0 = b_1\} \dots P\{X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = b_n - b_{n-1}\}} \\
&= P\{X_{t_{n+1}} - X_{t_n} = b_{n+1} - b_n\} = P\{X_{t_{n+1}} = b_{n+1} | X_{t_n} = b_n\},
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. $\square$

Sada pretpostavimo da posmatramo Poasonov proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ , i pretpostavimo još da se svaki put kada se događaj realizuje on može klasifikovati kao tip 1 ili tip 2. Neka se događaj tipa 1 realizuje sa verovatnoćom p , a događaj tipa 2 sa verovatnoćom $1 - p$, nezavisno od drugih događaja.

Definišimo procese $\{X_{1t}, t \geq 0\}$ i $\{X_{2t}, t \geq 0\}$ na sledeći način

$$\begin{aligned}
X_{1t} &- \text{ broj događaja tipa 1 do trenutka } t \text{ (uključujući } t \text{)}, \\
X_{2t} &- \text{ broj događaja tipa 2 do trenutka } t \text{ (uključujući } t \text{)}.
\end{aligned}$$

Jasno, važi

$$X_t = X_{1t} + X_{2t}.$$

Teorema 5.5 *Neka se svaki događaj u Poasonovom procesu $\{X_t, t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ , nezavisno jedan od drugog, može klasifikovati kao tip 1 sa verovatnoćom $p \in (0, 1)$, ili kao tip 2 sa verovatnoćom $1 - p$. Označimo sa X_{it} , $i = 1, 2$, broj događaja tipa i koji su se realizovali do trenutka t (uključujući t). Tada su procesi $\{X_{1t}, t \geq 0\}$, $\{X_{2t}, t \geq 0\}$ su Poasonovi procesi takvi da $\{X_{1t}, t \geq 0\}$ ima stopu rasta λp , a $\{X_{2t}, t \geq 0\}$ ima stopu rasta $\lambda(1 - p)$, i međusobno su nezavisni.*

Dokaz. Pokazaćemo da je $\{X_{1t}, t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λp , tj. da $\{X_{1t}, t \geq 0\}$ zadovoljava sledeće uslove:

- (i) $X_{10} = 0$.
- (ii) Proces $\{X_{1t}, t \geq 0\}$ ima nezavisne i stacionarne priraštaje.
- (iii) $P\{X_{1h} = 1\} = \lambda p \cdot h + o(h)$, $h \rightarrow 0$.
- (iv) $P\{X_{1h} \geq 2\} = o(h)$, $h \rightarrow 0$.

Uslov (i) sledi trivijalno iz $X_0 = 0$, a uslov (ii) sledi direktno iz činjenice da Poasonov proces $\{X_t, t \geq 0\}$ takođe ima nezavisne i stacionarne priraštaje. Da bismo pokazali da važi (iii) definišimo sledeće događaje

$$H_1 := \{X_h = 0\}, \quad H_2 := \{X_h = 1\}, \quad H_3 := \{X_h \geq 2\}, \quad h \rightarrow 0,$$

koji čine potpun sistem događaja, pa je $P\{X_{1h} = 1\}$ moguće izračunati koristeći formulu totalne verovatnoće,

$$\begin{aligned} P\{X_{1h} = 1\} &= P(H_1) \underbrace{P\{X_{1h} = 1|H_1\}}_{=0} + \underbrace{P(H_2)}_{=\lambda h + o(h)} P\{X_{1h} = 1|H_2\} + \underbrace{P(H_3)}_{=o(h)} P\{X_{1h} = 1|H_3\} \\ &= 0 + (\lambda h + o(h))p + o(h) = \lambda p \cdot h + o(h), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Konačno,

$$P\{X_{1h} \geq 2\} \leq P\{X_h \geq 2\} = o(h), \quad h \rightarrow 0.$$

Da je $\{X_{2t}, t \geq 0\}$ Poasonov proces se dokazuje analogno. $\square$

Primer 5.4 Ljudi ulaze u jednu poštu koja radi 24 časa dnevno u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 20 po satu nezavisno jedan od drugog i bez pratilaca. Sa verovatnoćom 0.4, osoba koja je ušla želi da podigne paket, dok se preostali ljudi upute ka blagajni, gde mogu da podignu, uplate novac ili plate račune. Ako sa $N(t)$ označimo broj ljudi koji su ušli u poštu u t sati, onda $N(t) : \mathcal{P}(20t)$ za fiksirano t . Dalje, ako $N_1(t)$ predstavlja broj ljudi koji su ušli u poštu u t sati, ali sa namerom da podignu paket (što se dešava sa verovatnoćom $p = 0.4$), onda $N_1(t) : \mathcal{P}(20 \cdot 0.4t)$. Broj ljudi koji su ušli u poštu u t sati, ali su se uputili ka blagajni (označimo taj broj sa $N_2(t)$) se ponaša u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $20 \cdot 0.6 = 12$ po satu. Procesi $N_1(t)$ i $N_2(t)$ su međusobno nezavisni i važi

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t).$$

Verovatnoća da nijedna osoba koja je ušla u poštu u 15 minuta (tj. 1/4 sata) nije ušla sa namerom da podigne paket je

$$P\{N_1(0.25) = 0\} = e^{-8 \cdot 0.25}.$$

Primetimo da je događaj $\{N_1(0.25) = 0\}$ ekvivalentan događaju da je vreme koje je proteklo između dva uzastopna dolaska osoba koje podižu paket veće od 15 minuta, tj. važi

$$P\{N_1(0.25) = 0\} = P\{T^1 > 0.25\},$$

gde je sa $T^1 : \mathcal{E}(8)$ označeno vreme između dva uzastopna dolaska osoba koje podižu paket u pošti. $\square$

Primer 5.5 Pretpostavimo da kompanija poseduje dve licence za automobile koje proizvodi u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 1 po danu i označimo sa $X(t)$ broj automobila koje je kompanija proizvela u t dana. Ako se zna da jedan od deset automobila padne na završnom testiranju i da rezultat testiranja jednog automobila ne zavisi od nekog drugog, onda sa $X_1(t)$ možemo označiti broj automobila koje je data kompanija proizvela u t dana, ali koji nisu prošli završno testiranje. Dakle,

$$X(t) : \mathcal{P}(t), \quad X_1(t) : \mathcal{P}\left(\frac{t}{10}\right).$$

Verovatnoća da je više od jednog proizvedenog automobila palo na završnom testiranju u 10 dana je

$$P\{X_1(10) > 1\} = 1 - P\{X_1(10) = 0\} - P\{X_1(10) = 1\} = 1 - e^{-1}(1 + 1) = 1 - 2e^{-1}.$$

$\square$

Teorema 5.5 se može uopštiti.

Teorema 5.6 *Neka se svaki događaj u Poasonovom procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ može klasifikovati kao tip i sa verovatnoćom $p_i \in (0, 1)$, $i = 1, \dots, k$ nezavisno od drugih događaja, gde*

$$\sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Označimo sa $X_i(t)$ broj događaja tipa i koji su se dogodili u $[0, t]$. Tada za svako $t \geq 0$ važi

$$X_1(t) + \dots + X_k(t) = X(t).$$

$\{X_i(t), t \geq 0\}$ je Poasonov proces sa stopom rasta λp_i , $i = 1, \dots, k$ i ti procesi su međusobno nezavisni.

Do sada smo pretpostavljali da su verovatnoće da se događaj klasifikuje kao tip i konstantne. To se može uopštiti ako pretpostavimo da te verovatnoće zavise od vremena kada se događaj desio.

Teorema 5.7 *Pretpostavimo da ako se događaj u Poasonovom procesu $\{X(t), t \geq 0\}$ sa stopom rasta λ desio u trenutku $y > 0$, onda se on može klasifikovati kao tip i , $i = 1, \dots, k$ sa verovatnoćom $P_i(y)$, gde*

$$\sum_{i=1}^k P_i(y) = 1.$$

Neka je $X_i(t)$ broj događaja tipa i koji su se desili u $[0, t]$, $i = 1, \dots, k$. Ako se klasifikacija događaja vrši nezavisno od drugih događaja, onda su slučajne promenljive $X_1(t), \dots, X_k(t)$ nezavisne i za svako fiksirano $t \geq 0$ imaju Poasonovu raspodelu sa parametrom (odnosno očekivanjem)

$$E(X_i(t)) = \lambda \int_0^t P_i(s) ds, \quad i = 1, \dots, k.$$

Poasonov proces pronalazi primenu u velikom broju realnih problema iz najrazličitijih sfera nauke i života. U nastavku navodimo zanimljiv primer koji pokazuje na koji način možemo da dobijemo dodatne informacije ako je deo njih poznat.

Primer 5.6 ([20]) *Poznato je da od trenutka kada se neka osoba zarazi HIV-om pa do pojave prvih znakova bolesti AIDS-a prođe relativno dug period inkubacije. Iz ovih razloga, zdravstvene organizacije ne mogu sa tačnošću da odrede koliko je ljudi zaraženo ovim virusom u nekom vremenskom trenutku. Sada ćemo predstaviti aproksimativni model za ovaj problem koji se može koristiti za dobijanje grube procene broja zaraženih HIV-om. Pretpostavimo da*

- *pojedinač biva zaražen HIV virusom u skladu sa Poasonovim procesom čija je stopa rasta λ nepoznata,*
- *vreme od trenutka kada pojedinac biva zaražen do trenutka kada se pojave prvi simptomi bolesti je slučajna promenljiva koja ima poznatu funkciju raspodele G ,*
- *vremena inkubacije kod različitih pojedinaca su nezavisna.*

Označimo sa $N_1(t)$ broj pojedinaca kod kojih su se pojavili znaci bolesti do trenutka t . Takođe, neka je sa $N_2(t)$ označen broj zaraženih HIV-om kod kojih se nisu pojavili znaci bolesti do trenutka t . Želimo da odgovorimo na dva pitanja.

1. Koja je najbolja procena za broj zaraženih bez simptoma do trenutka t ?
2. Koja je najbolja procena za broj zaraženih bez simptoma, ako period inkubacije ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 10 i ako je ukupan broj ljudi kod kojih su se ispoljili znaci bolesti u periodu od 16 godina 220 000?

Znamo da će pojedinci zaraženi HIV-om u trenutku s , $s \leq t$ ispoljiti znake bolesti do vremena t sa verovatnoćom $G(t-s)$ (vreme od trenutka kada pojedinac biva zaražen do pojave prvih simptoma je manje od $t-s$), a neće ispoljiti znake bolesti sa verovatnoćom $\bar{G}(t-s) := 1 - G(t-s)$. Takođe, znamo da su $N_1(t)$ i $N_2(t)$ nezavisne Poasonove slučajne promenljive sa očekivanjima

$$E(N_1(t)) = \lambda \int_0^t G(t-s) ds = \lambda \int_0^t G(y) dy,$$

$$E(N_2(t)) = \lambda \int_0^t \bar{G}(t-s) ds = \lambda \int_0^t \bar{G}(y) dy.$$

Da je λ poznato, mogli bismo da ga iskoristimo da ocenimo $N_2(t)$, broj pojedinaca koji su zaraženi HIV-om, ali ne pokazuju znake bolesti do vremena t , sa očekivanjem $E(N_2(t))$. Međutim, kako je λ nepoznato, moramo prvo nekako da ga ocenimo. Očekujemo da ćemo bar približno znati vrednost $N_1(t)$, pa je možemo iskoristiti kao procenu za $E(N_1(t))$.

Ako je broj pojedinaca sa simptomima do vremena t jednak n_1 , onda imamo procenu

$$n_1 \approx E(N_1(t)) = \lambda \int_0^t \bar{G}(y) dy.$$

Dakle, ocenjujemo λ sa $\hat{\lambda}$ koje je dato sa

$$\hat{\lambda} = \frac{n_1}{\int_0^t \bar{G}(y) dy}.$$

Korišćenjem procene za λ dobijamo procenu za broj zaraženih bez simptoma do vremena t

$$E(N_2(t)) \approx \hat{\lambda} \int_0^t \bar{G}(y) dy = n_1 \frac{\int_0^t \bar{G}(y) dy}{\int_0^t \bar{G}(y) dy}.$$

Specijalno, neka je G eksponencijalna raspodela sa očekivanjem μ . Tada je $\bar{G}(y) = e^{-\frac{y}{\mu}}$ za $y \geq 0$ i jednostavna integracija daje

$$E[N_2(t)] \approx \frac{n_1 \mu (1 - e^{-\frac{t}{\mu}})}{t - \mu (1 - e^{-\frac{t}{\mu}})}.$$

Ako pretpostavimo da je $t = 16$ godina, $\mu = 10$ godina i $n_1 = 220$ hiljada, tada je procena broja inficiranih bez simptoma do vremena $t = 16$ godina jednaka

$$E(N_2(16)) \approx \frac{220 \cdot 10(1 - e^{-1.6})}{16 - 10(1 - e^{-1.6})} = 218.96.$$

Dakle, ako period inkubacije ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 10 i ako je ukupan broj ljudi koji su iskazali znake bolesti u periodu od 16 godina 220 000 tada možemo očekivati da ima još 219 000 zaraženih HIV-om, a bez znakova bolesti.

Treba imati u vidu da je pretpostavka o konstantnoj stopi rasta λ slaba tačka ovog modela, naročito ako se posmatra dug vremenski period. Razvoj medicine i broj zaraženih, ali i promena svesti pojedinaca o virusima poput HIV-a značajno utiču na stopu po kojoj se pojedinci zaražavaju. $\square$

Primer 5.7 Jedan grad ima veoma popularnu prodavnicu sladoleda koja prodaje sladoled sa jedinstvenim ukusima, ali prilagođava ponudu u skladu sa željama kupaca. Kutije sa svežim sladoledima različitih ukusa se dostavljaju i stavljaju u prodaju u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta od 10 kutija po danu. Prodavnica ima pravilo da ako kutija sa nekim ukusom nije prodana u roku u 2 dana, taj ukus se ne stavlja u prodaju u narednih 15 dana. Vreme T koje je potrebno da se jedna kutija u potpunosti proda je slučajna promenljiva sa gustinom raspodele

$$\varphi_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-t} + \frac{4}{25}, & t \in (0, 5) \\ \frac{1}{5}e^{-t}, & t \geq 5 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Označimo sa X_t broj kutija stavljenih u prodaju u t dana. Tada, $X_t : \mathcal{P}(10t)$, dok vreme T_i koje protekne između stavljanja dve uzastopne kutije u prodaju ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $\lambda = 10$.

Pretpostavimo da je kutija sa sladoledom nekog ukusa stavljena u prodaju u trenutku s . Ta kutija će biti u potpunosti prodana do vremena t ako je $T < t - s$, pa je verovatnoća da se to desi jednaka

$$p_1(s) = P\{T < t - s\} = \int_0^{t-s} \varphi_T(a) da = \begin{cases} \frac{1}{5}(1 - e^{-t+s}) + \frac{4(t-s)}{25}, & t - s \in (0, 5) \\ \frac{1}{5}(1 - e^{-t+s}), & t - s \geq 5. \end{cases}$$

Ako sa $X_1(t)$ označimo broj kutija koje su stavljene u prodaju i prodane do vremena t , onda $X_1(t)$ za fiksirano t ima Poasonovu raspodelu sa očekivanjem

$$\begin{aligned} E(X_1(t)) &= 10 \int_0^t p_1(s) ds = 10 \int_0^{t-5} \frac{1}{5}(1 - e^{-t+s}) ds + 10 \int_{t-5}^t \left(\frac{1}{5}(1 - e^{-t+s}) + \frac{4(t-s)}{25} \right) ds \\ &= 2 \int_0^t (1 - e^{-t+s}) ds + \frac{8}{5} \int_{t-5}^t (t-s) ds \\ &= 2 \left(t - \int_{-t}^0 e^y dy \right) + \frac{8}{5} \left(5t - \frac{t^2 - (t-5)^2}{2} \right) \\ &= 10t - 2 + 2e^{-t} - \frac{4}{5}(10t - 25) = 2t + 18 + 2e^{-t}. \end{aligned}$$

Na sličan način možemo da odredimo očekivan broj kutija koje su stavljene u prodaju, ali nisu prodane u t dana. $\square$

5.4 Neka uopštenja Poasonovog procesa

5.4.1 Nehomogeni Poasonov proces

Nehomogeni Poasonov proces je jedna od generalizacija Poasonovog procesa koji se još zove i nestacionarni Poasonov proces. Dobija se kada je stopa rasta λ funkcija koja zavisi od vremena, a ne konstanta.

Primer 5.8 Ako bismo u Primeru 5.4 pretpostavili da pošta ne radi 24 časa dnevno, onda stopa rasta λ ne bi bila konstantna i imali bismo nehomogeni Poasonov proces. $\square$

Definicija 5.4 Proces prebrajanja $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove nehomogeni Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$ ako važi:

- 1) $X_0 = 0$.
- 2) Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje.
- 3) $P\{X_{t+h} - X_t = 1\} = \lambda(t)h + o(h), h \rightarrow 0$,
- 4) $P\{X_{t+h} - X_t \geq 2\} = o(h), h \rightarrow 0$.

Uvodimo oznaku:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(y) dy.$$

Tada se može pokazati da važi sledeća jednakost

$$P\{X_{s+t} - X_s = n\} = e^{-(m(s+t)-m(s))} \frac{(m(s+t) - m(s))^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dakle, $X_{s+t} - X_s$ je Poasonova slučajna promenljiva sa parametrom $m(s+t) - m(s)$. Specijalno, za $s = 0$ dobijamo da je $X_t : \mathcal{P}(m(t))$. Funkcija $m(t)$ zove se funkcija srednje vrednosti nehomogenog Poasonovog procesa.

Najvažnija osobina nehomogenog Poasonovog procesa je da on nije stacionaran, tj. sada “dozvoljavamo” mogućnost da se događaji češće pojavljuju u određenom vremenskom periodu nego u nekom drugom.

Primer 5.9 Prodavnica radi od 10 do 18h. Kupci dolaze u prodavnicu prateći Poasonov proces sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$ koja je do otvaranja prodavnice jednaka nuli, od 10 do 14h linearno raste, a od 14 do 18 linearno opada i data je sa

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 10] \\ 2t - 20, & t \in (10, 12] \\ t - 8, & t \in (12, 14] \\ -2t + 34, & t \in (14, 16] \\ -t + 18, & t \in (16, 18] \\ 0, & t \in (18, 24) \end{cases}, \quad \lambda(t) = \lambda(t - 24), t > 24.$$

Dodatno, pretpostavimo da je broj mušterija koje dolaze u prodavnicu nezavisan u disjunktним vremenskim intervalima.

1. Označimo sa X_t broj kupaca koji pristignu u prodavnicu u intervalu $[0, t]$ (t je dato u satima). Zbog nezavisnosti priraštaja kod nehomogenog Poasonovog procesa, broj kupaca u toku proizvoljnog dana je $X_{24} : \mathcal{P}(m(24))$, gde $m(24) = 24$.
2. Verovatnoća da nijedan kupac ne dođe do podneva je

$$P\{X_{12} - X_0 = 0\} = e^{-4},$$

jer je $X_{12} : \mathcal{P}(m(12)) = \mathcal{P}(4)$.

□

Na sličan način kao i kod homogenog Poasonovog procesa moguće je odrediti raspodelu slučajne promenljive S_n koja predstavlja vreme do n -tog događaja kod nehomogenog Poasonovog procesa X_t sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$.

Primer 5.10 Označimo sa T_1 vreme realizacije prvog događaja kod nehomogenog Poasonovog procesa X_t sa funkcijom intenziteta $\lambda(t)$. Događaji $\{T_1 > t\}$ i $\{X_t = 0\}$ su ekvivalentni, pa dobijamo

$$F_{T_1}(t) = 1 - P\{T_1 > t\} = 1 - P\{X_t = 0\} = 1 - e^{-m(t)},$$

gde $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$. Primetimo da sada T_1 u opštem slučaju nema eksponencijalnu raspodelu. Raspodelu vremena S_n u kom se dogodio n -ti događaj ako znamo da je broj događaja do trenutka s jednak n , određujemo na sledeći način

$$\begin{aligned} F_{S_n|\{X_s=n\}}(t) &= P\{S_n < t | \{X_s = n\}\} = \frac{P\{S_n < t, X_s = n\}}{P\{X_s = n\}} \\ &= \frac{P\{X_t - X_0 = n, X_s - X_t = 0\}}{P\{X_s = n\}}, \quad t < s. \end{aligned}$$

Dalje, koristeći nezavisnost priraštaja dobijamo

$$\begin{aligned} F_{S_n|\{X_s=n\}}(t) &= \frac{P\{X_t - X_0 = n\}P\{X_s - X_t = 0\}}{P\{X_s = n\}} \\ &= \frac{e^{-m(t)} \frac{m^n(t)}{n!} e^{-(m(s)-m(t))}}{e^{-m(s)} \frac{m^n(s)}{n!}} = \left(\frac{m(t)}{m(s)}\right)^n. \end{aligned}$$

Jasno, $F_{S_n|\{X_s=n\}}(t) = 1$ za $t \geq s$. □

5.4.2 Složeni (zbirni) Poasonov proces

Definicija 5.5 Stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ se zove složeni ili zbirni Poasonov proces ako može biti predstavljen kao

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

gde je $\{N_t, t \geq 0\}$ Poasonov proces, a Y_i nezavisne, jednako raspodeljene slučajne promenljive koje su nezavisne i od $\{N_t, t \geq 0\}$.

Primeri.

1. Ako je $Y_i = 1$, onda je $X_t \equiv N_t$ “običan” Poasonov proces.
2. Pretpostavimo da navijači u autobusima stižu na stadion sa Poasonovom raspodelom i pretpostavimo da je broj navijača u autobusima nezavisan i jednako raspodeljen. Tada je X_t složen Poasonov proces, gde je X_t broj navijača koji su stigli na stadion, a Y_i broj navijača u svakom autobusu.
3. Pretpostavimo da mušterije napuštaju supermarket u skladu sa Poasonovim procesom. Sume novca koje potroše mušterije pojedinačno su nezavisne i jednako raspodeljene. Ako je Y_i suma koju potroši i -ti kupac, a N_t broj mušterija koje napuste supermarket do trenutka t , onda X_t označava ukupnu sumu novca potrošenu do trenutka t .

Može se pokazati da za svako $t \geq 0$ važi

$$E(X_t) = \lambda t E(Y_1), \quad D(X_t) = \lambda t E(Y_1^2).$$

Primer 5.11 Pretpostavimo da putnički automobili prelaze granicu na jednom graničnom prelazu u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $\lambda = 12$ po satu. Ako su brojevi putnika koji se nalaze u svakom od tih automobila međusobno nezavisni i jednaki 1, 2, 3, 4 ili 5 sa verovatnoćama $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ i $\frac{1}{12}$, redom, želimo da nađemo očekivani broj ljudi koji će preći granicu u periodu od 5 sati.

Ako sa Y_i označimo broj ljudi u i -tom automobilu, onda

$$Y_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/4 & 1/12 \end{pmatrix}.$$

Dobijamo

$$E(Y_i) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 5 \cdot \frac{1}{12} = \frac{33}{12},$$

$$E(Y_i^2) = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} + 4^2 \cdot \frac{1}{4} + 5^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{109}{12}.$$

Ako sa X_t označimo broj ljudi koji su prešli granicu u t sati, a sa N_t broj automobila koji su prešli granicu u t sati, onda $N_t : \mathcal{P}(12t)$ za svako t i

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

tj. $\{X_t, t \geq 0\}$ je složeni Poasonov proces. Tada X_5 predstavlja broj ljudi koji su prešli granicu periodu od 5 sati i važi

$$E(X_5) = 12 \cdot 5 \cdot \frac{33}{12} = 165, \quad D(X_5) = 12 \cdot 5 \cdot \frac{109}{12} = 545.$$

□

Teorema 5.8 Neka su $\{X_t, t \geq 0\}$ i $\{Y_t, t \geq 0\}$ nezavisni složeni Poasonovi procesi sa stopama λ_1 i λ_2 i raspodelama F_1 i F_2 , redom. Tada je $\{X_t + Y_t, t \geq 0\}$ složen Poasonov proces sa stopom $\lambda_1 + \lambda_2$ i raspodelom

$$F(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} F_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Primer 5.12 Pretpostavimo da kompanija poseduje dve licence (A i B) za automobile koje proizvodi. Ako se dve kategorije automobila proizvode nezavisno, ali proizvodnja u svakoj od kategorija prati Poasonov proces sa stopom 0.5 po danu, želimo da odredimo verovatnoću da neće biti proizvedeno više od jednog automobila (bez obzira na kategoriju) u periodu od 10 dana.

Označimo sa $X_A(t)$ broj proizvedenih automobila sa A licencom u t dana, a sa $X_B(t)$ broj proizvedenih automobila sa B licencom u t dana. Tada $X_A(t) : \mathcal{P}(0.5t)$ i $X_B(t) : \mathcal{P}(0.5t)$, a ukupan broj proizvedenih automobila je proces dat sa

$$X(t) = X_A(t) + X_B(t).$$

Neće biti proizvedeno više od jednog automobila (bez obzira na kategoriju) u periodu od 10 dana ako nije proizveden nijedan automobil u 10 dana ili je proizveden jedan automobil iz jedne kategorije, a nijedan iz druge. Kako se automobili iz različitih kategorija proizvode nezavisno, tražena verovatnoća je

$$\begin{aligned} p &= P\{X_A(10) = 0, X_B(10) = 0\} + P\{X_A(10) = 1, X_B(10) = 0\} + P\{X_A(10) = 0, X_B(10) = 1\} \\ &= P\{X_A(10) = 0\}P\{X_B(10) = 0\} + P\{X_A(10) = 1\}P\{X_B(10) = 0\} \\ &\quad + P\{X_A(10) = 0\}P\{X_B(10) = 1\} \\ &= e^{-10 \cdot 0.5} e^{-10 \cdot 0.5} + (10 \cdot 0.5) e^{-10 \cdot 0.5} e^{-10 \cdot 0.5} + e^{-10 \cdot 0.5} (10 \cdot 0.5) e^{-10 \cdot 0.5} = 11e^{-10}. \end{aligned}$$

□

5.5 Zadaci

ZADATAK 5.1 Paketi kategorije B se dopremaju u poštu u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom od 20 paketa po satu. Statistički podaci pokazuju da težina svakog paketa ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 3432 g i standardnom devijacijom 482 g.

- Odrediti verovatnoću da će slučajno izabran paket kategorije B imati između 3000 i 4000 g?
- Pronaći verovatnoću da će u naredna 2 sata biti dopremljeno 40 paketa kategorije B sa težinom između 3000 i 4000 g. Odrediti prosečno vreme između dva uzastopna dopremanja paketa kategorije B .

Rešenje:

- Označimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja težinu paketa. Verovatnoća da će slučajno izabran paket kategorije B imati između 3000 i 4000 g je

$$P\{3000 < X \leq 4000\} \approx 0.6956 =: p$$

- Ako sa N_t označimo broj paketa kategorije B koji su dopremljeni u poštu za t sati, a sa $N_1(t)$ broj paketa kategorije B sa težinom između 3000 i 4000 g koji su dopremljeni u poštu za t sati, onda

$$N_t : \mathcal{P}(20t), \quad N_1(t) : \mathcal{P}(20pt)$$

i verovatnoća da će u naredna 2 sata biti dopremljeno 40 paketa kategorije B sa težinom između 3000 i 4000 g je

$$P\{N_1(2) = 40\} = \frac{(40p)^{40}}{40!} e^{-40p}.$$

Vreme između dva uzastopna dopremanja paketa kategorije B je slučajna promenljiva sa eksponencijalnom raspodelom i očekivanjem $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{20}$ sata tj. 3 minuta. □

ZADATAK 5.2 Mehanički uređaj proizvodi male “šokove” u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 0.1 po satu. Uređaj prestaje da radi kad se dogodi ukupno K šokova. Odrediti očekivani vek trajanja T tog uređaja. Naći verovatnoće da će se $K-t$ -i i $(K-1)$ -i šok dogoditi posle $E(T)$ sati i uporediti te vrednosti.

Rešenje: Neka slučajna promenljiva $X_t : \mathcal{P}(0.1t)$ predstavlja broj “šokova” koje mehanički uređaj proizvede u t sati. Tada

$$P\{X_{E(T)} = K\} = e^{-0.1 \cdot 10K} \frac{(0.1 \cdot 10K)^K}{K!} = e^{-K} \frac{K^K}{K!} = P\{X_{E(T)} = K - 1\}.$$

□

ZADATAK 5.3 Gajgerov brojač broji radioaktivne čestice emitovane od strane izvora. Pretpostavimo da čestice pristižu u Gajgerov brojač u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $\lambda = 800$ u sekundi. Brojač neće detektovati radiotivnu česticu sa verovatnoćom 0.1, nezavisno od svih ostalih. Pretpostavimo da je brojač detektovao 3 čestice u 0.01 sekundi. Odrediti verovatnoću da je bar 7 čestica pristiglo u brojač u tom periodu.

ZADATAK 5.4 Korisnici pristižu u biblioteku u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta od dva korisnika po minuti i oni se mogu klasifikovati u 3 kategorije, nezavisno jedan od drugog: studenti, radnici i ostali. Trećina populacije koja koristi usluge biblioteke su studenti i vreme koje oni provedu u biblioteci, nezavisno jedan od drugog, je uniformno raspodeljeno u intervalu $(10, 70)$ minuta. To vreme je takođe nezavisno od broja korisnika biblioteke. Odrediti očekivani broj studenata koji će doći u biblioteku u prvih sat vremena od otvaranja. Koje je ukupno očekivano vreme koje ti studenti provedu u biblioteci? Odrediti verovatnoću da nijedan student ne dođe u biblioteku u 10 minuta.

ZADATAK 5.5 Poznato je da ljudi bivaju zaraženi korona virusom u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta $\lambda = 300$ po danu. Vreme od kada se pojedinac zarazi do pojave simptoma je eksponencijalna slučajna promenljiva sa očekivanjem 5 dana. Pretpostavimo da su vremena zaražavanja pojedinaca međusobno nezavisna. Pronaći procenu za broj zaraženih bez simptoma u 10 dana. Da li u tom periodu ima više zaraženih bez ili sa simptomima?

ZADATAK 5.6 Sateliti se lansiraju u svemir prema Poasonovom procesu sa stopom 2 po godini. Vreme koje svaki satelit (nezavisno od ostalih) provede u svemiru pre nego što padne na zemlju je eksponencijalno raspodeljeno sa očekivanjem 40 godina. Odrediti očekivani broj satelita koji će pasti na zemlju posle 20 godina.

ZADATAK 5.7 Funkcija intenziteta nehomogenog Poasonovog procesa $\{N_t, t \geq 0\}$ je data sa

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5, & t \in (1, 2] \cup (3, 4] \cup (5, 6] \cup \dots \\ 3, & t \in (0, 1] \cup (2, 3] \cup \dots \end{cases}.$$

Pronaći verovatnoću da je broj događaja u intervalu $(1.25, 3]$ veći od 2.

Rešenje: Slučajna promenljiva $N(3) - N(1.25)$ ima Poasonovu raspodelu sa očekivanjem

$$m(3) - m(1.25) = \int_{1.25}^3 \lambda(t) dt = \int_{1.25}^2 5 dt + \int_2^3 3 dt = 6.75.$$

Dakle, važi

$$P\{N(3) - N(1.25) > 2\} = 1 - e^{-6.75} \left(1 + 6.75 + \frac{6.75^2}{2}\right) \approx 0.964.$$

□

ZADATAK 5.8 Zemljotresi se dešavaju u skladu sa Poasonovim procesom X_t sa stopom rasta 2 na nedelju dana. Svaki zemljotres prouzrokuje neku štetu. Pretpostavimo da su štete prouzrokovane različitim zemljotresima međusobno nezavisne i da je šteta Y_n prouzrokovana n -tim zemljotresom slučajna promenljiva sa uniformnom raspodelom na intervalu $(0, 10)$. Proceniti ukupnu štetu i standardnu devijaciju štete prouzrokovanu zemljotresima u godinu dana.

Rešenje: Ukupna šteta u t nedelja se modelira kao složeni Poasonov proces

$$N_t = \sum_{k=1}^{X_t} Y_k,$$

gde $X_t : \mathcal{P}(2t)$ i $Y_k : \mathcal{U}(0, 10)$ za svako $k = 1, 2, \dots$. Važi

$$E(N_t) = E(X_t)E(Y_1) = 2t \cdot 5 = 10t, \quad D(N_t) = E(X_t)E(Y_1^2) = 2t \left(\frac{100}{12} + 25 \right) = 2t \frac{100}{3}.$$

Za $t = 52$ imamo

$$E(N_{52}) = 520, \quad \sqrt{D(N_{52})} = 10\sqrt{\frac{104}{3}}.$$

□

ZADATAK 5.9 Počevši od nekog vremena autobusi pristižu na stanicu u skladu sa Poasonovim procesom sa parametrom λ (po času). Putnici pristižu u skladu sa nezavisnim Poasonovim procesom sa parametrom μ . Kada autobus pristigne na stanicu svi putnici koji u tom trenutku čekaju odmah ulaze u autobus, a svi naredni čekaju sledeći autobus. Odrediti vezu između broja autobusa koji pristignu u t sati, broja putnika koji pristignu u t sati i slučajnih promenljivih koje predstavljaju broj putnika koji uđu u k -ti autobus, $k \in \mathbb{N}$. Odrediti očekivani broj putnika koji uđu u m -ti autobus.

Rešenje: Označimo sa N_t broj autobusa koji se zaustave na stanici u periodu od t sati i sa X_t broj putnika koji stignu na stanicu u periodu od t sati. Dato je da $N_t : \mathcal{P}(\lambda t)$ i $X_t : \mathcal{P}(\mu t)$. Dalje, neka je T_n vreme koje protekne između dolaska $(n-1)$ -og i n -tog autobusa, a $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ vreme dolaska n -tog autobusa. Znamo da važi $T_n : \mathcal{E}(\lambda)$ za svako n .

Broj putnika koji uđu u m -ti autobus je $Z_m = X_{S_m} - X_{S_{m-1}} : \mathcal{P}(\underbrace{\mu(S_m - S_{m-1})}_{\mu T_m})$. Važi

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Z_k,$$

a iz

$$E(X_t) = E(N_t)E(Z_k)$$

sledi

$$E(Z_k) = \frac{E(X_t)}{E(N_t)} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

□

ZADATAK 5.10 Taxi vozila polaze sa aerodroma u skladu sa Poasonovim procesom sa stopom rasta od 2 po minutu. Verovatnoće da se u vozilu nalazi jedna, dve ili tri osobe su 0.5, 0.3 i 0.2, redom. Pretpostavimo da su polasci međusobno nezavisni, tj. da je broj ljudi u jednom polasku ne zavisi od ostalih polazaka i da ne zavisi od vremena polaska.

- (a) Odrediti verovatnoću da je broj vozila koja su krenula sa aerodroma u 10 minuta jednak 10.
- (b) Odrediti očekivani broj putnika koji krenu sa aerodroma u 10 minuta.

Rešenje: Označimo sa N_t broj vozila koja su krenula sa aerodroma u t minuta, a sa Y_i broj osoba koje se nalaze u i -tom vozilu. Tada

$$N_t : \mathcal{P}(2t), \quad Y_i : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Tada je $\{X_t, t \geq 0\}$, gde X_t predstavlja broj osoba koje su krenule sa aerodroma u t minuta, složeni Poasonov proces i važi

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i.$$

- (a) Verovatnoća da je broj vozila koja su krenula sa aerodroma u 10 minuta jednak 10 je

$$P\{N_{10} = 10\} = e^{-20} \frac{20^{10}}{10!}.$$

- (b) Očekivan broj putnika koji su krenuli sa aerodroma u 10 minuta je

$$E(X_{10}) = 34.$$

□

ZADATAK 5.11 Broj ljudi koji kupuju lutrijske listiće je saglasan sa Poasonovim procesom sa stopom rasta 100 po danu. Poznato je da su dobiti nezavisni i da je dobitak od svakog lutrijskog listića slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom, očekivanjem 1 i standardnom devijacijom $\sqrt{3}$. Takođe, dobitak ne zavisi od broja lutrijskih listića kupljenih u nekom vremenskom periodu. Odrediti očekivani dobitak od svih lutrijskih listića kupljenih u dva dana.

6. BRAUNOVO KRETANJE

6.1 Slučajno kretanje i pojam Braunovog kretanja



Braunovo kretanje je stohastički proces čija je prvobitna uloga bila opisivanje kretanja čestica koje su uronjene u tečnost ili gas. Ime potiče od škotskog botaničara Roberta Brauna (eng. Robert Brown) koji je 1827. godine pomoću mikroskopa posmatrao nepredvidivo kretanje polenovih zrna u vodi i uočio je da su putanje čestica nepravilne. Zatim je Ajnštajn 1905. godine objasnio da je takvo kretanje posledica bombardovanja molekula vode i u skladu sa tim je razvio matematičku teoriju. On je u dugačku, tanku cev sa čistom vodom ubrizgao neku količinu mastila i posmatrao je kako se gustina mastila u vodi menja tokom vremena (za više detalja videti [6]). Objasnjeno je da dolazi do mnogo brzih sudara čestica mastila sa česticama vode što sprečava stvaranje taloga, a dolazi i do razmene energije i količine kretanja između čestica. Kasnije je MIT matematičar Norbert Viner (Norbert Wiener) razvio precizniji matematički model Braunovog kretanja.

Kao što je već objašnjeno, Ajnštajn je posmatrao gustinu mastila u vodi u trenutku $t \geq 0$ i položaju $x \in \mathbb{R}$ (u oznaci $f(x, t)$), pri čemu je početna gustina je data sa

$$f(x, 0) = \delta_0.$$

On je pokazao da f zadovoljava tzv. difuzionu (toplotnu) jednačinu

$$\partial_t f = \frac{d}{2} \partial_{xx} f$$

čije je rešenje dato sa

$$f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi td}} e^{-\frac{x^2}{2td}},$$

pri čemu konstanta d zavisi od univerzalne gasne konstante, apsolutne temperature, koeficijenta trenja i Avogadrovog broja. Time je pokazano da je f gustina raspodele slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0, td)$ raspodelom. Iako je Ajnštajnova teorija vrlo značajna jer je, između ostalog, njegov rad imao ulogu u izračunavanju broja molekula u molu i u razvoju atomske teorije materije, mi ćemo ovom problemu pristupiti na malo drugačiji način. Naime, pomoću slučajnog kretanja (hoda) ćemo pokazati da za fiksirano t slučajna promenljive $X(t)$, koja predstavlja položaj čestice u trenutku t , ima normalnu $\mathcal{N}(0, td)$ raspodelu.

Posmatra se kretanje čestice po celobrojnoj rešetki. Pretpostavljamo da je $x = 0$ početni položaj čestice i da u diskretnim vremenskim trenucima $n\Delta t$, $n = 1, 2, \dots$ čestica prelazi rastojanje

Δx na levo ili desno sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Označimo sa S_n broj pomeranja čestice u desno u n koraka. Slučajna promenljiva S_n se može izraziti kao zbir

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i,$$

pri čemu je sa X_i označena slučajna promenljiva koja je jednaka 1 ako se u i -tom koraku (odnosno vremenskom trenutku $i\Delta t$) čestica pomerila u desno*, a u suprotnom je jednaka 0. Dakle,

$$X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots$$

i slučajne promenljive $X_1, \dots$ su nezavisne. Kako je S_n definisana kao zbir nezavisnih slučajnih promenljivih sa binomnom raspodelom, onda i ona ima binomnu raspodelu sa očekivanjem i disperzijom

$$\begin{aligned} E(S_n) &= nE(X_1) = n\frac{1}{2} = \frac{n}{2}, \\ D(S_n) &= nD(X_1) = n\frac{1}{4} = \frac{n}{4}, \end{aligned}$$

jer je

$$E(X_i) = \frac{1}{2}, \quad E(X_i^2) = \frac{1}{2}, \quad D(X_i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Ideja je izraziti položaj čestice u trenutku $t = n\Delta t$ pomoću S_n . Dobijamo da važi

$$X(t) = S_n\Delta x + (n - S_n)(-\Delta x) = S_n\Delta x - n\Delta x + S_n\Delta x = (2S_n - n)\Delta x.$$

Tada je

$$\begin{aligned} D(X(t)) &= D((2S_n - n)\Delta x) = (\Delta x)^2 D(2S_n - n) = (\Delta x)^2 D(2S_n) \\ &= 4(\Delta x)^2 D(S_n) = (\Delta x)^2 n = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} t. \end{aligned}$$

Pretpostavljamo da je $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = d$ za neku pozitivnu konstantu d . Tada je

$$\begin{aligned} X(t) &= (2S_n - n)\Delta x = \frac{2(S_n - \frac{n}{2})}{\sqrt{n}} \sqrt{n}\Delta x = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sqrt{n}\Delta x \\ &= \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sqrt{\frac{t}{\Delta t}} \Delta x = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sqrt{t \frac{\Delta x^2}{\Delta t}} = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sqrt{td}. \end{aligned}$$

Primenom Moavr - Laplasove teoreme dobijamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \sqrt{td} \leq b\right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{a}{\sqrt{td}} \leq \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \leq \frac{b}{\sqrt{td}}\right\} \\ &= \int_{\frac{a}{\sqrt{td}}}^{\frac{b}{\sqrt{td}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi td}} e^{-\frac{x^2}{2td}} dx. \end{aligned}$$

*Alternativno, slučajnoj promenljivoj X_i smo mogli da dodelimo vrednost 1 ako se čestica pomerila u levo, a 0 ako se čestica pomerila u desno. Tada bi S_n označavala broj pomeranja u levo u n koraka

Dakle, zaključujemo da $X(t)$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem 0 i disperzijom td , tj.

$$X(t) : \mathcal{N}(0, td).$$

Inspirisani ovim, za $d = 1$ uvodimo stohastički proces koji se naziva Braunovo kretanje ili Vinerov proces, po ugledu na matematičare koji su ih proučavali.

Definicija 6.1 *Stohastički proces $\{W_t, t \geq 0\}$ se zove **Braunovo kretanje (Vinerov proces)** ako važi:*

- 1) $W_0 = 0$ skoro sigurno.
- 2) Proces $\{W_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje.
- 3) Važi $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t - s)$ za svako $t > s \geq 0$.

Specijalno, za $s = 0$ dobijamo $W_t : \mathcal{N}(0, t)$, pa znamo da je

$$E(W_t) = 0, \quad D(W_t) = t = E(W_t^2).$$

Takođe, iz osobine 3) vidimo da Braunovo kretanje ima stacionarne priraštaje, jer raspodela slučajne promenljive $W_t - W_s$ zavisi samo od dužine njoj odgovarajućeg intervala $(s, t]$, a ne od pozicije tog intervala na t -osi. Prema tome, Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$ bismo mogli definisati kao proces sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima, takav da $W_t : \mathcal{N}(0, t)$ za svako $t > 0$ i $W_0 = 0$.

Napomena 6.1 *Treba imati u vidu da neki autori prave razliku između Braunovog kretanja i Vinerovog procesa. Na primer, može se naći objašnjenje da je Vinerov proces zapravo verzija Braunovog kretanja sa skoro svuda neprekidnim trajektorijama. Mi ćemo podrazumevati da Braunovo kretanje ima skoro svuda neprekidne trajektorije.*

Braunovo kretanje, dato u Definiciji 6.1, je specijalni slučaj Braunovog kretanje (sa driftom i volatilnošću) koje pronalazi veliku primenu u finansijama, o čemu će kasnije biti reči.

Definicija 6.2 *Stohastički proces $\{\tilde{W}_t, t \geq 0\}$ je Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ ako*

- (i) $\tilde{W}_0 = 0$ skoro sigurno.
- (ii) $\{\tilde{W}_t, t \geq 0\}$ ima stacionarne i nezavisne priraštaje.
- (iii) Za svako $t \geq 0$, $\tilde{W}_t$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem μt i varijansom $\sigma^2 t$, tj.

$$\tilde{W}_t : \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t).$$

Imajući ovu definiciju u vidu, da bismo naglasili da posmatramo Braunovo kretanje dato u Definiciji 6.1, ponekad dodajemo reč *standardno*. Ukoliko ništa nije naznačeno, posmatramo standardno Braunovo kretanje. Braunovo kretanje sa driftom μ i volatilnošću σ možemo definisati preko standardnog Braunovog kretanja koristeći osobinu normalne raspodele.

Ako je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje, onda se $\{\tilde{W}_t, t \geq 0\}$ može definisati kao

$$\tilde{W}_t = \sigma W_t + \mu t.$$

Iako će u ovoj knjizi akcenat biti na jednodimenzionalnom Braunovom kretanju, i to neće biti posebno naglašavano, treba imati u vidu da postoji i višedimenzionalno Braunovo kretanje koje se, analogno definiciji višedimenzionalne slučajne promenljive, definiše kao n -torka čija je svaka komponenta jednodimenzionalno Braunovo kretanje.

Definicija 6.3 $\mathbb{R}^n$ -vrednosni stohastički proces $\{\mathbb{W}_t, t \geq 0\}$, gde

$$\mathbb{W}_t = \mathbb{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)),$$

je n -dimenzionalno Braunovo kretanje ako važi:

- 1) Za svako $k = 1, 2, \dots, n$, $\{W_k(t), t \geq 0\}$ je jednodimenzionalno Braunovo kretanje.
- 2) σ -algebre $\mathcal{W}^k := \mathcal{F}(W_k(t), t \geq 0)$ su nezavisne, za $k = 1, 2, \dots, n$.

6.2 Neka svojstva Braunovog kretanja

Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje. Znamo da za svako $t > 0$ i $a < b$ važi

$$P\{a \leq W_t \leq b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2t}} dx,$$

jer

$$W_t : \mathcal{N}(0, t).$$

Sada nas interesuje čemu je jednaka zajednička verovatnoća

$$P\{a_1 \leq W_{t_1} \leq b_1, a_2 \leq W_{t_2} \leq b_2, \dots, a_n \leq W_{t_n} \leq b_n\},$$

za $0 < t_1 < \dots < t_n$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

Može se pokazati da važi

$$\begin{aligned} & P\{a_1 \leq W_{t_1} \leq b_1, a_2 \leq W_{t_2} \leq b_2, \dots, a_n \leq W_{t_n} \leq b_n\} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \dots dx_1, \end{aligned} \quad (6.1)$$

gde je $g(x, t|y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}$.

Mi ćemo pokazati opštije tvrđenje.

Teorema 6.1 Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje. Tada za svako $n \in \mathbb{N}$, sva vremena $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ i sve Borelove funkcije $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ važi

$$\begin{aligned} E(f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) g(x_1, t_1|0) \\ &\quad \cdot g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \dots dx_1. \end{aligned}$$

Napomena 6.2 Ako u Teoremi 6.1 odaberemo

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = I_{[a_1, b_1]}(x_1) I_{[a_2, b_2]}(x_2) \dots I_{[a_n, b_n]}(x_n),$$

pri čemu je sa $I_{[a_i, b_i]}$ označen indikator skupa $[a_i, b_i]$, dobijamo baš (6.1). To lako možemo ilustrovati na slučaju $n = 1$. Naime, ako je

$$f(x) = I_{[a, b]}(x),$$

dobijamo

$$E(f(W_t)) = E(I_{[a, b]}(W_t)) = \int_{-\infty}^{\infty} I_{[a, b]}(x) \varphi_{W_t}(x) dx = \int_a^b \varphi_{W_t}(x) dx = P\{a \leq W_t \leq b\}.$$

Dokaz Teoreme 6.1. Neka je $X_i = W_{t_i}$, $Y_i = W_{t_i} - W_{t_{i-1}} = X_i - X_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$ i

$$h(y_1, \dots, y_n) := f(y_1, y_1 + y_2, \dots, y_1 + \dots + y_n).$$

Tada važi

$$\begin{aligned} E(f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})) &= E(f(X_1, \dots, X_n)) \\ &= E(f(X_1, X_2 - X_1 + X_1, X_3 - X_2 + X_2 - X_1 + X_1, \dots, X_n - X_{n-1} + \dots + X_1)) \\ &= E(f(Y_1, Y_2 + Y_1, Y_3 + Y_2 + Y_1, \dots, Y_n + Y_{n-1} + \dots + Y_1)) \\ &= E(h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, y_2, \dots, y_n) \varphi_{(Y_1, \dots, Y_n)}(y_1, \dots, y_n) dy_n \dots dy_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, y_2, \dots, y_n) \varphi_{Y_1}(y_1) \dots \varphi_{Y_n}(y_n) dy_n \dots dy_1, \end{aligned}$$

gde je korišćeno da su $Y_1, \dots, Y_n$ nezavisne slučajne promenljive, pa se zajednička gustina može napisati kao proizvod marginalnih. Kako $Y_i : \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, imamo

$$\varphi_{Y_1}(y) = g(y, t_1|0)$$

i

$$\varphi_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\frac{y^2}{2(t_i - t_{i-1})}} = g(y, t_i - t_{i-1}|0), \quad i = 2, 3, \dots$$

Dakle,

$$E(f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(y_1, y_2, \dots, y_n) g(y_1, t_1|0) \dots g(y_n, t_n - t_{n-1}|0) dy_n \dots dy_1.$$

Posle smene promenljivih $y_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, gde je Jakobijan transformacije jednak 1, dobijamo

$$\begin{aligned} E(f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}) g(x_1, t_1|0) \\ &\quad \cdot \dots g(x_n - x_{n-1}, t_n - t_{n-1}|0) dx_n \dots dx_1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) g(x_1, t_1|0) g(x_2, t_2 - t_1|x_1) \\ &\quad \cdot \dots g(x_n, t_n - t_{n-1}|x_{n-1}) dx_n \dots dx_1. \end{aligned}$$

□

Lema 6.1 Autokovarijansna funkcija Braunovog kretanja $\{W_t, t \geq 0\}$ je jednaka

$$K(t, s) = E(W_t W_s) = \min\{t, s\}, \quad s, t \geq 0.$$

Dokaz. Kako je $E(W_t) = 0$ za svako $t \geq 0$, važi

$$K(t, s) = E(W_t W_s) - E(W_t)E(W_s) = E(W_t W_s).$$

Ako je $t > s$, onda

$$E(W_t W_s) = E((W_t - W_s + W_s)W_s) = E((W_t - W_s)W_s) + E(W_s^2),$$

a kako Braunovo kretanje ima nezavisne priraštaje dobijamo

$$E(W_t W_s) = E(W_t - W_s)E(W_s) + D(W_s) = s.$$

Za $t = s$, važi $E(W_t W_s) = D(W_t) = t$, dok se analogno pokazuje da je $K(t, s) = t$ za $t < s$. $\square$

Naredna teorema sledi iz nezavisnosti priraštaja Braunovog kretanja, ali je nećemo dokazivati zbog činjenice da je Braunovo kretanje stohastički proces neprekidan u vremenu koje nismo detaljno obradili.

Teorema 6.2 *Braunovo kretanje je proces Markova.*

Primeri

Primer 6.1 *Dato je standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$.*

- (a) *Pošto je za svako fiksirano t poznata raspodela slučajne promenljive W_t , lako se mogu izračunati verovatnoće oblika*

$$P\{a < W_1 < b\}, \quad a < b.$$

Na primer, dobijamo

$$P\{1 < W_1 < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1) \approx 0.136.$$

- (b) *Sada želimo da pronađemo uslovnu verovatnoću $P(W_2 < 3 | \{W_1 = 1\})$. Primetimo da važi $W_2 = W_1 + W_2 - W_1$. Takođe, W_1 i $W_2 - W_1$ su nezavisne slučajne promenljive, gde*

$$W_2 - W_1 : \mathcal{N}(0, 1),$$

i $E(W_1 | \{W_1 = 1\}) = 1$, $D(W_1 | \{W_1 = 1\}) = 0$. Pošto je slučajna promenljiva $W_2 - W_1$ nezavisna od W_1 , koristeći da $W_2 | \{W_1 = 1\}$ možemo predstaviti kao zbir nezavisnih slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom, dobijamo

$$W_2 | \{W_1 = 1\} : \mathcal{N}(1, 1).$$

Sledi,

$$P\{W_2 < 3 | W_1 = 1\} = \Phi\left(\frac{3-1}{1}\right) + 0.5 = \Phi(2) + 0.5 \approx 0.98.$$

$\square$

Primer 6.2 Sa $\{W_t, t \geq 0\}$ je dato standardno Braunovo kretanje. Koristeći osobine uslovnog očekivanja u kombinaciji sa definicijom Braunovog kretanja (nezavisnost priraštaja $W_4 - W_2$ i W_2 i stacionarnost), možemo odrediti $E(W_4^2|W_2)$. Važi

$$\begin{aligned} E((W_4)^2|W_2) &= E((W_4 - W_2 + W_2)^2|W_2) \\ &= E((W_4 - W_2)^2 + W_2^2 + 2W_2(W_4 - W_2)|W_2) \\ &= E((W_4 - W_2)^2|W_2) + W_2^2 + 2W_2E(W_4 - W_2|W_2) \\ &= W_2^2 + 2. \end{aligned}$$

Poslednja jednakost sledi iz

$$W_4 - W_2 : \mathcal{N}(0, 2), \quad E(W_4 - W_2|W_2) = E(W_4 - W_2) = 0 \quad i \quad E((W_4 - W_2)^2|W_2) = 2.$$

□

Primer 6.3 Proces $\{V(t), t \geq 0\}$ dat sa $V(t) = W(t + T) - W(T)$ je standardno Braunovo kretanje za svako $T > 0$, ako je $\{W(t), t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje.

To se može pokazati po definiciji: Za bilo koje $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ priraštaji

$$V(t_n) - V(t_{n-1}), \dots, V(t_1) - V(t_0)$$

procesa $V(t)$ su nezavisni, jer su priraštaji

$$W(t_n + T) - W(t_{n-1} + T), \dots, W(t_1 + T) - W(t_0 + T)$$

procesa $W(t)$ nezavisni ($\{W(t), t \geq 0\}$ je Braunovo kretanje).

Pored toga, za bilo koje $0 \leq s < t$ priraštaj $V(t) - V(s)$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $t - s$, jer je ima i $W(t + T) - W(s + T)$. Jasno, važi

$$V(0) = W(T) - W(T) = 0 \quad \text{skoro sigurno.}$$

Sledi da je $\{V(t), t \geq 0\}$ Vinerov proces. □

Primer 6.4 Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje i neka je proces $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$ dat sa

$$X_t := W_t - tW_1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(a) Odredimo autokovarijansnu funkciju $K_X(t, s)$ procesa X_t . Kako je

$$E(X_t) = E(W_t - tW_1) = E(W_t) - tE(W_1) = 0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} K_X(t, s) &= E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E((W_t - tW_1)(W_s - sW_1)) \\ &= E(W_t W_s) - tE(W_s W_1) - sE(W_1 W_t) + stE(W_1^2) \\ &= K(t, s) - sK(t, 1) - tK(s, 1) + stD(W_1) \\ &= \min\{t, s\} - st - ts + st \\ &= \min\{t, s\} - ts \end{aligned}$$

(b) Proces $\{X_t, 0 \leq t \leq 1\}$ nema nezavisne priraštaje.

Neka je $0 < s < t \leq 1$. Tada je

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_t - X_s, X_s) &= \text{cov}(X_t, X_s) - \text{cov}(X_s, X_s) = \min\{s, t\} - st - \text{cov}(X_s, X_s) \\ &= s - st - (s - s^2) = s(s - t) \neq 0.\end{aligned}$$

Da su priraštaji nezavisni imali bismo $E((X_t - X_s)X_s) = E(X_t - X_s)E(X_s) = 0$ za svako $s < t$, što ovde nije slučaj. $\square$

ODGOVORITE NA PITANJE:

ČEMU JE JEDNAKO $E(W_t^n)$ ZA PROIZVOLJNO
 $n \in \mathbb{N}$?

Primer 6.5 Dato je standardno Braunovo kretanje $\{W(t), t \geq 0\}$. Za $s \geq t \geq 0$ važi

$$E(W(s)W^n(t)) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots \\ n!! t^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ako } n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots \end{cases}.$$

Kako $W(t)$ ima nezavisne i stacionarne priraštaje, važi

$$E(W(s)W^n(t)) = E(W(s) - W(t))E(W^n(t)) + E(W^{n+1}(t)) = E(W^{n+1}(t)).$$

Koristeći parcijalnu integraciju (uzimamo $u = x^n$, $dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$), dobijamo

$$\begin{aligned}E(W^{n+1}(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \underbrace{-nx^{n-1} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} nx^{n-1} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx}_{=tnE(W_t^{n-1})} = tnE(W_t^{n-1}),\end{aligned}$$

jer

$$v = \int \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} dx = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int e^s ds = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \quad \left(\text{smena } s = -\frac{x^2}{2t} \right).$$

Kako je poznato da $E(W(t)) = 0$ i $E(W^2(t)) = D(W(t)) = t$, indukcijom se može pokazati da je

$$E(W(s)W^n(t)) = E(W^{n+1}(t)) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n = 2k, k = 0, 1, 2, \dots \\ n!! t^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ako } n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ovaj primer pokazuje kako možemo pronaći momente reda n Braunovog kretanja za bilo koje $n \in \mathbb{N}$. Znamo da je gustina raspodele W_t parna funkcija, pa je svaki momenat neparnog stepena Braunovog kretanja jednak nuli, što je pokazano gore. $\square$

Primer 6.6 Neka je sa $\{W_t, t \geq 0\}$ označeno standardno Braunovo kretanje. Označimo sa $\mathcal{W}_\alpha$ istoriju Braunovog kretanja do vremena α (uključujući α). Uslovno očekivanje

$$E(W_t^3 + 2W_s^2 + W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha), \quad t > s \geq 0$$

zavisi od parametra $\alpha > 0$ i njegovog odnosa sa t i s .

Za svako $t > \alpha$ važi

$$\begin{aligned} E(W_t | \mathcal{W}_\alpha) &= E(W_t - W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) + E(W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) \\ &= E(W_t - W_\alpha) + W_\alpha = W_\alpha \\ E(W_t^2 | \mathcal{W}_\alpha) &= E((W_t - W_\alpha)^2 | \mathcal{W}_\alpha) + 2E(W_t W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) - E(W_\alpha^2 | \mathcal{W}_\alpha) \\ &= t - \alpha + 2W_\alpha E(W_t | \mathcal{W}_\alpha) - W_\alpha^2 = t - \alpha + W_\alpha^2 \\ E(W_t^3 | \mathcal{W}_\alpha) &= E((W_t - W_\alpha)^3 - 3W_t W_\alpha^2 + 3W_t^2 W_\alpha + W_\alpha^3 | \mathcal{W}_\alpha) \\ &= E((W_t - W_\alpha)^3) - 3W_\alpha^2 E(W_t | \mathcal{W}_\alpha) + 3W_\alpha E(W_t^2 | \mathcal{W}_\alpha) - W_\alpha^3 \\ &= -3W_\alpha^3 + 3W_\alpha(t - \alpha) + 3W_\alpha^3 + W_\alpha^3 = 3W_\alpha(t - \alpha) + W_\alpha^3. \end{aligned}$$

Svuda smo koristili da je priraštaj $W_t - W_\alpha$ nezavisan od istorije Braunovog kretanja $\mathcal{W}_\alpha$ i da je W_α $\mathcal{W}_\alpha$ -merljivo.

Ako je $\alpha \geq t$, važi

$$E(W_t^3 + 2W_s^2 + W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) = W_t^3 + 2W_s^2 + W_\alpha,$$

jer je W_b $\mathcal{W}_\alpha$ -merljivo za svako $b \leq \alpha$.

Ako je $s \leq \alpha < t$, onda je

$$\begin{aligned} E(W_t^3 + 2W_s^2 + W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) &= E(W_t^3 | \mathcal{W}_\alpha) + 2E(W_s^2 | \mathcal{W}_\alpha) + W_\alpha \\ &= 3W_\alpha(t - \alpha) + W_\alpha^3 + 2W_s^2 + W_\alpha. \end{aligned}$$

U slučaju $0 < \alpha < s$, važi

$$\begin{aligned} E(W_t^3 + 2W_s^2 + W_\alpha | \mathcal{W}_\alpha) &= E(W_t^3 | \mathcal{W}_\alpha) + 2E(W_s^2 | \mathcal{W}_\alpha) + W_\alpha \\ &= 3W_\alpha(t - \alpha) + W_\alpha^3 + 2(s - \alpha + W_\alpha^2) + W_\alpha. \end{aligned}$$

□

6.3 Beli šum kao izvod Braunovog kretanja

Svako Braunovo kretanje ima verziju sa skoro sigurnim neprekidnim trajektorijama. Međutim, iako su skoro sve trajektorije Braunovog kretanja neprekidne, one nisu nigde diferencijabilne (odnosno, svuda su nediferencijabilne) funkcije. Tu nediferencijabilnost intuitivno možemo objasniti na sledeći način: Za fiksirano t uzmimo diferencni količnik

$$\frac{W_{t+h} - W_t}{h} : \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{|h|}\right).$$

Kada $h \rightarrow 0$ dobijamo izvod Braunovog kretanja W_t , ali bi u tom slučaju disperzija $\frac{1}{|h|}$ postala neograničeno velika. To znači da, za svaki Borelov, ograničen skup B , važi

$$P\left\{\frac{W_{t+h} - W_t}{h} \in B\right\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Dakle, izvod $\frac{dW_t}{dt} = \dot{W}_t$ Braunovog kretanja W_t ne postoji u klasičnom smislu, jer je njegova kovarijansna funkcija Dirakova delta funkcija. Međutim, on se može definisati u tzv. prostoru uopštenih stohastičkih procesa i naziva se **proces belog šuma**.

Beli šum ima veliku primenu u modeliranju realnih fizičkih procesa i grubo rečeno, koristi se da opiše zvuk (signal) koji ima jednak intenzitet na svim frekvencijama (npr. zvuk u rok muzici, huk mlaznog motora, i slično). Zanimljivo je da se beli šum, u neformalnom obliku, pojavio još pre nego što je Ito definisao Itov integral, o kojem će kasnije biti reči.

Neka K označava prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, koje su identički jednake nuli van nekog konačnog intervala. Niz takvih funkcija $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ konvergira ka $\varphi(t) \equiv 0$, ako sve te funkcije jesu identički jednake nuli van nekog ograničenog intervala i ako sve one i svi njihovi izvodi uniformno konvergiraju ka nuli. Svaka neprekidna linearna funkcionala Φ definisana na prostoru K zove se **uopštena funkcija** ili **distribucija**.

Definicija 6.4 *Uopšteni stohastički proces je jedna slučajna uopštena funkcija u sledećem smislu: svakom $\varphi \in K$ dodeljena je slučajna promenljiva $\Phi(\varphi)$ (drugim rečima, $\Phi(\varphi)$ je običan stohastički proces sa parametarskim skupom K), tako da važi:*

1. Φ je linearna na K sa verovatnoćom 1 (skoro sigurno), tj. za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i svako $\varphi, \psi \in K$ važi

$$\Phi(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha\Phi(\varphi) + \beta\Phi(\psi) \quad \text{skoro sigurno.}$$

2. $\Phi(\varphi)$ je neprekidna u sledećem smislu: iz konvergencije $\varphi_{kj} \xrightarrow{r} \varphi_k$ na K , kada $j \rightarrow \infty$, sledi konvergencija u raspodeli vektora $(\Phi(\varphi_{1j}), \dots, \Phi(\varphi_{nj}))$ ka vektoru $(\Phi(\varphi_1), \dots, \Phi(\varphi_n))$ kada $j \rightarrow \infty$.

Definicija 6.5 *Uopšten stohastički proces je **gausovski** ako je za proizvoljne linearno nezavisne funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in K$ slučajna promenljiva $(\Phi(\varphi_1), \dots, \Phi(\varphi_n))$ gausovska (ima normalnu raspodelu).*

Prednost uopštenih stohastičkih procesa u odnosu na klasične je, između ostalog, i ta što njihov izvod uvek postoji i on je, opet, uopšten stohastički proces. Naime, važi

$$\dot{\Phi}(\varphi) = -\Phi(\dot{\varphi}), \quad \varphi \in K$$

Ukoliko Braunovo kretanje W_t posmatramo kao uopšten stohastički proces, tada postoji izvod Braunovog kretanja

$$\dot{W}_t = \xi_t, \quad t \geq 0 \tag{6.2}$$

i naziva se **proces belog šuma**.

Jednačina (6.2) se može zapisati u integralnom obliku

$$W_t = \int_0^t \xi_s ds. \tag{6.3}$$

Beli šum je pogodan za opisivanje brzo fluktuirajućih slučajnih pojava. Međutim, iz integralnog oblika (6.3) vidimo da je dovoljan samo uglačavajući efekat integracije, pa da pomoću ξ_t izračunamo W_t .

Proces belog šuma je jedan gausovski uopšten proces sa očekivanjem nula i kovarijansnom funkcionalom

$$C_\xi(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(t)dt.$$

Definicija 6.6 n -dimenzionalni gausovski beli šum je n -dimenzionalni vektor čije su komponente jednodimenzionalni beli šumovi koji su međusobno nezavisni.

6.4 Zadaci

ZADATAK 6.1 Dato je standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$.

- (a) Dokazati da su slučajne promenljive $X_s := W_{2s}^2 + W_s^2 + 3W_{2s} - 3W_s - 2W_{2s}W_s$ i $Y_s := W_{\frac{1}{2}s}^3 - W_{\frac{1}{2}s}^2 + 2$ nezavisne za $s > 0$.
- (b) Naći $E(E(X_s + Y_s|W_s))$.

Rešenje:

- (a) Slučajne promenljive X_s i Y_s se mogu zapisati u sledećem obliku

$$X_s = (W_{2s} - W_s)^2 + 3(W_{2s} - W_s) = f(W_{2s} - W_s), \quad Y_s = g(W_{\frac{1}{2}s} - W_0).$$

Iz definicije Braunovog kretanja znamo da su priraštaji $W_{2s} - W_s$ i $W_{\frac{1}{2}s}$ nezavisni, pa sledi da su X_s i Y_s nezavisne kao funkcije nezavisnih priraštaja.

- (b) Važi

$$\begin{aligned} E(X_s|W_s) &= E(X_s) = s && (\text{nezavisnost } X_s \text{ od } W_s), \\ E(Y_s|W_s) &= Y_s && (Y_s \text{ je } W_s\text{-merljiva}), \end{aligned}$$

pa dobijamo

$$E(E(X_s + Y_s|W_s)) = s + E(W_{\frac{1}{2}s}^3) - E(W_{\frac{1}{2}s}^2) + 2 = s + 0 - \frac{1}{2}s + 2 = \frac{1}{2}s + 2.$$

□

ZADATAK 6.2 Dokazati da važi

$$E(W_{t/2}(W_{2t} - W_t)^2 + W_{t/2}^2 | \mathcal{W}_{t/2}) = E(W_t(W_{2t} - W_t)^2 + W_{t/2}^2 | \mathcal{W}_{t/2})$$

ako je $\mathcal{W}_t = \mathcal{F}(W_s, 0 \leq s \leq t)$ istorija Braunovog kretanja $\{W_t, t \geq 0\}$ do trenutka t .

ZADATAK 6.3 Odrediti

$$E(aW_t^2 + W_s W_{2t} + bW_{t+s} W_s^2 | \mathcal{W}_s), \quad 0 < s \leq t, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

ako je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje, a $\mathcal{W}_t = \mathcal{F}(W_s, 0 \leq s \leq t)$ je istorija Braunovog kretanja do trenutka t .

ZADATAK 6.4 (a) Dokazati da je $W_t - \frac{t}{s}W_s$, $t < s$ nezavisno od W_s ako je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje.

- (b) Izračunati $E(W_t - \frac{t}{s}W_s | W_s)$, $t < s$.

- (c) Odrediti $E(W_t^2 - \frac{2t}{s}W_t W_s + \frac{t^2}{s^2}W_s^2 + sW_t - tW_s | W_s)$, $t < s$.

7. STOHAŠTIČKA INTEGRACIJA

- MOTIVACIJA I PROBLEMI

Posmatramo diferencijalnu jednačinu koja opisuje promenu veličine populacije

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(t)y(t), \quad y(0) = y_0 = \text{const}, \quad (7.1)$$

gde $y(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t , a $\alpha(t)$ je relativna stopa rasta u trenutku t koja je u potpunosti poznata. Međutim, opšte je poznato da na tu stopu rasta utiču razni faktori iz okoline koji se najčešće ne mogu precizno odrediti, a ni meriti. Zbog toga bismo realniji model dobili definisanjem stope rasta α kao slučajne veličine. Na primer, ukoliko pretpostavimo da “u proseku” ti slučajni faktori vrlo malo utiču na stopu rasta, mogli bismo da je definišemo kao

$$\alpha(t) = a(t) + \varepsilon,$$

gde je $a(t)$ deterministička funkcija, a ε slučajna veličina takva da $E(\varepsilon) = 0$. Postavlja se pitanje kako sada rešiti jednačinu (7.1), koja ubacivanjem slučajne veličine postaje **stohastička diferencijalna jednačina** (ili kratko SDJ). Braunovo kretanje i beli šum se nameću kao osnovno sredstvo kojim se opisuje ponašanje neke slučajne veličine.

Dakle, analiza stohastičkih dinamičkih sistema često nas dovodi do diferencijalnih jednačina oblika

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(X(t), t) + B(X(t), t)dW_t, \quad t \geq 0 \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

gde je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje, X_0 je neka slučajna promenljiva, a b i B su Borelove funkcije. Ekvivalentno, (7.2) možemo zapisati u integralnom obliku,

$$X(t) = X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t B(X_s, s)dW_s, \quad t \geq 0. \quad (7.3)$$

Rešavanje stohastičke diferencijalne jednačine, čak iako je ona dobijena trivijalnim uopštenjem jednostavne diferencijalne jednačine, nije lak zadatak i alati koji se koriste u rešavanju diferencijalnih jednačina se uglavnom ne mogu primeniti u slučaju stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Naš cilj je da definišemo integral $\int_0^T G(t)dW_t$ za što širu klasu stohastičkih procesa $\{G(t), t \geq 0\}$ tako da desna strana jednakosti (7.3) ima smisla.

Prvi logičan korak bio je pokušaj da se Itov integral definiše na sličan način kao što je to urađeno sa integralom u klasičnoj teoriji. Međutim, ti pokušaji su uglavnom bili samo delimično uspešni, jer se ispostavilo da je tako nešto moguće samo u specijalnim slučajevima.

7.1 Pejli-Viner-Zigmundova definicija stohastičkog integrala

Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje. Jedna od mogućih definicija je ona koju su dali Pejli, Viner i Zigmund koji su imali ideju da imitiraju parcijalnu integraciju.

Definicija 7.1 *Pretpostavimo da je $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidno-diferencijabilna funkcija takva da je $g(0) = g(1) = 0$. Definišimo integral*

$$\int_0^1 g(t) dW_t := - \int_0^1 g'(t) W_t dt. \quad (7.4)$$

Integral u (7.4) nazivamo Pejli-Viner-Zigmund integral ili kraće P-V-Z integral.

Napomena 7.1 *Pejli-Viner-Zigmund integral se može definisati na bilo kom intervalu $[a, b]$, $a < b$ dok god je funkcija g takva da je $g(a) = g(b) = 0$.*

Navedimo neke od osobina koje slede iz Definicije 7.1.

Lema 7.1 (Osobine P-V-Z integrala) *Važi*

- 1) $E \left(\int_0^1 g(t) dW_t \right) = 0.$
- 2) $E \left[\left(\int_0^1 g(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_0^1 g^2(t) dt.$

Dokaz.

- 1) Koristeći da je W_t stohastička veličina, dobijamo

$$E \left(\int_0^1 g(t) dW_t \right) = E \left(- \int_0^1 g'(t) W_t dt \right) = \int_0^1 -g'(t) E(W_t) dt = 0.$$

2) Koristeći alat iz elementarne analize i osobine Braunovog kretanja dobijamo

$$\begin{aligned}
E\left(\left(\int_0^1 g(t)dW_t\right)^2\right) &= E\left(\int_0^1 g(t)dW_t \int_0^1 g(s)dW_s\right) = E\left(\int_0^1 g'(t)W_t dt \int_0^1 g'(s)W_s ds\right) \\
&= E\left(\int_0^1 \int_0^1 g'(t)g'(s)W_t W_s dt ds\right) = \int_0^1 \int_0^1 g'(t)g'(s)E(W_t W_s) dt ds \\
&= \int_0^1 g'(t) \left(\int_0^1 g'(s) \min\{t, s\} ds\right) dt \\
&= \int_0^1 g'(t) \left(\int_0^t s g'(s) ds + \int_t^1 t g'(s) ds\right) dt \\
&= \int_0^1 g'(t) \left(tg(t) - \int_0^t g(s) ds + t(g(1) - g(t))\right) dt \\
&= \int_0^1 g'(t) \left(-\int_0^t g(s) ds\right) dt = \int_0^1 g^2(t) dt.
\end{aligned}$$

Poslednja jednakost je dobijena primenom parcijalne integracije.

P-V-Z definicija se može proširiti na prostor $L^2(0, 1)$ kvadratnih integrabilnih funkcija na $(0, 1)$ na sledeći način.

Pretpostavimo da je $g \in L^2(0, 1)$. Može se pokazati da postoji niz $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ C^1 funkcija iz P-V-Z definicije koji srednje kvadratno konvergira ka g , tj. da važi

$$\int_0^1 (g_n - g)^2(t) dt \rightarrow 0, \quad \text{kada } n \rightarrow \infty.$$

Dalje se pokazuje da ako su $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ i $\{g_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ nizovi funkcija iz P-V-Z integrala koji srednje kvadratno konvergiraju ka g kada $n \rightarrow \infty$, onda

$$\int_0^1 (g_n - g_m)^2(t) dt \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Naime, koristeći osobine 1) i 2) iz Leme 7.1 dobijamo

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\int_0^1 (g_n - g)(t)dW_t\right)^2\right] &= E\left[\left(\int_0^1 g_n(t)dW_t - \int_0^1 g(t)dW_t\right)^2\right] \\
&= E\left[\left(\int_0^1 g_n(t)dW_t - \int_0^1 g_m(t)dW_t\right)^2\right] + E\left[\left(\int_0^1 g_m(t)dW_t - \int_0^1 g(t)dW_t\right)^2\right] \\
&= \int_0^1 (g_n - g_m)^2(t) dt,
\end{aligned}$$

što znači da je niz $\left\{ \int_0^1 g_n(t) dW_t \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev u $L^2(0, 1)$, pa i konvergira u $L^2(0, 1)$. Zato za $g \in L^2(0, 1)$ definišemo

$$\int_0^1 g(t) dW_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(t) dW_t.$$

Svi pokušaji da se ova definicija proširi na širu klasu prostora od L^2 prostora, nisu bili uspešni. Osim toga, postojala je potreba za proširenjem definicije, jer je P-V-Z definicija ograničena na stohastičke integrale sa determinističkom podintegralnom funkcijom. To znači da njihovom primenom ne bismo mogli da izračunamo integrale oblika

$$\int_0^T B(X_s, s) dW_s,$$

pri čemu je $\{X_t, t \in I\}$ proizvoljan stohastički proces, a B integrabilna funkcija.

7.2 Metod Rimanovih suma

Pošto je P-V-Z definicija ograničena na prostor L^2 , sledeći pokušaj rešavanja integrala

$$\int_0^T G(t) dW_t \tag{7.5}$$

se zasniva na imitaciji klasičnog pristupa integraciji preko Rimanovih suma. Znači, ideja je da se dati integral aproksimira pomoću Rimanovih suma, nakon čega bi se posmatrala granična vrednost tih Rimanovih suma.

Za početak, zanima nas čemu je jednak integral (7.5) ako je $G(t) = W_t$. Dakle, želimo da dođemo do razumne definicije za

$$\int_0^T W_t dW_t.$$

Definicija 7.2 1) Ako je $[0, T]$ interval, particija P intervala $[0, T]$ je konačan skup tačaka u $[0, T]$ takav da važi

$$P := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}.$$

$$2) |P| := \max_{0 \leq k \leq m-1} |t_{k+1} - t_k|.$$

3) Za fiksirano $\lambda \in (0, 1]$ i particiju P od $[0, T]$ definišemo

$$\tau_k := (1 - \lambda)t_k + \lambda t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1.$$

Tačke τ_k se zovu tačke deobe podintervala $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

4) Za particiju P i za $\lambda \in (0, 1]$, odnosno deobne tačke τ_k , $k = 0, 1, \dots, m-1$, definišemo

$$R = R(P, \lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} W(\tau_k) (W(t_{k+1}) - W(t_k)). \tag{7.6}$$

Tada (7.6) predstavlja aproksimaciju integrala $\int_0^T W_t dW_t$ pomoću Rimanovih suma.

Ideja je da se integral (7.5) definiše kao $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ pri čemu je R_n Rimanova suma iz gornje definicije koja odgovara particiji P^n intervala $[0, T]$ definisanoj u Lemi 7.2. O tome govore sledeće dve leme.

Lema 7.2 Neka je $[a, b]$ interval u $[0, \infty)$ i neka su

$$P^n := \{a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{m_n}^n = b\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

particije intervala $[a, b]$ takve da $|P^n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Tada

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2) \xrightarrow{s.k.} b - a, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Neka je

$$Q_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} ((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2).$$

Treba pokazati da $E((Q_n - (b - a))^2) \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$. Jasno,

$$Q_n - (b - a) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right),$$

pa koristeći osobine očekivanja dobijamo

$$\begin{aligned} E((Q_n - (b - a))^2) &= \sum_{k=0}^{m_n-1} \sum_{j=0}^{m_n-1} E \left[\left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) \right]. \end{aligned}$$

Dalje, ako je $k \neq j$, onda su $(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)$ i $(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n)$ nezavisne slučajne promenljive, jer Braunovo kretanje ima nezavisne priraštaje, pa imamo

$$\begin{aligned} &E \left[\left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right) \left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) \right] \\ &= E \left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right) E \left((W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n))^2 - (t_{j+1}^n - t_j^n) \right) = 0, \end{aligned}$$

što sledi iz

$$E \left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 \right) = t_{k+1}^n - t_k^n.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} E((Q_n - (b - a))^2) &= \sum_{k=0}^{m_n-1} E \left[\left((W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k=0}^{m_n-1} E \left[\left(\left(\frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} \right)^2 (t_{k+1}^n - t_k^n) - (t_{k+1}^n - t_k^n) \right)^2 \right] \\ &= E((Y^2 - 1)^2) \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \leq E((Y^2 - 1)^2) |P^n| \underbrace{\sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n)}_{=b-a}, \end{aligned}$$

gde je

$$Y = Y_k^n := \frac{W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)}{\sqrt{t_{k+1}^n - t_k^n}} : \mathcal{N}(0, 1)$$

za svako n i k . Kako $|P^n| \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, a očekivanje $E((Y^2 - 1)^2)$ postoji, tvrđenje je pokazano. $\square$

Lema 7.3 Neka P^n , $n \in \mathbb{N}$, označava particiju intervala $[0, T]$, i neka je $\lambda \in [0, 1]$ fiksiran broj. Ako definišimo

$$R_n := \sum_{k=0}^{m_n-1} W(\tau_k^n)(W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n)),$$

tada važi

$$R_n \xrightarrow{s.k.} \frac{W(T)^2}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T, \quad n \rightarrow \infty,$$

što znači da

$$E \left[\left(R_n - \frac{W(T)^2}{2} - \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) T \right)^2 \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dokaz. Primetimo da R_n možemo zapisati na sledeći način

$$R_n = \frac{W(t_{m_n}^n)}{2} - \frac{W(t_0^n)}{2} - \frac{1}{2}A_n + B_n + C_n,$$

gde $t_{m_n} = T$, $t_0 = 0$ za svako n i

$$\begin{aligned} A_n &:= \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(t_k^n))^2, \\ B_n &:= \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2, \\ C_n &:= \sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n)). \end{aligned}$$

Koristeći Lemu 7.2 za $a = 0$ i $b = T$, direktno dobijamo da $A_n \xrightarrow{s.k.} T$, $n \rightarrow \infty$. Da $B_n \xrightarrow{s.k.} \lambda T$, $n \rightarrow \infty$, važi pokazujemo koristeći Lemu 7.2 i činjenicu da

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} (\tau_k^n - t_k^n) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \lambda(t_{k+1}^n - t_k^n) = \lambda(T - 0).$$

Kako je $\frac{W(t_{m_n}^n)}{2} = \frac{W(T)}{2}$ i $\frac{W(t_0^n)}{2} = \frac{W(0)}{2} = 0$, preostalo je da pokažemo da $C_n \xrightarrow{s.k.} 0$, tj. $E(C_n^2) \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$. Važi

$$\begin{aligned} E(C_n^2) &= E \left[\sum_{k=0}^{m_n-1} (W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))(W(\tau_k^n) - W(t_k^n)) \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{j=0}^{m_n-1} (W(t_{j+1}^n) - W(\tau_j^n))(W(\tau_j^n) - W(t_j^n)) \right]. \end{aligned}$$

Slično kao u dokazu Leme 7.2, sabirci za koje je $j \neq k$ će biti jednaki nuli, jer Braunovo kretanje ima nezavisne priraštaje čije je očekivanje jednako nuli. Dakle,

$$E(C_n^2) = \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))^2 (W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2\right].$$

Dalje, intervali (t_k^n, τ_k^n) i (τ_k^n, t_{k+1}^n) su disjunktni, pa su odgovarajući priraštaji, $W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n)$ i $W(\tau_k^n) - W(t_k^n)$ nezavisni, i važi

$$\begin{aligned} E(C_n^2) &= \sum_{k=0}^{m_n-1} E\left[(W(t_{k+1}^n) - W(\tau_k^n))^2\right] E\left[(W(\tau_k^n) - W(t_k^n))^2\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - \tau_k^n)(\tau_k^n - t_k^n) \\ &= \sum_{k=0}^{m_n-1} \lambda(1 - \lambda)(t_{k+1}^n - t_k^n)^2 \\ &\leq \lambda(1 - \lambda)|P^n| \sum_{k=0}^{m_n-1} (t_{k+1}^n - t_k^n) = \lambda(1 - \lambda)|P^n|T. \end{aligned}$$

$E(C_n^2) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ sledi iz $|P^n| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. □

Podsetimo se da Rimanov integral

$$\bar{R} = \int_0^T f(t)dt$$

poseduje dve veoma bitne osobine. Naime, dobijena granična vrednost zbira površina pravougaonika koji aproksimira površinu ispod grafika funkcije f na intervalu $[0, T]$ ne zavisi od particije i tačaka podele. Primetimo da u slučaju integrala (7.5) to više nije slučaj, jer granična vrednost Rimanove sume zavisi od izbora tačaka podele $t_k^n \leq \tau_k^n \leq t_{k+1}^n$, gde $\tau_k^n = (1 - \lambda)t_k^n + \lambda t_{k+1}^n$, tj. vrednost integrala

$$\int_0^T W_t dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{W^2(T)}{2} + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)T$$

zavisi od λ . Ako izaberemo da je $\lambda = 0$, dobijamo takozvani **Itov (stohastički) integral**,

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W^2(T)}{2} - \frac{T}{2},$$

ili opštije

$$\int_r^s W_t dW_t = \frac{W^2(s) - W^2(r)}{2} - \frac{s - r}{2}.$$

Za izbor $\lambda = \frac{1}{2}$, dobijamo **Stratonovičev integral**

$$\int_0^T W_t dW_t = \frac{W^2(T)}{2}.$$

Primećujemo da izbor $\lambda = \frac{1}{2}$ deluje daleko prirodnije, jer u tom slučaju rešenje integrala odgovara rešenju koje bismo dobili u realnoj analizi. Međutim, u praksi je daleko prisutniji Itov stohastički integral (izbor $\lambda = 0$), jer nam formiranje Rimanovih suma u krajnjim levim tačkama na svakom od podintervala $[t_k^n, t_{k+1}^n]$, $k = 0, 1, \dots, m - 1$, omogućava definisanje integrala $\int_0^T G(t) dW_t$ za široku klasu stohastičkih procesa G . Pored toga, može se pokazati da je Itov stohastički integral martingal. Martingale ćemo definisati u Glavi [11](#).

8. DEFINICIJA I OSOBINE ITOVOG INTEGRALA

U ovom delu ćemo definisati i dati osobine Itovog stohastičkog integrala koji je osnovni alat u stohastičkoj analizi i ima veoma veliku ulogu u modeliranju slučajnosti u finansijama, fizici i mnogim drugim oblastima.

8.1 Progresivno merljivi stohastički procesi

Dat je prostor verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$.

Definicija 8.1 (*Istorija i budućnost Braunovog kretanja*)

- 1) σ -algebra $\mathcal{W}_t = \mathcal{W}(t) := \mathcal{F}(W(s), 0 \leq s \leq t)$ zove se istorija Braunovog kretanja do trenutka t (uključujući i t).
- 2) σ -algebra $\mathcal{W}_t^+ = \mathcal{W}^+(t) := \mathcal{F}(W(s) - W(t), s > t)$ zove se budućnost Braunovog kretanja nakon trenutka t .

Definicija 8.2 *Familija $\{\mathcal{U}(t), t \geq 0\}$ σ -algebri koje su podskupovi od $\mathcal{F}$ je neanticipirajuća ako važe uslovi:*

- 1) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{U}(s)$ za svako $t \geq s \geq 0$ (kako vreme prolazi naše znanje se povećava).
- 2) $\mathcal{U}(t) \supseteq \mathcal{W}(t)$ za svako $t \geq 0$ (u bilo kom trenutku t je poznato šta se dešavalo do t).
- 3) $\mathcal{U}(t)$ je nezavisna od budućnosti Braunovog kretanja $\mathcal{W}^+(t)$ za svako $t \geq 0$ (nije poznato šta će se dešavati u budućnosti, posle trenutka t).

Definicija 8.3 *Stohastički proces $\{G(t), t \geq 0\}$ je neanticipirajući ako za svako $t \geq 0$ važi da je $G(t)$ $\mathcal{U}(t)$ -merljivo, pri čemu je $\{\mathcal{U}(t), t \geq 0\}$ neanticipirajuća familija σ -algebri.*

Intuitivno, neanticipirajuća familija σ -algebri treba da sadrži sve informacije koje su nam dostupne do trenutka t . Kao prirodan izbor za takvu familiju σ -algebri se nameće familija $\{\mathcal{G}(t), t \geq 0\}$ σ -algebri

$$\mathcal{G}(t) := \mathcal{F}(\{W_s, 0 \leq s \leq t\}, X_0),$$

generisana istorijom Braunovog kretanja do trenutka t i slučajnom promenljivom X_0 koja je nezavisna od budućnosti Braunovog kretanja $\mathcal{W}_0^+$.

Ideja je da za svako $t \geq 0$ slučajna promenljiva $G(t)$ zavisi samo od informacija dostupnih iz σ -algebre $\mathcal{U}(t)$. U praksi će nam trebati jača osobina, tj. trebaće nam da $G(t) = G(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$ bude tzv. progresivno merljivo, što znači neanticipirajuće i zajednički merljivo i po t i po ω . Kako je teorija mere koja je potrebna za ispravno definisanje pojma zajedničke merljivosti složena i nije predmet ovog kursa, nećemo je navoditi. Navedimo samo definiciju progresivno merljivog stohastičkog procesa.

Definicija 8.4 *Stohastički proces $\{G(t), t \geq 0\}$ je progresivno merljiv ako je neanticipirajući i zajednički merljiv i po t i po ω .*

Definicija 8.5 1) Sa $\mathbb{L}^2(0, T)$ označavamo prostor svih realnih progresivno merljivih stohastičkih procesa $\{G(t), t \geq 0\}$ na intervalu $[0, T]$, takvih da

$$E\left(\int_0^T G^2(t)dt\right) < \infty.$$

2) Sa $\mathbb{L}^1(0, T)$ označavamo prostor svih realnih progresivno merljivih stohastičkih procesa $\{F(t), t \geq 0\}$ na intervalu $[0, T]$, takvih da je

$$E\left(\int_0^T |F|(t)dt\right) < \infty.$$

8.2 Itov integral step procesa

Definicija 8.6 *Stohastički proces $\{G(t), t \geq 0\} \in \mathbb{L}^2(0, T)$ zove se step proces (proces koraka) ako postoji particija intervala $[0, T]$, $P := \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T\}$ i slučajne promenljive $G_0, \dots, G_{m-1}$ takve da je*

$$G(t) = G_k, \quad \text{za } t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{skoro sigurno.}$$

Primetimo da je G_k je $\mathcal{U}(t_k)$ -merljiva slučajna promenljiva za svako $k = 0, 1, \dots, m-1$. To sledi iz činjenice da je $G(t)$ neanticipirajući stohastički proces.

Definicija 8.7 (Itov integral step procesa) *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ step proces. Tada je*

$$\int_0^T G(t)dW_t := \sum_{k=0}^{m-1} G_k(W(t_{k+1}) - W(t_k))$$

Itov (stohastički) integral step procesa G na intervalu $[0, T]$.

Napomena 8.1 *Primetimo da su u slučaju step procesa Rimanove sume dobro definisane i da Itov integral step procesa ne zavisi od deobnih tačaka.*

Pošto je za svako fiksirano t , W_t jedna slučajna promenljiva, sledi da je Itov integral step procesa takođe slučajna promenljiva.

Teorema 8.1 (Osobine Itovog integrala step procesa) *Za sve konstante $a, b \in \mathbb{R}$ i proizvoljne step procese $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ važi:*

$$(i) \int_0^T (aG(t) + bH(t))dW_t = a \int_0^T G(t)dW_t + b \int_0^T H(t)dW_t \text{ (linearnost)}$$

$$(ii) E\left(\int_0^T G(t)dW_t\right) = 0.$$

$$(iii) E\left[\left(\int_0^T G(t)dW_t\right)^2\right] = E\left(\int_0^T G^2(t)dt\right) \text{ (Itova izometrija)}$$

Dokaz.

(i) Sledi direktno iz definicije.

(ii) Kako je $\{G(t), t \geq 0\}$ step proces, važi

$$G(t) \equiv G_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

pa iz činjenice da je G_k nezavisno od $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ (G_k je $\mathcal{U}(t_k)$ -merljivo, a $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ predstavlja “deo” budućnosti nakon t_k) sledi

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^T G(t)dW_t\right) &= E\left(\sum_{k=0}^{m-1} G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})\right) = \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k) \underbrace{E(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

(iii) Ponovo koristeći da je $\{G(t), t \geq 0\}$ step proces, dobijamo

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_0^T G(t)dW_t\right)^2\right] &= E\left[\sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} G_j G_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} E\left[G_j G_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right]. \end{aligned}$$

Posmatramo prvo slučaj $j < k$. Tada je $W_{t_{k+1}} - W_{t_k}$ nezavisno od $G_j G_k (W_{t_{j+1}} - W_{t_j})$, pa dobijamo

$$E\left[G_j G_k (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})\right] = 0.$$

Analogno se pokazuje da isto važi za $j > k$. Ako je $j = k$, onda imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2 (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2) &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2) E((W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} E(G_k^2) (t_{k+1} - t_k) = E\left(\sum_{k=0}^{m-1} G_k^2 (t_{k+1} - t_k)\right) \\ &= E\left(\int_0^T G^2(t)dt\right). \end{aligned}$$

8.3 Itov integral proizvoljnog progresivno merljivog stohastičkog procesa

Sada želimo da definišemo stohastički integral

$$\int_0^T G(t) dW_t$$

za proizvoljan proces G iz $\mathbb{L}^2(0, T)$. Ideja je da proces G aproksimiramo pomoću step procesa iz $\mathbb{L}^2(0, T)$, a zatim željeni stohastički integral dobijemo kao graničnu vrednost Itovog integrala step procesa.

Može se pokazati da za svaki proces $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ postoji niz step procesa koji srednje kvadratno konvergira ka G (ideja za dokaz se može pronaći u [6]).

Lema 8.1 (Aproksimacija step procesima) *Ako je $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$, onda postoji niz ograničenih step procesa $G^n \in \mathbb{L}^2(0, T)$ takvih da*

$$E\left(\int_0^T |G - G^n|^2(t) dt\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dalje, sledi da je za proizvoljno $t \in [0, T]$ niz integrala step procesa $\left\{ \int_0^t G_n dW_t \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ Košijev u $\mathbb{L}^2(0, T)$, što znači da konvergira u $\mathbb{L}^2(0, T)$, pa se Itov integral procesa G može definisati kao granična vrednost niza integrala step procesa.

Definicija 8.8 (Itov stohastički integral) *Neka je $G \in \mathbb{L}^2(0, T)$ i neka su step procesi*

$$\{G^n(t), t \in [0, T]\}_{n \in \mathbb{N}}$$

iz $\mathbb{L}^2[0, T]$ dati sa

$$G^n(t) := G\left(\frac{k}{n}\right), \quad \frac{k}{n} \leq t < \frac{k+1}{n}.$$

Tada važi

$$E\left[\left(\int_0^T (G^n - G^m)(t) dW_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T (G^n - G^m)^2(t) dt\right] \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty,$$

a granična vrednost

$$\int_0^T G(t) dW_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T G^n(t) dW_t$$

postoji u $\mathbb{L}^2(0, T)$ i predstavlja Itov stohastički integral procesa $\{G(t), t \in [0, T]\}$.

Osobine Itovog integrala koje su važile za step procese, važe i u opštem slučaju, što se pokazuje prelaskom na granične vrednosti.

Teorema 8.2 (Osobine Itovog integrala) *Za svako $a, b \in \mathbb{R}$ i za svako $G, H \in \mathbb{L}^2(0, T)$ važi:*

$$1) \int_0^T (aG + bH)(t) dW_t = a \int_0^T G(t) dW_t + b \int_0^T H(t) dW_t.$$

$$2) E \left(\int_0^T G(t) dW_t \right) = 0.$$

$$3) E \left[\left(\int_0^T G(t) dW_t \right)^2 \right] = E \left(\int_0^T G^2(t) dt \right),$$

$$4) E \left[\left(\int_0^T G(t) dW_t \right) \left(\int_0^T H(t) dW_t \right) \right] = E \left(\int_0^T G(t) H(t) dt \right).$$

Primetimo da je osobina 3) iz Teoreme 8.2 specijalan slučaj osobine 4), kada je $G = H$ skoro sigurno.

9. STOHAŠTIČKI DIFERENCIJALI

I ITOVA FORMULA

U prethodnoj glavi upoznali smo se sa stohastičkim integralom, a sada ćemo se pozabaviti stohastičkim diferencijalom i dati Itovu formulu koja je izuzetno važna, jer između ostalog, omogućava da se reše neki tipovi stohastičkih diferencijalnih jednačina.

9.1 Itova formula

Neka je dato Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$. Izraz

$$X_t(\omega) = \int_0^t G(s, \omega) dW_s(\omega)$$

možemo formalno zapisati i na sledeći način

$$dX_t(\omega) = G(t, \omega) dW_t(\omega) \quad \text{ili} \quad dX_t = G(t) dW_t.$$

To je takozvani stohastički diferencijal. Slično, stohastički proces dat sa

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s) ds + \int_0^t G(s) dW_s, \quad (9.1)$$

može se zapisati kao

$$dX_t = f(t) dt + G(t) dW_t, \quad (9.2)$$

što predstavlja stohastički diferencijal stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ datog sa (9.1).

Od ranije znamo da važi

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{W_t^2}{2} - \frac{t}{2}.$$

Diferenciranjem izraza

$$2 \int_0^t W_s dW_s = W_t^2 - t$$

dobijamo

$$2W_t dW_t = d(W_t^2 - t) = d(W_t^2) - dt$$

ili

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t. \quad (9.3)$$

Sa druge strane, ako bismo diferencijal $d(W_t^2)$ konstruisali formalnom primenom Tejlorovog razvoja, dobili bismo

$$d(W_t^2) = (dW_t)^2 + 2W_t dW_t. \quad (9.4)$$

Poređenjem (9.3) i (9.4) dobijamo da bi “trebalo” da važi

$$dt = (dW_t)^2 = dW_t \cdot dW_t.$$

Slično se može pokazati da bi “trebalo” da važi

$$dt \cdot dt = 0, \quad dt \cdot dW_t = 0, \quad dW_t \cdot dt = 0.$$

Zato uvodimo tablicu simboličkog množenja

$\cdot$	dt	dW_t
dt	0	0
dW_t	0	dt

Teorema 9.1 (Itova teorema) Neka je $u = u(t, x_1, \dots, x_d)$ neprekidna funkcija definisana na intervalu $[t_0, T] \times \mathbb{R}^d$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima $u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$ za $i, j = 1, 2, \dots, d$. Neka je d jednodimenzionalnih stohastičkih procesa $X_i(t)$, $i = 1, \dots, d$, definisano na intervalu $[t_0, T]$ stohastičkim diferencijalima

$$dX_i(t) = f_i(t)dt + G_i(t)dW_t, \quad i = 1, 2, \dots, d$$

u odnosu na isto Braunovo kretanje W_t .

Tada stohastički proces

$$Y_t = u(t, X_1, \dots, X_d)$$

ima stohastički diferencijal na intervalu $[t_0, T]$ koji je dat sa

$$dY_t = u_t dt + \sum_{i=1}^d u_{x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_{x_i x_j} dX_i dX_j.$$

Napomena 9.1 U Teoremi 9.1 i u nastavku ćemo, radi jednostavnijeg zapisa, izostavljati argument

$$(t, X_1, \dots, X_d)$$

uz sve parcijalne izvode funkcije u .

Koristeći tablicu simboličkog množenja, izraz $dX_i dX_j$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} dX_i dX_j &= (f_i(t)dt + G_i(t)dW_t)(f_j(t)dt + G_j(t)dW_t) \\ &= G_i(t)G_j(t)dW_t dW_t \\ &= G_i(t)G_j(t)dt. \end{aligned}$$

Tada dobijamo da se diferencijal dY_t može zapisati i na drugačiji način

$$dY_t = \left(u_t + \sum_{i=1}^d u_{x_i} f_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d u_{x_i x_j} G_i(t) G_j(t) \right) dt + \sum_{i=1}^d u_{x_i} G_i(t) dW_t.$$

Specijalno, za $d = 1$, važi sledeća teorema.

Teorema 9.2 (Itova teorema za $d = 1$) Neka je $u = u(t, x)$ neprekidna funkcija definisana na $[t_0, T] \times \mathbb{R}$ sa neprekidnim parcijalnim izvodima u_t, u_x, u_{xx} . Dalje, neka je stohastički proces X_t definisan svojim diferencijalom

$$dX_t = f(t)dt + G(t)dW_t.$$

Tada stohastički proces

$$Y_t = u(t, X_t)$$

ima stohastički diferencijal dat sa

$$dY_t = \left(u_t + f(t)u_x + \frac{1}{2}G^2(t)u_{xx} \right) dt + u_x G(t) dW_t.$$

9.1.1 Neki primeri vezani za Itovu teoremu

Primer 9.1 Neka su dati procesi $\{X_1(t), t \in I\}$ i $\{X_2(t), t \in I\}$ sa stohastičkim diferencijalima

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= f_1(t)dt + G_1(t)dW_t, \\ dX_2(t) &= f_2(t)dt + G_2(t)dW_t. \end{aligned}$$

Želimo da odredimo $d(X_1(t)X_2(t))$ koristeći Teoremu 9.1 za $d = 2$ ($u(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$). Važi

$$\begin{aligned} d(X_1(t)X_2(t)) &= X_1(t)d(X_2(t)) + d(X_1(t))X_2(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}(0 + d(X_1(t))d(X_2(t)) + d(X_1(t))d(X_2(t)) + 0) \\ &= X_1(t)d(X_2(t)) + d(X_1(t))X_2(t) + \underbrace{d(X_1(t))d(X_2(t))}_{=G_1(t)G_2(t)dt}, \end{aligned}$$

što možemo zapisati i na sledeći način

$$\begin{aligned} d(X_1(t)X_2(t)) &= (X_1(t)f_2(t) + X_2(t)f_1(t) + G_1(t)G_2(t))dt \\ &\quad + (X_1(t)G_2(t) + X_2(t)G_1(t))dW_t. \end{aligned}$$

Gore data formula za $d(X_1(t)X_2(t))$ se u literaturi često naziva Itovo pravilo množenja. Njenim integraljenjem u intervalu $[s, r] \subseteq I$ dobijamo formulu

$$\int_s^r X_2(t)dX_1(t) = X_1(r)X_2(r) - X_1(s)X_2(s) - \int_s^r X_1(t)dX_2(t) - \int_s^r G_1(t)G_2(t)dt,$$

koja se može smatrati formulom za parcijalnu integraciju u Itovom kalkulusu.

Ako specijalno uzmemo da je

$$X_1(t) = t \quad \text{i} \quad X_2(t) = W_t,$$

za koje važi

$$dX_1(t) = 1 \cdot dt + 0 \cdot dW_t, \quad dX_2(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW_t,$$

dobijamo

$$d(tW_t) = W_t dt + t dW_t.$$

Sa druge strane, ako izaberemo

$$X_1(t) = X_2(t) = W_t,$$

dobijamo

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t. \quad \square$$

Primer 9.2 Za proizvoljnu skalarnu funkciju $u = u(t, x)$ koja zadovoljava uslove Itove teoreme i za $X_t = W_t$ i $Y_t = u(t, X_t) = u(t, W_t)$, imamo

$$d(u(t, W_t)) = (u_t(t, W_t) + \frac{1}{2}u_{xx}(t, W_t))dt + u_x(t, W_t)dW_t.$$

U specijalnom slučaju kada funkcija u ne zavisi od t , i imamo $u = u(x)$, važi

$$d(u(W_t)) = \frac{1}{2}u''(W_t)dt + u'(W_t)dW_t,$$

što u integralnom obliku zapisujemo kao

$$u(W_t) = u(0) + \frac{1}{2} \int_0^t u''(W_s)ds + \int_0^t u'(W_s)dW_s.$$

Ako je, na primer, $u = u(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, i $X_t = W_t$ i $Y_t = u(X_t) = u(W_t)$, onda važi

$$d(W_t^n) = \frac{1}{2}n(n-1)W_t^{n-2}dt + nW_t^{n-1}dW_t,$$

dok specijalno za $n = 2$ ponovo dobijamo

$$d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t. \quad \square$$

Primer 9.3 Neka je dat stohastički proces

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t G^2(s)ds + \int_0^t G(s)dW_s.$$

Izračunajmo stohastički diferencijal procesa $Y_t = e^{X_t}$. Primetimo da

$$dX_t = -\frac{1}{2}G^2(t)dt + G(t)dW_t.$$

Koristeći Teorem 9.2 za $u = u(x) = e^x$ dobijamo da je stohastički diferencijal procesa Y_t dat sa

$$dY_t = \left(-\frac{1}{2}G^2(t)e^{X_t} + \frac{1}{2}G^2(t)e^{X_t} \right)dt + e^{X_t}G(t)dW_t = Y_t G(t)dW_t,$$

pri čemu $Y_0 = e^{X_0} > 0$. □

Lema 9.1 Neka su $\{W_t, t \geq 0\}$ i $\{\bar{W}_t, t \geq 0\}$ dva nezavisna jednodimenzionalna Braunova kretanja. Tada važi

$$d(W_t \bar{W}_t) = W_t d\bar{W}_t + \bar{W}_t dW_t. \quad (9.5)$$

Dokaz. Neka je X_t stohastički proces dat sa

$$X_t := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_t + \bar{W}_t).$$

Primetimo prvo da je X_t Braunovo kretanje jer važi:

- (1) $X_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_0 + \bar{W}_0) = 0$ skoro sigurno.
- (2) X_t ima nezavisne priraštaje, jer W_t i $\bar{W}_t$ imaju nezavisne priraštaje. Naime, posmatramo priraštaje X_s i $X_t - X_s$ za $s < t$,

$$X_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_s + \bar{W}_s), \quad X_t - X_s = \frac{1}{\sqrt{2}}((W_t - W_s) + (\bar{W}_t - \bar{W}_s))$$

koji su nezavisni, jer su slučajne promenljive dobijene kao Borelove funkcije nezavisnih slučajnih promenljivih takođe nezavisne.

- (3) X_t je zbir dve nezavisne slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0, \frac{t}{2})$ raspodelom, pa važi

$$X_t : \mathcal{N}(0, t).$$

Slično, $X_t - X_s : \mathcal{N}(0, t - s)$, iz čega sledi da proces X_t ima stacionarne priraštaje.

To znači da X_t (kao i W_t i $\bar{W}_t$) zadovoljava formulu iz Primera 9.1,

$$d(X_t^2) = 2X_t dX_t + dt.$$

Dalje je

$$X_t^2 - \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\bar{W}_t^2 = \left(\frac{W_t + \bar{W}_t}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}W_t^2 - \frac{1}{2}\bar{W}_t^2 = W_t \bar{W}_t,$$

pa važi

$$\begin{aligned} d(W_t \bar{W}_t) &= d(X_t^2) - \frac{1}{2}d(W_t^2) - \frac{1}{2}d(\bar{W}_t^2) \\ &= 2X_t dX_t + dt - W_t dW_t - \frac{1}{2}dt - \bar{W}_t d\bar{W}_t - \frac{1}{2}dt \\ &= 2 \cdot \frac{W_t + \bar{W}_t}{\sqrt{2}} \cdot \frac{dW_t + d\bar{W}_t}{\sqrt{2}} - W_t dW_t - \bar{W}_t d\bar{W}_t \\ &= W_t dW_t + W_t d\bar{W}_t + \bar{W}_t dW_t + \bar{W}_t d\bar{W}_t - W_t dW_t - \bar{W}_t d\bar{W}_t \\ &= W_t d\bar{W}_t + \bar{W}_t dW_t. \end{aligned}$$

□

Primetimo da formula (9.5) odgovara formuli za izvod proizvoda dve determinističke funkcije. To je posledica pretpostavke da su dva Braunova kretanja $\{W_t, t \geq 0\}$ i $\{\bar{W}_t, t \geq 0\}$ nezavisna. U opštem slučaju to pravilo ne važi (videti Primer 9.1).

Primer 9.4 (Ornštajn-Ulenbek proces) Neka su $\alpha > 0$ i $\sigma \in \mathbb{R}$ fiksirani brojevi. Definišemo modifikaciju stohastičkog integrala $\{Y(t), t \geq 0\}$ kao

$$Y_t = \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s$$

sa skoro svuda neprekidnim trajektorijama. Stohastički diferencijal dY_t dobijamo korišćenjem Teoreme 9.2 za $Y_t = u(t, X_t)$, gde $u(t, x) = e^{-\alpha t}x$ i

$$X_t = \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

Naime,

$$dX_t = \sigma e^{\alpha t} dW_t,$$

pa dobijamo

$$dY_t = -\alpha e^{-\alpha t} X_t dt + \sigma e^{\alpha t} e^{-\alpha t} dW_t = -\alpha Y_t dt + \sigma dW_t. \quad \square$$

9.2 Zadaci

ZADATAK 9.1 Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje. Dat je proces

$$M_t = (W_t^2 - t)^2 - 4 \int_0^t W_s^2 ds.$$

Odrediti stohastički diferencijal procesa $\{M_t, t \geq 0\}$ i izraziti M_t kao stohastički integral.

Rešenje: Neka je $X_t = (W_t^2 - t)^2$. Tada je $dM_t = dX_t - 4W_t^2 dt$. Da bismo odredili dX_t primenjujemo Itovu formulu na funkciju $u(t, x) = (x^2 - t)^2$. Dobija se

$$dM_t = 4W_t^2 dt + 4W_t(W_t^2 - t)dW_t - 4W_t^2 dt = 4W_t(W_t^2 - t)dW_t,$$

odnosno

$$M_t = \int_0^t 4W_s(W_s^2 - s)dW_s. \quad \square$$

ZADATAK 9.2 Dat je stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$,

$$X_t = t + W_t, \quad t \geq 0,$$

pri čemu je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje. Odrediti $dY_t \cdot dZ_t$ ako su procesi $\{Y_t, t \geq 0\}$ i $\{Z_t, t \geq 0\}$ dati sa

$$Y_t = X_t^2, \quad i \quad Z_t = tX_t.$$

Rešenje: Iz $X_t = t + W_t$ dobijamo stohastički diferencijal

$$dX_t = dt + dW_t.$$

Koristeći Itovu formulu računamo dY_t i dZ_t , jer

$$Y_t = u(t, X_t), \quad u(t, x) = x^2,$$

$$Z_t = v(t, X_t), \quad v(t, x) = tx.$$

Imamo

$$dY_t = (1 + 2X_t)dt + 2X_t dW_t, \quad dZ_t = (t + X_t)dt + t dW_t.$$

Dakle,

$$dY_t \cdot dZ_t = 2tX_t dt,$$

jer $dW_t \cdot dW_t = dt$, $dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0$. □

ZADATAK 9.3 Dato je standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$.

- (i) Odrediti srednju vrednost stohastičkog procesa datog sa $Z_t = te^{\frac{Y}{2} - \frac{X^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$ gde je $X = W_1$ i $Y = W_5 - W_1$.
- (ii) Odrediti stohastički diferencijal procesa $V_t = 3tW_t - W_t^3$ $t > 0$, izraziti ga kao stohastički integral (ako je to moguće) i odrediti $E(V_t)$.

Rešenje:

- (i) Važi $X : \mathcal{N}(0, 1)$ i $Y : \mathcal{N}(0, 4)$, i slučajne promenljive X i Y su nezavisne. Dalje

$$\begin{aligned} E(Z_t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} te^{\frac{y}{2} - \frac{x^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{8}} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} te^{-\frac{1}{2}(\frac{y^2}{4} - y + 1)} e^{\frac{1}{2}} dy dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} te^{\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx}_{=1} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\frac{1}{8}(y-2)^2} dy}_{=1} = \sqrt{\frac{e}{2}} t \end{aligned}$$

- (ii) Primenom Itove formule na $V_t = u(t, W_t)$, gde $u(t, x) = 3tx - x^3$, dobijamo

$$dV_t = (3W_t - \frac{1}{2}6W_t^2)dt + 3(t - W_t^2)dW_t = 3(t - W_t^2)dW_t.$$

Dalje

$$V_t = \int_0^t 3(s - W_s^2)dW_s, \quad V_0 = 0$$

i

$$E(V_t) = E\left(\int_0^t 3(s - W_s^2)dW_s\right) = 0. \quad \square$$

ZADATAK 9.4 Dati su dva puta neprekidno-diferencijabilna funkcija $u = u(x)$, standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$ i stohastički proces $Y_t = tu^2(W_t)$, $t \geq 0$. Odrediti dY_t .

ZADATAK 9.5 Dati su stohastički procesi

$$X_t = t(1 - 2W_t), \quad Z_t = W_t^2 + X_t, \quad t \geq 0.$$

(i) Naći dX_t .

(i) Proveriti da li postoji konstanta α takva da je zadovoljena jednakost

$$dZ_t \cdot dW_t - \alpha t dt - 2W_t dt = -dX_t \cdot dW_t.$$

ZADATAK 9.6 Dat je stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sa stohastičkim diferencijalom

$$dX_t = -\frac{1}{t}(dt + dW_t),$$

pri čemu je sa W_t označeno standardno Braunovo kretanje. Pronaći stohastički proces čiji je stohastički diferencijal jednak $\frac{dY_t}{e^{X_t}} + \frac{1}{2} \frac{W_t}{t} dt$, gde $Y_t = -tW_t e^{X_t}$.

ZADATAK 9.7 Neka je $X_t = tW_t$, $t \geq 0$, gde je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje. Rešiti jednačinu

$$D\left(\int_0^t \sqrt{2s} dW_s\right) - E\left(\int_0^t \frac{2}{1+s} dW_s \int_0^t (1+s) dW_s\right) + 2 \int_0^1 dX_t \cdot dW_t = 0$$

po t .

ZADATAK 9.8 Dati su stohastički procesi $\{X_t, t \geq 0\}$ i $\{Y_t, t \geq 0\}$ sa stohastičkim diferencijalima

$$dX_t = f_X(t)dt + g_X(t)dW_t, \quad dY_t = f_Y(t)dt + g_Y(t)dW_t,$$

gde $g_X^{-1}(t) = g_Y(t)$. Neka je $Z_t = tX_t$. Odrediti stohastički proces $\{D_t, t \geq 0\}$ ako je

$$dD_t = dZ_t \cdot dY_t + 3t^2 dW_t.$$

10. STOHAŠTIČKE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE (SDJ)

Stohastičke diferencijalne jednačine (ili skraćeno SDJ) su osnovni alat u modeliranju realnih sistema koji su podložni uticaju slučajnih promena i zbog toga imaju veliku primenu u finansijama, fizici, biologiji i slično. U ovoj glavi ćemo se posvetiti nekim tipovima stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i pitanju jedinstvenosti i egzistencije rešenja SDJ.

10.1 Rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje i X_0 slučajna promenljiva nezavisna od W_t . Označimo sa

$$\mathcal{U}(t) := \mathcal{F}(X_0; W(s), 0 \leq s \leq t),$$

σ -algebru generisanu slučajnom promenljivom X_0 i istorijom Braunovog kretanja do trenutka t (uključujući t).

Neka su za $T > 0$ date Borelove funkcije

$$b : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$B : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}.$$

Definicija 10.1 *Stohastički proces $\{X_t, t \in [0, T]\}$ je rešenje (Itove) stohastičke diferencijalne jednačine*

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t, t)dt + B(X_t, t)dW_t \\ X(0) &= X_0, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

ako je:

- 1) $\{X_t, t \in [0, T]\}$ progresivno merljiv stohastički proces u odnosu na $\{\mathcal{U}(t), t \in [0, T]\}$,
- 2) $b(X_t, t) \in \mathbb{L}^1(0, T)$,
- 3) $B(X_t, t) \in \mathbb{L}^2(0, T)$,
- 4) $X_t = X(t) = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t B(X_s, s)dW_s$ skoro sigurno za sve $t \in [0, T]$.

10.2 Primeri SDJ

U nastavku navodimo neke primere SDJ, kao i njihova rešenja, što se lako može proveriti korišćenjem Itove formule.

Primer 10.1 Neka je G neprekidna (deterministička) funkcija. U Primeru 9.3 smo pokazali da je proces $Y_t = e^{X_t}$, gde

$$X_t = X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t G^2(s) ds + \int_0^t G(s) dW_s,$$

rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dY_t = \left(-\frac{1}{2} G^2(t) e^{X_t} + \frac{1}{2} G^2(t) e^{X_t} \right) dt + e^{X_t} G(t) dW_t = Y_t G(t) dW_t,$$

sa početnim uslovom $Y_0 = e^{X_0} > 0$.

Ukoliko bismo specijalno izabrali $G \equiv 1$ i $X_0 = 0$, dobili bismo stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dY_t = Y_t dW_t, \quad Y_0 = 1 \quad (10.1)$$

čije je rešenje stohastički proces

$$Y_t = e^{W_t - \frac{t}{2}}.$$

Ako bismo jednačinu (10.1) formalno interpretirali kao običnu diferencijalnu jednačinu, dobili bismo da je njeno rešenje $Y_t = e^{W_t}$. Dakle, možemo reći da, na neki način, ulogu obične eksponencijalne funkcije u stohastičkom kalkulusu preuzima funkcija $Y_t = e^{W_t - \frac{t}{2}}$. $\square$

Primer 10.2 Neka su f i g neprekidne (determinističke) funkcije. Slično kao i u Primeru 10.1, dobijamo da je rešenje SDJ

$$dX = f(t)X_t dt + g(t)X_t dW_t, \quad X(0) = 1$$

oblika

$$X_t = \exp\left(\int_0^t (f(s) - \frac{1}{2}g^2(s)) ds + \int_0^t g(s) dW_s\right), \quad 0 \leq t \leq T. \quad \square$$

Pomoću stohastičkih diferencijalnih jednačina moguće je opisati slučajne promene cena akcija na finansijskom tržištu. U nastavku navodimo primer iz [6] koji to pokazuje.

Primer 10.3 (Cena akcije) Neka $S(t) = S_t$ označava cenu akcije u trenutku t , $t \geq 0$. Evoluciju cene akcije $S(t)$ u vremenu možemo modelirati pretpostavljajući da relativna promena cene akcije, $\frac{dS_t}{S_t}$, zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (10.2)$$

gde je μ drift, a σ volatilnost cene akcije. Neka slučajna promenljiva S_0 predstavlja početnu cenu akcije u trenutku $t = 0$.

Odnos $\frac{dS_t}{S_t}$ predstavlja stopu prinosa ili rentabilnost cene akcije. Modeliranje cene akcije vršimo tako što predpostavljamo da je jedan deo stope prinosa proporcionalan stopi prinosa novca investiranog u banci po nerizičnoj kamatnoj stopi (to je faktor μdt , gde je μ mera prosečnog rasta cene akcije), a drugi deo je podložen slučajnim poremećajima u ceni koji se modeliraju pomoću Braunovog kretanja (to je faktor σdW_t , gde je σ volatilitet stope prinosa).

Na osnovu (10.2) dobijamo

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S(0) = S_0, \quad (10.3)$$

pa korišćenjem rezultata iz Primera 10.2 dobijamo da je rešenje SDJ (10.3) dato sa

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}.$$

Isto se može dobiti primenom Itove formule na $\log S_t$,

$$\begin{aligned} d(\log S_t) &= 0dt + \frac{1}{S_t} \mu S_t dt + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) \sigma^2 S_t^2 dt + \frac{1}{S_t} \sigma S_t dW_t \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Formula (10.3) se može predstaviti u integralnom obliku

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s.$$

Pošto je za svako fiksirano t , S_t slučajna promenljiva koja se može posmatrati kao funkcija od W_t , tj. $S_t = f(W_t)$, a S_0 je nezavisna od budućnosti Braunovog kretanja nakon $t = 0$, možemo izračunati $E(S_t)$. Dobijamo

$$\begin{aligned} E(S_t) &= E(S_0) E\left(e^{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}\right) = E(S_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \varphi_{W_t}(x) dx \\ &= E(S_0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\sigma x - \frac{x^2}{2t}} dx \\ &= E(S_0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(x - t\sigma)^2} e^{\frac{t\sigma^2}{2}} dx \\ &= E(S_0) e^{\mu t}, \end{aligned}$$

gde je korišćeno da je

$$\varphi_{W_t}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad \text{jer } W_t : \mathcal{N}(0, t)$$

i da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(x - t\sigma)^2} dx = 1,$$

jer je podintegralna funkcija gustina raspodele slučajne promenljive sa $\mathcal{N}(t\sigma, t)$ raspodelom.

Primetimo da je funkcija $h(t) = s_0 e^{\mu t}$, koja odgovara $E(S_t)$ (uzimamo $s_0 = E(S_0)$), rešenje obične diferencijalne jednačine

$$\frac{dh(t)}{dt} = \mu h(t), \quad h(0) = s_0,$$

što je jednačina koju bismo dobili kada bismo u (10.3) stavili $\sigma = 0$. Dakle, očekivana cena akcije odgovara determinističkom rešenju jednačine (10.3) za $\sigma = 0$. $\square$

10.3 Egzistencija i jedinstvenost rešenja SDJ

Teorema 10.1 *Neka je data jednačina*

$$dX_t = b(X_t, t)dt + B(X_t, t)dW_t, \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq t \leq T < \infty, \quad (10.4)$$

i neka su $b(x, t)$ i $B(x, t)$ determinističke i merljive (Borelove) funkcije na $\mathbb{R} \times [0, T]$. Neka postoji $k > 0$ takvo da važi:

1) *Lipšicov uslov: Za svako $t \in [0, T]$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$ važi*

$$|b(x, t) - b(y, t)| + |B(x, t) - B(y, t)| \leq k|x - y|.$$

2) *Restrikcija rasta: Za svako $t \in [0, T]$ i svako $x \in \mathbb{R}$ važi*

$$|b(x, t)|^2 + |B(x, t)|^2 \leq k^2(1 + |x|^2).$$

Tada jednačina (10.4) ima jedinstveno rešenje X_t na intervalu $[0, T]$ koje je neprekidno (skoro sigurno) i koje zadovoljava početni uslov $X(0) = X_0$.

Za razliku od običnih diferencijalnih jednačina, ne postoje opšte poznate metode za rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina, osim u specijalnim slučajevima, i uglavnom se metodi koji se koriste u rešavanju običnih diferencijalnih jednačina ne mogu uopštiti na stohastičke. U slučaju SDJ koje ispunjavaju određene kriterijume, moguće je odrediti vezu između SDJ i obične diferencijalne jednačine koju zadovoljava očekivanje rešenja te SDJ.

Teorema 10.2 *Posmatramo linearnu SDJ oblika*

$$dX_t = (A(t)X_t + a(t))dt + (B(t)X_t + b(t))dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t \in [t_0, T].$$

Neka su $A(t)$, $a(t)$, $B(t)$ i $b(t)$ determinističke funkcije, a C je slučajna promenljiva (ne mora biti konstanta). Ako je $E(|C|^2) < \infty$, tada postoji $m(t) = E(X_t)$ (X_t je jedinstveno rešenje SDJ) i predstavlja rešenje ODJ

$$m'(t) = A(t)m(t) + a(t), \quad m(t_0) = E(C).$$

Teorema 10.3 *Rešenje SDJ*

$$dX_t = (AX_t + a(t))dt + b(t)dW_t, \quad X_{t_0} = C, \quad t \in [t_0, T],$$

dato je sa

$$X_t = Ce^{A(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}a(s)ds + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}b(s)dW_s.$$

Itov stohastički integral sa determinističkom podintegralnom funkcijom ima normalnu raspodelu, što je rezultat koji se često koristi.

Teorema 10.4 *Ako je $g(t)$ realna, deterministička funkcija iz $L^2[t_0, T]$, tada*

$$\int_{t_0}^t g(s)dW_s : \mathcal{N}(0, \int_{t_0}^t g^2(s)ds).$$

Primer 10.4 Stohastička diferencijalna jednačina iz Primera 9.4,

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (10.5)$$

opisuje Braunovo kretanje čestice pod uticajem sile trenja i nijedne druge sile i naziva se Langevinova jednačina. Ovde X_t predstavlja brzinu čestice u trenutku t ako je početna brzina jednaka $X_0 = 0$. Ako je $X_0 = C$, gde $E(C^2) < \infty$, onda je rešenje SDJ (10.5) dato sa

$$X_t = Ce^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s.$$

Napomenimo da rešenje X_t Langevinove jednačine možemo dobiti i primenom Teoreme 10.3 za

$$A(t) = -\alpha, \quad a(t) = 0, \quad b(t) = \sigma, \quad t_0 = 0.$$

Teorema 10.4 nam omogućava da odredimo očekivanje od X_t ,

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E\left(Ce^{-\alpha t}\right) + E\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sigma dW_s\right) \\ &= e^{-\alpha t} E(C) + \sigma \underbrace{E\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right)}_{=0} \\ &= e^{-\alpha t} E(C). \end{aligned}$$

Primetimo da $E(C)$ postoji, jer postoji $E(C^2)$. Označimo

$$m(t) := e^{-\alpha t} E(C).$$

Iz Teoreme 10.2 dobijamo da je $m(t)$ rešenje obične diferencijalne jednačine

$$m'(t) = -\alpha m(t), \quad m(0) = E(C).$$

Ponovnim korišćenjem Teoreme 10.4, možemo odrediti i $D(X_t)$. Naime, kako je

$$D(X_t) = E(X_t^2) - E^2(X_t),$$

preostaje da izračunamo $E(X_t^2)$.

Važi

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E\left(C^2 e^{-2\alpha t}\right) + E\left(2Ce^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sigma dW_s\right) + E\left(\sigma^2 \left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \sigma dW_s\right)^2\right) \\ &= e^{-2\alpha t} E(C^2) + 2\sigma e^{-\alpha t} E\left(C \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right) + \sigma^2 E\left(\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right)^2\right). \end{aligned}$$

Slučajna promenljiva C je nezavisna od budućnosti Braunovog kretanja nakon $t = 0$ pa važi

$$E\left(C \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right) = E(C) E\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right) = 0,$$

a iz osobine Itovog stohastičkog integrala (ili Teoreme 10.4) sledi

$$E\left(\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t (e^{-\alpha(t-s)})^2 ds\right) = \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Dakle,

$$D(X_t) = e^{-2\alpha t} E(C^2) + \sigma^2 \cdot \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) - e^{-2\alpha t} E^2(C) = e^{-2\alpha t} D(C) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Pretpostavimo sada da C ima normalnu raspodelu, tj.

$$C : \mathcal{N}(a, d^2).$$

To znači da je, za svako t , slučajna promenljiva X_t data kao linearna kombinacija dve slučajne promenljive sa normalnom raspodelom, jer

$$\int_0^t e^{\alpha(t-s)} dW_s : \mathcal{N}\left(0, \int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} dt\right).$$

Dakle, X_t takođe ima normalnu raspodelu sa izračunatim očekivanjem i disperzijom. Primetimo da

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(C)e^{-\alpha t} \rightarrow 0, \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \\ D(X_t) &= e^{-2\alpha t} D(C) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha}, \quad \text{kada } t \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

pa važi

$$X_\infty : \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right).$$

□

Primer 10.5 Neka je $\{X_t, t \geq 0\}$ stohastički proces koji je rešenje Langevinove jednačine (videti Primer 10.4). Neka je $\{Y_t, t \geq 0\}$ proces koji zadovoljava SDJ

$$dY_t = X_t dt, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = Y_0.$$

Kao što je rečeno, proces X_t predstavlja brzinu čestice u trenutku t . Onda iz

$$\frac{dY_t}{dt} = X_t$$

vidimo da je Y_t položaj te čestice u trenutku t i važi

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t X_s ds.$$

Pošto iz Primera 10.4 znamo da je $E(X_t) = E(C)e^{-\alpha t}$, možemo lako da odredimo očekivanje slučajne promenljive Y_t za fiksirano $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} E(Y_t) &= E(Y_0) + E\left(\int_0^t X_s ds\right) = E(Y_0) + \int_0^t E(X_s) ds \\ &= E(Y_0) + \int_0^t E(C)e^{-\alpha s} ds = E(Y_0) + E(C) \int_0^t e^{-\alpha s} ds \\ &= E(Y_0) + \frac{1}{\alpha} E(C)(1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

□

Iako se metode u rešavanju običnih diferencijalnih jednačina u opštem slučaju ne mogu primeniti kod stohastičkih diferencijalnih jednačina, u nekim slučajevima nas rešenje odgovarajuće ODJ može dovesti do rešenja SDJ, što će biti pokazano u narednom primeru.

Primer 10.6 Neka je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deterministička, neprekidna funkcija takva da $g \in L^2[t_0, T]$. Želimo da rešimo stohastičku diferencijalnu jednačinu datu sa

$$dY_t = g(t)Y_t dW_t, \quad Y_{t_0} = c = \text{const.} \quad (10.6)$$

Ako je dat stohastički proces u integralnom obliku, onda se, koristeći Itovu formulu, može izračunati njegov stohastički diferencijal i samim tim odrediti SDJ koju taj proces zadovoljava. Međutim, osim ako ta SDJ nema neki od specijalnih oblika koje smo do sada videli kroz primere, nije je lako rešiti.

Znamo da je rešenje ODJ

$$dy(t) = ay(t)dt, \quad y(t_0) = c > 0,$$

dato sa

$$\ln y(t) = at + c,$$

tj.

$$y(t) = ce^{a(t-t_0)}.$$

Zato definišimo proces

$$U(t) = \ln Y(t) = u(Y(t)), \quad \text{gde } u(x) = \ln x.$$

Koristeći Itovu formulu, možemo odrediti $dU(t)$. Važi

$$dU(t) = -\frac{1}{2}g^2(t)dt + g(t)dW_t,$$

što u integralnom obliku zapisujemo

$$U(t) - U(0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^t g^2(s)ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_s.$$

Primenom eksponencijalne funkcije na ceo izraz dobijamo

$$Y_t = \exp(\ln Y_{t_0}) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t g^2(s)ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_s\right) = c \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{t_0}^t g^2(s)ds + \int_{t_0}^t g(s)dW_s\right).$$

Vidimo da nam je u ovom slučaju poznavanje rešenja ODJ, koja ima oblik kao SDJ koju želimo da rešimo, pomoglo da dođemo do rešenja date SDJ.

Na ovaj način možemo doći i do rešenja SDJ

$$dY_t = f(t)dt + g(t)Y_t dW_t, \quad Y_{t_0} = c = \text{const.}$$

□

10.4 Zadaci

ZADATAK 10.1 *Dat je stohastički proces*

$$X_t = (2-t) \int_0^t \frac{s}{2-s} dW_s, \quad t \in [0, 2).$$

(i) *Dokazati da je X_t , $t \in [0, 2)$ rešenje stohastičke diferencijalne jednačine*

$$dX_t = -\left(\frac{X_t}{2-t}\right)dt + t dW_t, \quad X_0 = 0.$$

(ii) *Izračunati $E(X_t)$ i $E(X_t Z_t)$, ako je stohastički proces Z_t dat sa*

$$Z_t = \int_0^t (2-s) dW_s.$$

Rešenje:

(i) Neka je

$$Y_t = \int_0^t \frac{s}{2-s} dW_s.$$

Tada $dY_t = \frac{t}{2-t} dW_t$ i $X_t = u(t, Y_t)$, gde $u(t, x) = (2-t)x$. Koristeći Itovu formulu dobijamo

$$dX_t = -\frac{X_t}{2-t} dt + t dW_t.$$

(ii) Koristićemo da je

$$E\left(\int_0^t G dW\right) = 0, \quad E\left(\left(\int_0^t G dW\right)\left(\int_0^t H dW\right)\right) = E\left(\int_0^t GH ds\right).$$

Dobijamo,

$$E(X_t) = 0, \quad E(X_t Z_t) = (2-t)E\left(\int_0^t \frac{s}{2-s} (2-s) ds\right) = \frac{1}{2}t^2(2-t).$$

□

ZADATAK 10.2 *Pokazati da je sa*

$$Y_t = e^{-2 \int_0^t s^2 ds + 2 \int_0^t s dW_s} + t$$

dato rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dY_t = dt + 2t(Y_t - t) dW_t, \quad Y_0 = 1.$$

ZADATAK 10.3 *Dato je standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$. Odrediti stohastičku diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava stohastički proces*

$$Y_t = 2e^{\frac{t^2}{2} - bt + cW_t}, \quad t \geq 0.$$

Odrediti za koje konstante b i c važi

$$E(Y_t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}.$$

ZADATAK 10.4 *Dokazati da je stohastički proces*

$$X_t = Y e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} s ds + \int_0^t e^{2(t-s)} s^2 dW_s,$$

gde je $Y : \mathcal{N}(0, 1)$, rešenje stohastičke diferencijalne jednačine

$$dX_t = (2X_t + t)dt + t^2 dW_t, \quad X_0 = Y.$$

Odrediti $E(X_t)$, $D(X_t)$ i raspodelu stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$.

11. MARTINGALI

Posmatramo fer igru kod koje je isplata u trenutku i slučajna promenljiva Y_i takva da je $E(Y_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Neka se isplate realizuju u diskretnim vremenskim trenucima i neka su one nezavisne u svakom vremenskom trenutku. Definišimo sumu

$$S_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$$

koja predstavlja ukupan isplaćen novac zaključno sa trenutkom n . Pretpostavimo da su poznate sve uplate zaključno sa trenutkom n , što je ekvivalentno poznavanju slučajnih promenljivih $Y_1, \dots, Y_n$ ili $S_1, \dots, S_n$. Zanima nas koja bi bila naša najbolja procena za dobitak u nekom budućem trenutku, tj. čemu je jednako

$$E(S_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Ovde σ -algebra generisana sa $S_1, \dots, S_n$ sadrži sve naše akumulirano znanje o isplatama u fer igri zaključno sa trenutkom n .

Koristeći osobine uslovnog očekivanja dobijamo

$$\begin{aligned} E(S_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) &= E(Y_1 + \dots + Y_n + \dots + Y_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) \\ &= E(S_n | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) \\ &\quad + E(Y_{n+1} + \dots + Y_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) \\ &= S_n + E(Y_{n+1} + \dots + Y_{n+k}) \\ &= S_n + E(Y_{n+1}) + \dots + E(Y_{n+k}) \\ &= S_n. \end{aligned}$$

Dakle, najbolja procena “buduće vrednosti” S_{n+k} je (samo) S_n . To znači da je očekivani dobitak u bilo kom budućem trenutku, ako su poznati dobitci do tada, jednak trenutnoj sumi novca. To je očekivano, jer je u pitanju fer igra. Ako igra nije fer, dobitak bi mogao ići u prilog igraču ili ne, i u skladu sa tim bismo dobili

$$E(S_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) \geq S_n$$

ili

$$E(S_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) \leq S_n.$$

Grubo rečeno, niz slučajnih promenljivih $S_1, S_2, \dots$ za koji važi

$$E(S_{n+k} | \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)) = S_n \tag{11.1}$$

naziva se martingal. Koncept martingala ima svoje poreklo u igrama na sreću (kockanju) i opisuje fer igru. Kako su neki aspekti kockanja “prisutni” u finansijskoj matematici (posebno u teoriji finansijskih derivata), martingali imaju veliku primenu u finansijskoj matematici, ali i raznim oblastima moderne verovatnoće i stohastičke analize.

11.1 Definicija martingala

Primetimo, σ -algebra

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(S_1, \dots, S_n)$$

sadrži sve informacije o isplatama u pomenutoj fer igri zaključno sa trenutkom n . Kako vreme prolazi, naše znanje o prethodnim isplatama se samo može uvećavati (na već postojeća znanja dodajemo nova). Niz σ -algebri za koji to važi čini filtraciju i označava se sa $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ ili $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definicija 11.1 Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Niz σ -algebri $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ na Ω takvih da

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1} \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}, \quad n \in \mathbb{N}$$

se zove **filtracija**.

Intuitivno, $\mathcal{F}_n$ predstavlja naše znanje o posmatranom eksperimentu ili događajima u trenutku n , $n \in \mathbb{N}$. Tačnije, $\mathcal{F}_n$ sadrži sve informacije do trenutka t o tome da li se događaj A desio ili ne. Kako n raste, biće sve više takvih događaja A , to jest, familija $\{\mathcal{F}_n\}_n$ (koja predstavlja naše znanje) biće sve veća.

Pretpostavimo da je $\xi_1, \xi_2, \dots$ niz slučajnih promenljivih i da je $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ filtracija pri čemu oni ne moraju imati ništa zajedničko. Međutim, u praksi, filtracija obično sadrži znanje koje se akumulira posmatranjem ishoda nekog slučajnog niza.

Filtracija se može definisati tako da svako $\mathcal{F}_n$ sadrži sve informacije koje se mogu dobiti iz odgovarajućeg niza $\xi_1, \xi_2, \dots$ do trenutka n .

Definicija 11.2 Kažemo da je niz slučajnih promenljivih $\xi_1, \xi_2, \dots$ **adaptiran (prilagođen)** filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ ako je slučajna promenljiva ξ_n $\mathcal{F}_n$ -merljiva za svako $n = 1, 2, \dots$

Neka je dat niz slučajnih promenljivih $\xi_1, \xi_2, \dots$. Definišimo σ -algebru $\mathcal{F}_n$ kao σ -algebru generisanu slučajnim promenljivama $\xi_1, \dots, \xi_n$, tj.

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primetimo da niz $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ čini jednu filtraciju i da je za svako n slučajna promenljiva ξ_n $\mathcal{F}_n$ -merljiva. Iz Definicije 11.2 sledi da je niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$. Ovo je prirodan način da definišemo filtraciju koja odgovara nekom nizu slučajnih promenljivih, što ćemo često koristiti.

Definicija 11.3 Niz slučajnih promenljivih $\xi_1, \xi_2, \dots$ se zove **(diskretni) martingal** u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ ako važe uslovi:

- (i) ξ_n je integrabilna* za svako $n = 1, 2, \dots$ (ekvivalentno uslovu da $E(|\xi_n|)$ postoji),
- (ii) Niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ je adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$,
- (iii) $E(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \xi_n$ skoro sigurno, za svako $n = 1, 2, \dots$

*u smislu mere verovatnoće P

Osobina (iii) u Definiciji 11.3 se naziva **martingalsko svojstvo**.

Napomena 11.1 U nastavku obično nećemo naglašavati da jednakosti koje uključuju uslovno očekivanje (kao u tački (iii) Definicije 11.3) važe skoro sigurno, nego će se to podrazumevati.

Primer 11.1 Neka je $\eta_1, \eta_2, \dots$ niz nezavisnih integrabilnih slučajnih promenljivih takvih da $E(\eta_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Definišimo

$$\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n, \quad i \quad \mathcal{F}_n = \mathcal{F}(\eta_1, \dots, \eta_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Može se pokazati da je niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$.

Slučajna promenljiva ξ_n je integrabilna za svako n , jer je $E(\xi_n) = 0$. Takođe, niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ je adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$, jer je $\xi_n = f(\eta_1, \dots, \eta_n)$, pa je samim tim i $\mathcal{F}_n$ -merljiva za svako n . Ostalo je da pokažemo da važi martingalsko svojstvo, tj.

$$E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \xi_n \quad \text{za svako } n.$$

Slučajna promenljiva ξ_n je $\mathcal{F}_n$ -merljiva, pa važi

$$E(\xi_n|\mathcal{F}_n) = \xi_n,$$

dok je η_{n+1} nezavisna od $\mathcal{F}_n$, pa

$$E(\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(\eta_{n+1}) = 0.$$

Sledi

$$E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(\xi_n|\mathcal{F}_n) + E(\eta_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \xi_n. \quad \square$$

Primer 11.2 Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istim zakonom raspodele

$$X_n : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Definišimo slučajne promenljive $S_n := X_1 + \dots + X_n$ i $\xi_n := S_n^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazaćemo da je $\xi_1, \xi_2, \dots$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$, gde

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Kako je $E(|S_n|) \leq E(|X_1|) + \dots + E(|X_n|) = n$, važi $E(S_n^2) < n^2 < \infty$ za svako n . Sledi da je ξ_n integrabilna za svako n , tj. $E(|\xi_n|) \leq n^2 + n < \infty$. Jasno, važi $\xi_n = f(X_1, \dots, X_n)$, pa je ξ_n $\mathcal{F}_n$ -merljiva za svako n .

Da bismo pokazali martingalsko svojstvo koristimo da su slučajne promenljive S_n i S_n^2 $\mathcal{F}_n$ -merljive, pa važi

$$E(S_n^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2, \quad E(S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$$

i da su X_{n+1} i X_{n+1}^2 nezavisne od $\mathcal{F}_n$, što znači da važi

$$E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}) = 0, \quad E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = E(X_{n+1}^2) = 1.$$

Koristeći sve to dobijamo

$$\begin{aligned} E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - (n+1) \\ &= E(S_n^2|\mathcal{F}_n) + 2E(S_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n) + E(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) - (n+1) \\ &= S_n^2 + 2S_n E(X_{n+1}) + E(X_{n+1}^2) - (n+1) \\ &= S_n^2 - n = \xi_n. \end{aligned} \quad \square$$

Primer 11.3 *Dat je niz nenegativnih, nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa očekivanjem $E(X_i) = 1$ za sve $i \in \mathbb{N}$. Neka je $M_0 := 1$ i*

$$M_n := \prod_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- (i) *Slučajne promenljive X_n , $n \in \mathbb{N}$ su nenegativne, pa $E(|M_n|) = E(|X_1|) \cdot \dots \cdot E(|X_n|) = 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ i $E(M_0) = E(1) = 1$.*
- (ii) *Definišimo filtraciju $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots$ takvu da $\mathcal{F}_n := \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$. Tada je M_n $\mathcal{F}_n$ -merljiva slučajna promenljiva.*
- (iii) *Da bismo dokazali da je niz $M_0, M_1, \dots$ diskretni martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots$ ostalo je da proverimo uslov*

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n.$$

Koristeći da je M_n $\mathcal{F}_n$ -merljiva i da je X_{n+1} nezavisna od $\mathcal{F}_n$, dobijamo

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= E(M_n X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= M_n E(X_{n+1}) = M_n. \end{aligned}$$

□

Primer 11.4 *Neka je $\xi_1, \xi_2, \dots$ martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$. Koristeći martingalsko svojstvo dobijamo*

$$E(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = E(\xi_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sa druge strane, znamo da je $E(E(X|\nu)) = E(X)$ za bilo koju slučajnu promenljivu X i σ -algebru ν , pa važi

$$E(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = E(\xi_{n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Sledi

$$E(\xi_n) = E(\xi_{n+1}) \quad \text{za svako } n \in \mathbb{N}.$$

□

Ukoliko je neka igra takva da je očekivani dobitak u nekom budućem periodu veći ili manji od dobitka u sadašnjem trenutku, a to se može ostvariti bez dodatnih ulaganja ili korišćenja “insajderskih” informacija, onda martingalsko svojstvo nije zadovoljeno i odgovarajući niz slučajnih promenljivih je submartingal ili supermartingal. Za takvu igru kažemo da nije fer.

Primer 11.5 *Posmatramo kretanje cena akcija na finansijskom tržištu. Označimo sa S_n cenu akcija na početku dana n . Grubo rečeno, za finansijsko tržište kažemo da nema arbitraže ako nije moguće sa pozitivnom verovatnoćom ostvariti prihod ni iz čega (bez ulaganja ili dodatnih informacija o kretanju cena na tržištu), što odgovara uslovu da za svako n važi*

$$E(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n,$$

gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(S_0, S_1, \dots, S_n)$.

□

Definicija 11.4 *Niz slučajnih promenljivih $\xi_1, \xi_2, \dots$ se zove (diskretni) submartingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ ako važe uslovi:*

- (i) ξ_n je integrabilna za svako $n = 1, 2, \dots$ (u smislu da $E(|\xi_n|)$ postoji),

- (ii) Niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ je adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$,
- (iii) $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq \xi_n$ skoro sigurno, za svako $n = 1, 2, \dots$.

Primer 11.6 Neka je $\xi_1, \xi_2, \dots$ niz kvadratno integrabilnih slučajnih promenljivih (tj. $E(\xi_i^2) < \infty$ za svako i). Pokazaćemo da ako je $\xi_1, \xi_2, \dots$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gde je $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, onda je $\{\xi_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ submartingal u odnosu na istu tu filtraciju.

Prva dva uslova u definiciji slede direktno iz formulacije. Naime, niz $\{\xi_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_n\}_n$, jer je $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adaptiran istoj filtraciji (ξ_n je $\mathcal{F}_n$ -merljiva, pa je ξ_n^2 takođe $\mathcal{F}_n$ -merljiva). Ostalo je da za svako n pokažemo važi

$$E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \geq \xi_n^2.$$

Znamo da za svako n važi

$$\xi_n = E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n),$$

jer je $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ martingal. Funkcija $\varphi(x) = x^2$ je konveksna, pa primenom Jensenove nejednakosti (Teorema 2.3) dobijamo

$$\xi_n^2 = \left(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)\right)^2 \leq E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n). \quad \square$$

Definicija 11.5 Niz slučajnih promenljivih $\xi_1, \xi_2, \dots$ se zove (**diskretni**) **supermartingal** u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ ako važe uslovi:

- (i) ξ_n je integrabilna za svako $n = 1, 2, \dots$ (u smislu da $E(|\xi_n|) < \infty$),
- (ii) Niz $\xi_1, \xi_2, \dots$ je adaptiran filtraciji $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$,
- (iii) $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq \xi_n$ skoro sigurno za svako $n = 1, 2, \dots$.

Do sada smo posmatrali niz slučajnih promenljivih koje predstavljaju (diskretni) martingal u odnosu na neku filtraciju. Taj niz slučajnih promenljivih možemo interpretirati kao stohastički proces kod koga je parametarski skup diskretan. Na analogan način možemo definisati martingale kao stohastičke procese kod kojih je parametarski skup interval na realnoj pravoj. U ovom slučaju se kao prirodan izbor za filtraciju nameće istorija tog procesa.

Podsetimo se, istorija stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ do trenutka t (uključujući i trenutak t) je σ -algebra definisana sa

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s, 0 \leq s \leq t).$$

Definicija 11.6 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Familija σ -algebri $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ je filtracija na prostoru verovaćnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako je $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ za svako $s, t \in I, s \leq t$.

Definicija 11.7 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Stohastički proces $\{X(t), t \in I\}$ je martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ako važi:

- (i) $X(t)$ je integrabilna slučajna promenljiva za svako $t \in I$ (tj. $E(|X(t)|) < \infty$).
- (ii) $X(t)$ je $\mathcal{F}_t$ -merljiva za svako $t \in I$ (tj. $\{X(t), t \in I\}$ je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$).
- (iii) $E(X(t)|\mathcal{F}_s) = X(s)$ skoro sigurno, za svako $s \leq t, s, t \in I$.

Napomena 11.2 Ako je filtracija $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ istorija stohastičkog procesa $\{X(t), t \in I\}$ ili nekog drugog procesa pomoću koga je $\{X(t), t \in I\}$ definisan, onda uslov (ii) u Definiciji 11.7 sledi direktno iz definicije te filtracije.

Na analogan način definišemo submartingale i supermartingale.

Definicija 11.8 Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Stohastički proces $\{X(t), t \in I\}$ je submartingal (odnosno supermartingal) u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$ ako važi:

- (i) $X(t)$ je integrabilna slučajna promenljiva za svako $t \in I$ (tj. $E(|X(t)|) < \infty$).
- (ii) $X(t)$ je $\mathcal{F}_t$ -merljiva za svako $t \in I$ (tj. $\{X(t), t \in I\}$ je adaptiran filtraciji $\{\mathcal{F}_t, t \in I\}$).
- (iii) $E(X(t)|\mathcal{F}_s) \geq X(s)$ (odnosno $E(X(t)|\mathcal{F}_s) \leq X(s)$) skoro sigurno, za svako $s \leq t, s, t \in I$.

Primer 11.7 Ako je $\{N(t), t \geq 0\}$ Poasonov proces sa stopom rasta λ , može se pokazati da je $\{N(t) - \lambda t, t \geq 0\}$, martingal u odnosu na istoriju Poasonovog procesa.

Naime, $E(|N(t) - \lambda t|) \leq E(N(t)) + \lambda t = 2\lambda t < \infty$ i koristeći da Poasonov proces ima nezavisne priraštaje dobijamo da za $t > s \geq 0$ važi

$$\begin{aligned} E(N(t) - \lambda t | \mathcal{N}_s) &= E(N(t) - N(s) | \mathcal{N}_s) + E(N(s) | \mathcal{N}_s) - \lambda t \\ &= E(N(t) - N(s)) + N(s) - \lambda t \\ &= \lambda(t - s) + N(s) - \lambda t = N(s) - \lambda s, \end{aligned}$$

gde je sa $\mathcal{N}_t = \mathcal{F}\{N(s) | 0 \leq s \leq t\}$ data istorija Poasonovog procesa $\{N_t, t \geq 0\}$. □

Primer 11.8 Stohastički proces $\{e^{W_t - \frac{t}{2}}, t > 0\}$ je martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja $\mathcal{W}_t = \mathcal{F}\{W_s | 0 \leq s \leq t\}$. (Ovaj martingal se naziva eksponencijalni martingal.)

Za svako t , slučajna promenljiva $e^{W_t - \frac{t}{2}}$ je $\mathcal{W}_t$ -merljiva i važi

$$\begin{aligned} E(|e^{W_t - \frac{t}{2}}|) &= e^{-\frac{t}{2}} E(e^{W_t}) = e^{-\frac{t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= e^{-\frac{t}{2}} e^{\frac{t}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2t}} dx}_{=1} = 1 < \infty, \end{aligned}$$

što se može iskoristiti u dokazu da $E(e^{W_t - \frac{t}{2}} | \mathcal{W}_s) = E(e^{W_s - \frac{s}{2}})$ za $t > s \geq 0$. Braunovo kretanje ima nezavisne priraštaje i W_t je $\mathcal{W}_t$ -merljivo pa važi

$$E(e^{W_t - \frac{t}{2}} | \mathcal{W}_s) = e^{-\frac{t}{2}} E(e^{W_t - W_s} e^{W_s} | \mathcal{W}_s) = e^{-\frac{t}{2}} e^{W_s} \underbrace{E(e^{W_t - W_s})}_{=e^{\frac{t-s}{2}}} = e^{W_s - \frac{s}{2}}.$$

□

11.2 Martingali i Braunovo kretanje

Neka je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje i $\mathcal{W}_t = \{W_s | 0 \leq s \leq t\}$ istorija Braunovog kretanja do trenutka t .

Teorema 11.1 $\{W_t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja.

Dokaz. Neka je $t > s$. Tada

$$E(W_t | \mathcal{W}_s) = E(W_t - W_s | \mathcal{W}_s) + E(W_s | \mathcal{W}_s).$$

Dalje, $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t - s)$, priraštaj $W_t - W_s$ je nezavisan od W_s , pa samim tim i od $\mathcal{W}_s$, dok je W_s $\mathcal{W}_s$ -merljivo, pa sledi

$$E(W_t - W_s | \mathcal{W}_s) = E(W_t - W_s) = 0, \quad E(W_s | \mathcal{W}_s) = W_s.$$

Lako dobijamo da važi

$$E(W_t | \mathcal{W}_s) = W_s. \quad \square$$

Teorema 11.2 $\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja.

Dokaz. Neka je $t > s$. Slučajnu promenljivu W_t^2 možemo zapisati kao

$$W_t^2 = (W_t - W_s)^2 + 2W_s(W_t - W_s) + W_s^2.$$

Dalje, priraštaji $W_t - W_s$ i $(W_t - W_s)^2$ su nezavisni od $\mathcal{W}_s$ i $W_t - W_s : \mathcal{N}(0, t - s)$, pa važi

$$\begin{aligned} E(W_t - W_s | \mathcal{W}_s) &= E(W_t - W_s) = 0, \\ E((W_t - W_s)^2 | \mathcal{W}_s) &= E((W_t - W_s)^2) = t - s. \end{aligned}$$

Dodatno, slučajne promenljive W_s i W_s^2 su $\mathcal{W}_s$ -merljive. Sledi,

$$\begin{aligned} E(W_t^2 | \mathcal{W}_s) &= E((W_t - W_s)^2 | \mathcal{W}_s) + 2E(W_s(W_t - W_s) | \mathcal{W}_s) + E(W_s^2 | \mathcal{W}_s) \\ &= t - s + 2W_s E(W_t - W_s | \mathcal{W}_s) + W_s^2 = t - s + W_s^2, \end{aligned}$$

čime je dokazano da važi martingalsko svojstvo

$$E(W_t^2 - t | \mathcal{W}_s) = W_s^2 - s. \quad \square$$

Pokazali smo da su $\{W_t, t \geq 0\}$ i $\{W_t^2 - t, t \geq 0\}$ martingali u odnosu na istoriju Braunovog kretanja, a pored toga od ranije znamo da važi $W_0 = 0$ s.s. i da Braunovo kretanje ima skoro svuda neprekidne trajektorije. Može se pokazati da svaki proces koji ima te karakteristike jeste Braunovo kretanje.

Teorema 11.3 (Levijska karakterizacija Braunovog kretanja) Neka je

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

istorija stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ do trenutka t . Proces $\{X_t, t \geq 0\}$ je Braunovo kretanje ako i samo ako

1. $X_0 = 0$ skoro sigurno.
2. X_t ima neprekidne trajektorije.
3. X_t je martingal u odnosu na $\mathcal{F}_t$.
4. $X_t^2 - t$ je martingal u odnosu na $\mathcal{F}_t$.

Primer 11.9 Neka je $c > 0$. Ako je $\{W_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje, onda je stohastički proces $\{V(t), t \geq 0\}$, gde $V(t) := \frac{1}{c}W(c^2t)$, takođe Braunovo kretanje.

Ovo se može pokazati po definiciji ili koristeći Teoremu 11.3, što ćemo sada pokazati.

Jasno, prva dva uslova iz Teoreme 11.3 su zadovoljena: $V(0) = 0$ s.s. i $V(t)$ ima neprekidne trajektorije zato što Braunovo kretanje ima neprekidne trajektorije. Da bismo pokazali preostala dva uslova neophodno je da nađemo vezu između istorije procesa $\{V(t), t \geq 0\}$,

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}\{V(s) | 0 \leq s \leq t\}$$

i istorije Braunovog kretanja. Važi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_t &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{c}W(c^2s) | 0 \leq s \leq t\right\} = \mathcal{F}\{W(c^2s) | 0 \leq c^2s \leq c^2t\} \\ &= \mathcal{F}\{W(\tau) | 0 \leq \tau \leq c^2t\} = \mathcal{W}_{c^2t}. \end{aligned}$$

Prvo ćemo pokazati da je $\{V(t), t \geq 0\}$ martingal u odnosu na $\{\mathcal{G}_t\}_t$. Jasno, $E(|V(t)|) < \infty$ sledi iz činjenice da $E(|W_t|) < \infty$, dok za $0 \leq s < t$ važi

$$E(V(t) | \mathcal{G}_s) = \frac{1}{c}E(W(c^2t) | \mathcal{W}_{c^2s}) = \frac{1}{c}W(c^2s),$$

jer je $\{W_t, t \geq 0\}$ martingal u odnosu na $\{\mathcal{W}_t, t \geq 0\}$.

Slično, $\{V^2(t) - t, t \geq 0\}$ je martingal u odnosu na istoriju tog procesa, jer $E(|V^2(t) - t|) < \infty$ sledi iz definicije i za $t > s \geq 0$ važi

$$\begin{aligned} E(V^2(t) - t | \mathcal{G}_s) &= \frac{1}{c^2}E(W^2(c^2t) - c^2t | \mathcal{W}_{c^2s}) = \frac{1}{c^2}(W^2(c^2s) - c^2s) \\ &= V^2(s) - s, \end{aligned}$$

što sledi iz činjenice da je $\{W^2(t) - t, t \geq 0\}$ martingal u odnosu na $\{\mathcal{W}_t, t \geq 0\}$. □

11.3 Zadaci

ZADATAK 11.1 U kutiji se nalazi r crvenih i b plavih kuglica. U svakom izvlačenju se iz kutije izvlači jedna kuglica, sa vraćanjem, i u kutiju se ubacuje još a kuglica iste boje.

- (a) Neka je Z_n broj crvenih kuglica u posudi posle n -tog izvlačenja. Dokazati da niz $\{Z_n\}_n$ čini lanac Markova i odrediti verovatnoće prelaza za jedan korak. Da li je lanac Markova $\{Z_n\}_n$ homogen ili nehomogen?

- (b) Neka je sa X_n označen udeo crvenih kuglica u posudi posle n -tog izvlačenja. Dokazati da je $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_n)$. Slučajna promenljiva $Y_n, n \in \mathbb{N}$ uzima vrednost 1 ako je u n -tom izvlačenju izvučena crvena kuglica, a u suprotnom uzima vrednost 0.

Rešenje:

- (a) Ukupan broj kuglica u posudi posle n -tog izvlačenja je $r + b + n \cdot a$. To znači da je

$$P\{Z_{n+1} = r_{n+1} | Z_n = r_n, Z_{n-1} = r_{n-1}, \dots, Z_0 = r\} = P\{Z_{n+1} = r_{n+1} | Z_n = r_n\}$$

i $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ je nehomogen lanac Markova. Verovatnoće prelaza za jedan korak su

$$P\{Z_{n+1} = r_{n+1} | Z_n = r_n\} = \begin{cases} \frac{r+b+an-r_n}{r+b+an}, & r_{n+1} = r_n \\ \frac{r_n}{r+b+an}, & r_{n+1} = r_n + a \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- (b) $E(|X_n|) < \infty$ važi, jer $0 \leq X_n \leq 1$. Takođe, $X_n = \frac{Z_n}{r+b+an}$ je funkcija koja zavisi od $Y_1, \dots, Y_n$ jer $Z_n = f(Y_1, \dots, Y_n)$. Dakle, $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Važi

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E(X_{n+1} | Z_n = r_n) \\ &= P\{Y_{n+1} = 0\} E\left(\frac{r_n + aY_{n+1}}{r + b + a(n+1)} \middle| Y_{n+1} = 0\right) \\ &\quad + P\{Y_{n+1} = 1\} E\left(\frac{r_n + aY_{n+1}}{r + b + a(n+1)} \middle| Y_{n+1} = 1\right) \\ &= \frac{r + b + an - r_n}{r + b + an} \cdot \frac{r_n}{r + b + a(n+1)} + \frac{r_n}{r + b + an} \cdot \frac{r_n + a}{r + b + a(n+1)} = X_n, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$. $\square$

ZADATAK 11.2 *Dat je niz nezavisnih i ograničenih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ takvih da je $|X_k| \leq a < \infty$ za svako $k = 1, 2, \dots$. Neka je $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Naći dovoljan uslov da bi niz $\{S_n^2 - E(S_n^2)\}_n$ bio diskretan martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_n$, gde $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$.*

Rešenje: Kako važi

$$E(S_{n+1}^2 - E(S_{n+1}^2) | \mathcal{F}_n) = S_n^2 - E(S_n^2) + 2E(X_{n+1})(S_n - E(S_n)),$$

sledi da je $\{S_n^2 - E(S_n^2), n \in \mathbb{N}\}$ martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ ako je $E(X_{n+1}) = 0$. $\square$

ZADATAK 11.3 $\{Y_n\}_{n \geq 0}$ je niz apsolutno integrabilnih slučajnih promenljivih adaptiranih filtraciji $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$. Pretpostavimo da postoje realni brojevi $u_n, v_n, n \geq 0$, takvi da

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = u_n Y_n + v_n.$$

Pronaći nizove realnih brojeva $\{a_n\}_{n \geq 0}$ i $\{b_n\}_{n \geq 0}$, $a_0 = 1, b_0 = 0$, takve da je niz slučajnih promenljivih $M_n := a_n Y_n + b_n, n \in \mathbb{N}$ martingal u odnosu na istu filtraciju.

Rešenje: Da bi niz $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bio martingal u odnosu na $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ treba da važi

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = M_n,$$

tj.

$$E(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) = a_{n+1}E(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) + b_{n+1} = a_{n+1}u_n Y_n + a_{n+1}v_n + b_{n+1} = a_n Y_n + b_n.$$

Dobijamo

$$a_{n+1} = a_n u_n^{-1}, \quad a_0 = 1, \quad b_{n+1} = b_n - a_{n+1}v_n, \quad b_0 = 0.$$

Indukcijom se može pokazati da važi

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} u_k^{-1}, \quad a_0 = 1, \quad b_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}v_k, \quad b_0 = 0.$$

□

ZADATAK 11.4 *Dat je niz nezavisnih, jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih*

$$X_n : \begin{pmatrix} -6 & -2 & 2 & 6 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Dokazati da je niz $\{\gamma_n = \cos(\pi n) \sin\left(\frac{\pi}{2} S_n\right), n \in \mathbb{N}\}$, gde je $S_n = X_1 + \dots + X_n$, martingal u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$, gde je $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$.

ZADATAK 11.5 *Neka je $X_1 : \mathcal{U}(0, 1)$. Dat je niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ definisan na sledeći način: Ako je dato $X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}$, tada X_n ima uniformnu raspodelu na intervalu $(0, x_{n-1})$.*

(a) *Dokazati da je $E(X_{n+1}) = 2^{-(n+1)}$.*

(b) *Dokazati da je $\{X_n\}_n$ supermartingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{F}_n\}_n$, $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, \dots, X_n)$.*

ZADATAK 11.6 *Pokazati da je $\{e^{2W_t}e^{-2t}, t \geq 0\}$ martingal u odnosu na istoriju Braunovog kretanja ako je $\{W_t, t \geq 0\}$ standardno Braunovo kretanje.*

Rešenje: Treba pokazati da je $\{G_t, t \geq 0\}$, $G_t := e^{2W_t}e^{-2t}$, martingal u odnosu na filtraciju $\{\mathcal{W}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{W}_t = \{W_s, 0 \leq s \leq t\}$. Jasno, G_t je adaptirano filtraciji $\mathcal{W}_t$, jer je i $\{W_t, t \geq 0\}$ adaptirano u odnosu na $\{\mathcal{W}_t, t \geq 0\}$.

Neka je $0 \leq s \leq t$. Priraštaj $W_t - W_s$ je nezavisan od $\mathcal{W}_s$ i W_s je $\mathcal{W}_s$ -merljivo, pa dobijamo

$$E(e^{2W_t}|\mathcal{W}_s) = E(e^{2(W_t-W_s)}e^{2W_s}|\mathcal{W}_s) = e^{2W_s}E(e^{2(W_t-W_s)}|\mathcal{W}_s) = e^{2W_s}E(e^{2(W_t-W_s)}).$$

Kako priraštaj $W_t - W_s$ ima normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $t - s$, sledi

$$\begin{aligned} E(e^{2(W_t-W_s)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-2(t-s))^2}{2(t-s)}} e^{2(t-s)} dx = e^{2(t-s)}. \end{aligned}$$

Dobijamo

$$E(e^{2W_t}e^{-2t}|\mathcal{W}_s) = e^{2W_s}e^{-2s}.$$

Pošto je $E(|G_t|) < \infty$ za svako t , sledi da je G_t martingal u odnosu na $\mathcal{W}_t$.

□

ZADATAK 11.7 Neka je dat stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$ sa stacionarnim i nezavisnim priraštajima, očekivanjem jednakim nula i disperzijom $\sigma_X^2 t$. Dokazati da je $\{Z_t, t \geq 0\}$, gde je

$$Z_t = a(X_t^2 - \sigma_X^2 t) + Y_t, \quad a \in \mathbb{R},$$

martingal u odnosu na istoriju stohastičkog procesa $\{X_t, t \geq 0\}$ zaključno sa vremenom t , ako je $\{Y_t, t \geq 0\}$ martingal u odnosu na istu filtraciju.

Rešenje: Koristimo da je $\{Y_t, t \geq 0\}$ martingal i da važi

$$E(a(X_t^2 - \sigma_X^2 t) | \mathcal{F}_s) = a\sigma_X^2(t - s) + aX_s^2 - a\sigma_X^2 t = aX_s^2 - a\sigma_X^2 s, \quad s < t.$$

□

ZADATAK 11.8 Dokazati da je stohastički proces $\{X_t, t \geq 0\}$, gde je $X_t = e^{-\frac{t}{2}} \cosh W_t$, martingal u odnosu na istoriju Braunovog procesa[†].

[†]Važi $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

12. NEKE PRIMENE SDJ U MATEMATICI FINANSIJA

Za razumevanje ovog dela udžbenika potrebno je predznanje iz finansijske matematike (pre svega osnovni pojmovi i načini trgovanja na finansijskom tržištu).

Svaki investitor ulaže novčana sredstva u finansijske aktive (roba, valute, akcije, menice i državne hartije od vrednosti, finansijski derivati) sa ciljem da ostvari prinos. Međutim, investitor se suočava sa određenim rizikom da njegovo ulaganje neće rezultirati u skladu sa očekivanjima. U poslednje vreme se poklanja velika pažnja praćenju i upravljanju rizicima na finansijskim tržištima. Zbog toga postoji velika potreba za modelima koji treba da što bolje predvide fluktuacije na finansijskom tržištu i smanje rizik u poslovanju. Potreba za modelima zaštite od rizika je rezultirala pojavom finansijskih derivata koji predstavljaju hartije od vrednosti čija je cena izvedena iz cena drugih finansijskih instrumenata. Oni omogućavaju investitorima da posluju sa smanjenim rizikom. U nastavku će biti predstavljeni neki modeli koji opisuju evoluciju cena finansijskih instrumenata na tržištu.

12.1 Koks - Ros - Rubinštajn (CRR) model

U nastavku ćemo predstaviti CRR model koji omogućava praćenje cena akcija na tržištu pod određenim uslovima.

Posmatra se vremenski interval $[0, L]$ i vrši se particija tog intervala takva da je dužina svakog od T podintervala jednaka Δt , tj.

$$t_k - t_{k-1} = \Delta t, \quad k = 1, 2, \dots, T$$

za

$$t_0 < t_1 < \dots < t_T.$$

Jasno, tada je $L = T\Delta t$.

Aktiva predstavlja konkretne oblike sredstava sa kojima raspolaže preduzeće ili pojedinac. Kod CRR modela pretpostavljamo da imamo sledeće aktive:

- 1) Nerizične^{*} aktive (prinos od aktive se sa sigurnošću zna);
- 2) Rizične[†] aktive.

^{*}riskfree assets

[†]risky assets

CRR model pretpostavlja da se tokom svakog vremenskog intervala $[t_k, t_{k+1}]$ (ekonomsko) stanje menja na dva načina, ili raste ili opada. Takođe, koje će se od te dve promene desiti ne zavisi od prethodnih promena stanja.

Pretpostavimo da se rast dešava sa verovatnoćom $p \in (0, 1)$, a pad sa verovatnoćom $q = 1 - p$, gde se verovatnoća p određuje na osnovu osobina (kriterijuma) tržišta.

12.1.1 CRR model i slučajan hod

Neka je rizična aktiva akcija koja predstavlja hartiju od vrednosti čijom kupovinom se stiče vlasništvo nad delom kapitala akcionarskog društva.

CRR model pretpostavlja da u svakom vremenskom intervalu $[t_k, t_{k+1}]$ cena akcije može da raste sa faktorom u , od S_k do $S_{k+1} = S_k u$, dok cena akcije opada sa faktorom d i to sa S_k na $S_{k+1} = S_k d$. Pri tome su u i d konstante rasta, odnosno pada i nezavisne su od vremena, a važi $0 < d < 1 < u$.

Promene pojedinačne cene se mogu modelirati pomoću niza $\{E_i, i \in \mathbb{N}\}$ Bernulijevih slučajnih promenljivih takvih da je

$$E_i : \begin{pmatrix} u & d \\ p & q \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p$$

za svako $i = 1, \dots, T$. To znači da se cena akcije u konačnom vremenskom trenutku T može zapisati kao

$$S_T = S_0 E_1 \cdot \dots \cdot E_T,$$

gde S_0 predstavlja početnu cenu akcije. Ako sa

$$H_T = \sum_{i=1}^T \log E_i = \log \frac{S_T}{S_0}$$

označimo slučajnu promenljivu koja pokazuje logaritamski rast cene akcije, onda je cena akcije u trenutku T jednaka

$$S_T = S_0 e^{\log(E_1 \cdot \dots \cdot E_T)} = S_0 e^{\sum_{i=1}^T \log E_i} = S_0 e^{H_T}.$$

Definišimo konstante η i σ na sledeći način:

$$\eta = \frac{1}{\Delta t} E(\log E_i), \quad \sigma^2 = \frac{1}{\Delta t} D(\log E_i).$$

Važi

$$\begin{aligned} E(\log E_i) &= p \log u + q \log d, \\ D(\log E_i) &= E((\log E_i)^2) - E^2(\log E_i) \\ &= p \log^2 u + q \log^2 d - (p \log u + q \log d)^2 \\ &= p(1 - p) \log^2 u + q(1 - q) \log^2 d - 2pq \log u \log d \\ &= pq(\log u - \log d)^2, \end{aligned}$$

pa dobijamo

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{\Delta t} (p \log u + q \log d), \\ \sigma^2 &= \frac{1}{\Delta t} pq (\log u - \log d)^2. \end{aligned}$$

Kako je

$$E(\log E_i) = \eta\Delta t, \quad \text{ i } \quad D(\log E_i) = \sigma^2\Delta t,$$

možemo standardizovati (normalizovati) slučajnu promenljivu $\log E_i$. Neka je

$$X_i := (\log E_i)^* = \frac{\log E_i - E(\log E_i)}{\sqrt{D(\log E_i)}} = \frac{\log E_i - \eta\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Pošto je X_i standardizovana slučajna promenljiva, znamo da je $E(X_i) = 0$ i $D(X_i) = 1$. Izrazimo sada $\log E_i$ iz gornje formule kao

$$\log E_i = \eta\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}X_i.$$

Primetimo da ako je $E_i = u$ (što se dešava sa verovatnoćom p), onda je

$$\frac{\log u - E(\log E_i)}{\sqrt{D(\log E_i)}} = \frac{q}{\sqrt{pq}}.$$

Ako je $E_i = d$, tada

$$\frac{\log d - E(\log E_i)}{\sqrt{D(\log E_i)}} = -\frac{p}{\sqrt{pq}}.$$

To znači da X_i ima sledeću raspodelu:

$$X_i : \begin{pmatrix} \frac{q}{\sqrt{pq}} & -\frac{p}{\sqrt{pq}} \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Dodatno, slučajne promenljive X_i , $i = 1, \dots, T$, su nezavisne. Sada imamo

$$\begin{aligned} H_T &= \sum_{i=1}^T \log E_i = \sum_{i=1}^T (\eta\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}X_i) \\ &= \sum_{i=1}^T \eta\Delta t + \sum_{i=1}^T \sigma\sqrt{\Delta t}X_i = \eta T\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^T X_i \\ &= \eta L + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^T X_i. \end{aligned}$$

Dobijena formula prikazuje logaritamski rast cena H_T kao zbir determinističkog dela, ηL , i slučajnog dela, $\sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^T X_i$. Svako X_i opisuje promenu cene akcije za vreme i -tog podintervala modela.

Konačna cena akcije (cena u konačnom, krajnjem trenutku T) je tada

$$S_T = S_0 e^{H_T} = S_0 e^{\eta L + \sigma\sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^T X_i},$$

gde je η drift, a σ volatilitnost (nestabilnost) cene akcije.

Izraz

$$s = \frac{1}{T} \log \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = \frac{1}{T} H_T$$

mnogi autori zovu stopa prinosa. Razlog za to je što je gornji izraz ekvivalentan sa izrazom

$$S_t = S_0 e^{sT},$$

koja pokazuje da cena akcije neprekidno raste sa stopom s . Niz $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ koji opisuje ponašanje cena akcije u svakom vremenskom intervalu je jedan primer slučajnog hoda, jer u svakom trenutku slučajna promenljiva X_i može imati dve vrednosti (cena akcije može da poraste ili da opadne).

Dobijeni zaključci se mogu iskazati sledećom teoremom.

Teorema 12.1 *Za CRR model kod koga je verovatnoća da cena raste p , a da cena opada $q = 1 - p$, koji ima trajanje $L = T\Delta t$ i vremenske priraštaje Δt , cena akcije u krajnjem trenutku je data sa*

$$S_T = S_0 e^{\eta L + \sigma \sqrt{\Delta t} \sum_{i=1}^T X_i},$$

gde je

$$\eta = \frac{1}{\Delta t} (p \log u + q \log d)$$

drift cene akcije, a

$$\sigma^2 = \frac{1}{\Delta t} pq (\log u - \log d)^2$$

disperzija cene akcije. Tada je

$$Y_T = \sum_{i=1}^T X_i,$$

gde su $X_i, i = 1, \dots, T$ nezavisne slučajne promenljive sa raspodelom

$$X_i : \begin{pmatrix} \frac{q}{\sqrt{pq}} & -\frac{p}{\sqrt{pq}} \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Primer 12.1 (Binomni model kretanja cena akcija) *Neka je početna cena akcije S_0 . Nakon jednog perioda, sa verovatnoćom $p \in (0, 1)$, cena akcije raste sa faktorom u (tj. cena akcije je jednaka $S_u := uS_0$), a sa verovatnoćom $q = 1 - p$, cena akcije opada sa faktorom d (cena akcije je tada $S_d := dS_0$). Neka je $ud = 1$.*

Nakon dva perioda, cena akcije može da poraste, a zatim opadne (to se dešava sa verovatnoćom pq) i nakon čega je jednaka $S_{ud} = dS_u = duS_0 = S_0$. Ili, cena akcije može da opadne, a zatim poraste (sa verovatnoćom pq) i u tom slučaju je jednaka

$$S_{du} = uS_d = udS_0 = S_0.$$

Ako cena akcije oba puta poraste (sa verovatnoćom p^2), nakon dva perioda će ona biti jednaka

$$S_{uu} = u^2 S_0,$$

a ako oba puta opadne, biće jednaka

$$S_{dd} = d^2 S_0.$$

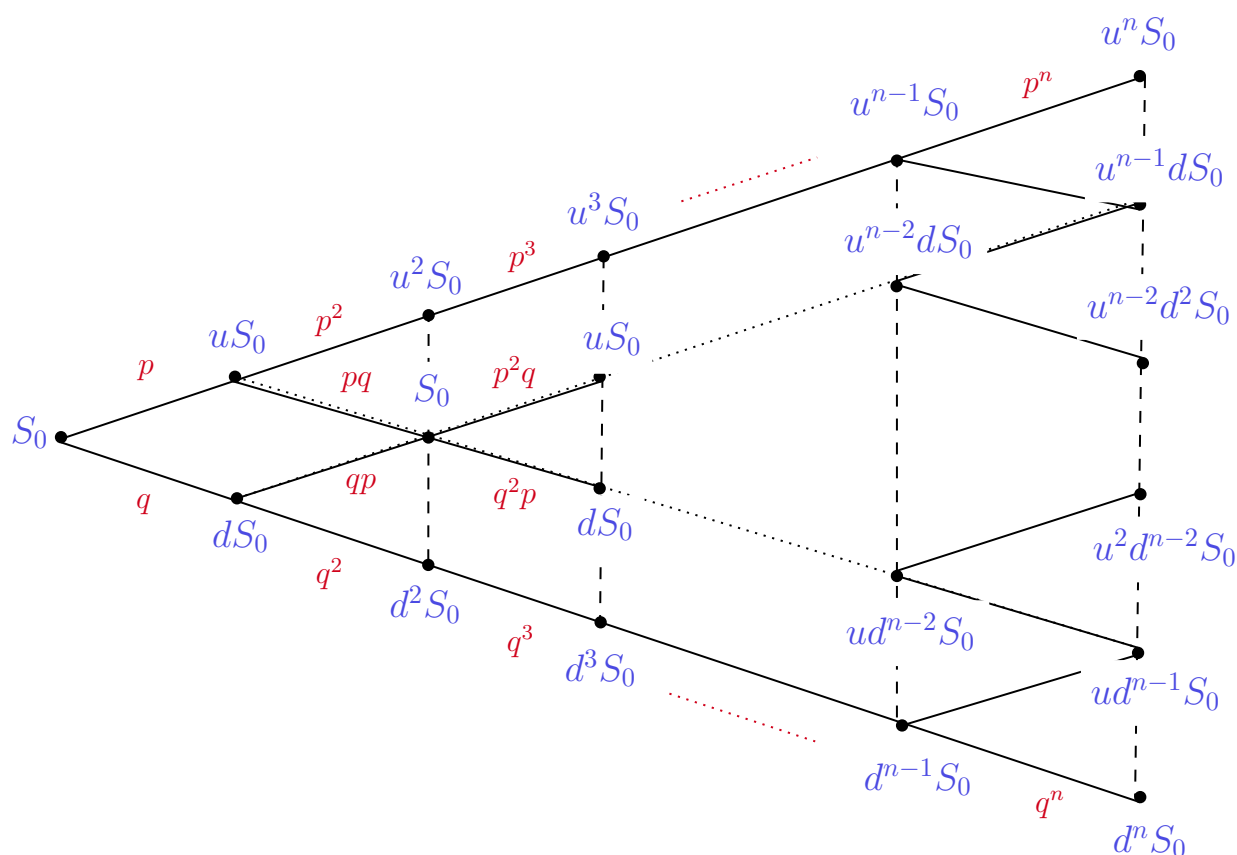
Ako sa S_n označimo cenu akcije nakon n -tog perioda, onda imamo

$$S_1 : \begin{pmatrix} uS_0 & dS_0 \\ p & q \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} u & d \\ p & q \end{pmatrix}, \quad S_2 : \begin{pmatrix} u^2 S_0 & udS_0 & d^2 S_0 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix} = S_0 \begin{pmatrix} u^2 & ud & d^2 \\ p^2 & 2pq & q^2 \end{pmatrix}.$$

Slično, nakon tri perioda imamo

$$S_3 : S_0 \begin{pmatrix} u^3 & u & d & d^2 \\ p^3 & 3p^2q & 3pq^2 & q^3 \end{pmatrix}.$$

Ovo se može predstaviti na takozvanom binomnom stablu koji opisuje kretanje cene akcije (videti Sliku 12.1).

Slika 12.1: Binomno stablo za n perioda

Primetimo,

$$E(S_2|S_1) : \begin{pmatrix} E(S_2|S_1 = uS_0) & E(S_2|S_1 = dS_0) \\ P\{S_1 = uS_0\} & P\{S_1 = dS_0\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu^2S_0 + qS_0 & pS_0 + qd^2S_0 \\ p & q \end{pmatrix},$$

jer važi

$$S_2|\{S_1 = uS_0\} : \begin{pmatrix} u^2S_0 & S_0 \\ p & q \end{pmatrix}, \quad S_2|\{S_1 = dS_0\} : \begin{pmatrix} S_0 & d^2S_0 \\ p & q \end{pmatrix}.$$

Uslovno očekivanje $E(S_2|S_1)$ je $\mathcal{F}(S_1)$ -merljiva slučajna promenljiva, što znači da postoji Borelova funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da

$$E(S_2|S_1) = f(S_1).$$

Kako je

$$E(S_2|S_1) = S_0(pu + qd) \begin{pmatrix} u & d \\ p & q \end{pmatrix} = (pu + qd)S_1,$$

imamo

$$f(x) = (pu + qd)x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slično, može se pokazati da važi

$$E(S_3|S_2) = (pu + qd)S_2, \quad E(S_3|S_1) = (pu + qd)^2S_1.$$

□

12.2 Cena akcije i Braunovo kretanje

Akcije su hartije od vrednosti koje su veoma popularne među investitorima jer im obezbeđuju visok profit. Međutim, velike promene u ceni akcija i nepredvidivnost kretanja cena akcija ih čine veoma rizičnom investicijom. Cilj svakog investitora je da minimizuje taj rizik, zbog čega postoji velika potreba za kvalitetnim modelima koji bi obezbedili bolje predviđanje budućih cena akcija i obezbedili investitorima pomoć prilikom donošenja odluka o tome koje akcije da prodaju, kupe ili zadrže. Iako se promena cene akcije može modelirati kao lanac Markova, ovaj metod je veoma neprecizan, što čini njegovo korišćenje veoma rizičnim. Po jednom od najpoznatijih modela koji se koriste za kratkoročno predviđanje budućih cena akcija, cena akcije prati geometrijsko Braunovo kretanje, o čemu će biti reči u nastavku.

Podsetimo se prvo definicije Braunovog kretanja sa driftom i volatilnošću.

Definicija 12.1 *Stohastički proces $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$ je Braunovo kretanje sa driftom η i volatilnošću σ ako važe uslovi:*

- 1) $\widetilde{W}_0 = 0$ skoro sigurno.
- 2) $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$ ima nezavisne priraštaje.
- 3) $\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s : \mathcal{N}(\eta(t-s), \sigma^2(t-s)), t \geq s \geq 0$.

Specijalno, za $\eta = 0$ i $\sigma^2 = 1$ dobijamo standardno Braunovo kretanje $\{W_t, t \geq 0\}$ i važi

$$\widetilde{W}_t = \eta t + \sigma W_t,$$

što sledi direktno iz definicije normalne raspodele, za $s = 0$.

12.2.1 Geometrijsko Braunovo kretanje

Ukoliko bismo posmatrali cenu akcije kao česticu koja je konstantno “bombardovana” manjim česticama u vidu transakcija, onda bi normalna raspodela, odnosno Braunovo kretanje bila razuman izbor za modelovanje cena akcije. Međutim, ukoliko bismo cenu akcije modelirali kao Braunovo kretanje, susreli bismo se nekim očiglednim problemima:

- Braunovo kretanje može biti negativno, dok cena akcije ne može biti negativna.
- Označimo sa S_t cenu akcije u trenutku t . Ako bi cena akcije u trenutku t bila jednaka $\widetilde{W}_t$, onda bi (na osnovu definicije) očekivana promena cene na intervalu $[s, t]$ bila jednaka

$$E(S_t - S_s) = E(\widetilde{W}_t - \widetilde{W}_s) = \eta(t - s).$$

To bi značilo da cena akcije ne zavisi od početne cene akcije u trenutku s , što nije realna pretpostavka.

Više smisla bi imalo modelirati stopu prinosa $\frac{S_t - S_0}{S_0}$ pomoću Braunovog kretanja, jer je ta veličina nezavisna od početne cene. Na primer, stopa prinosa koja je jednaka 10% opisuje i slučaj porasta cene sa 100\$ na 110\$, ali i slučaj porasta sa 1\$ na 1.1\$, nebitno od početne cene. Dakle, ovi problemi se mogu rešiti pretpostavkom da je cena akcije u trenutku t jednaka

$$S_t = S_0 e^{H_t},$$

gde je S_0 početna cena, a H_t logaritamski rast cene akcije. Tada bismo proces $\{H_t, t \geq 0\}$ modelirali Braunovim kretanjem $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$.

Definicija 12.2 Stohastički proces $\{e^{\widetilde{W}_t}, t \geq 0\}$, gde je $\{\widetilde{W}_t, t \geq 0\}$ Braunovo kretanje sa driftom η i volatilnošću σ , zove se geometrijsko Braunovo kretanje.

Modeliranjem cene akcije u trenutku t kao

$$S_t = S_0 e^{\widetilde{W}_t}$$

obebedili bismo nenegativnost cene akcije koja bi sada zavisila od početne cene akcije S_0 .

Ako pretpostavimo da je H_t Braunovo kretanje sa driftom η i volatilnošću σ , onda imamo

$$H_t = \log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \eta t + \sigma W_t,$$

gde je W_t standardno Braunovo kretanje ($\eta = 0$ i $\sigma^2 = 1$).

Dakle, $H_t = \log(\frac{S_t}{S_0})$ ima normalnu raspodelu takvu da važi

$$E(H_t) = E\left(\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = \eta t,$$

$$D(H_t) = D\left(\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right) = \sigma^2 t,$$

tj.

$$\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) : \mathcal{N}(\eta t, \sigma^2 t),$$

pa kažemo da $\frac{S_t}{S_0}$ ima log-normalnu raspodelu.

Koristeći da $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ ima normalnu raspodelu, možemo izračunati očekivanu cenu akcije u trenutku t . Naime, važi

$$\begin{aligned} E\left(\frac{S_t}{S_0}\right) &= E\left(e^{\log \frac{S_t}{S_0}}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^x \varphi_{\widetilde{W}_t}(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{(x-\eta t)^2}{2\sigma^2 t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\eta t + \sqrt{2t}\sigma a} e^{-a^2} \sqrt{2t}\sigma da \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a^2 - \sqrt{2t}\sigma a)} da = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\eta t + \frac{\sigma^2 t}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(a - \frac{\sqrt{2}}{2}t\sigma)^2} da \\ &= e^{\eta t + \frac{\sigma^2 t}{2}}, \end{aligned}$$

gde je $a = \frac{x-\eta t}{\sqrt{2t}\sigma}$ i

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(a - \frac{\sqrt{2}}{2}t\sigma)^2}, \quad a \in \mathbb{R},$$

je gustina raspodele slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(\frac{\sqrt{2}}{2}t\sigma, \frac{1}{2})$ raspodelom. Dakle, očekivana cena akcije u trenutku t je jednaka

$$E(S_t) = S_0 e^{\eta t + \frac{\sigma^2 t}{2}}.$$

Na sličan način se može pokazati da važi

$$D(S_t) = (S_0 e^{(\eta + \frac{\sigma^2}{2})t})^2 (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Napomena 12.1 Modeliranju cene akcije možemo pristupiti i na drugačiji način. Naime, stopa prinosa cene akcije u kratkom vremenskom intervalu $[t, t + \Delta t]$ je data sa

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} = \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}.$$

Ako $\Delta t \rightarrow 0$, tu stopa prinosa možemo posmatrati kao stopu prinosa u kratkom vremenskom periodu dt . Na taj način dobijamo trenutni prinos cene akcije koji označavamo sa $\frac{dS_t}{S_t}$. Ako pretpostavimo da je trenutni prinos cena akcija proces Braunovog kretanja, onda važi

$$\frac{dS_t}{S_t} = \eta dt + \sigma dW_t,$$

gde je W_t standardno Braunovo kretanje. To se može zapisati i na sledeći način:

$$dS_t = \eta S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

što je stohastička diferencijalna jednačina iz Primera 10.3 za koju smo već rekli da modelira promenu cene akcije.

12.3 Blek - Šolcova jednačina za cenu evropske opcije

Opcije su finansijski derivati koji omogućavaju osobi koja ih poseduje da kupi ili proda određenu imovinu po unapred određenoj ceni tokom nekog vremenskog perioda. Ako je opcija evropska, nju je moguće izvršiti samo na datum dospeća, dok se američke opcije mogu izvršiti bilo kada zaključno sa datumom dospeća.

Posmatramo problem određivanja vrednosti evropskih opcija u proizvoljnom vremenskom trenutku t pre trenutka dospeća T , ili specijalno, problem određivanja cene opcije koju treba platiti za pravo kupovine ili prodaje za unapred određenu cenu E koju garantuje data opcija. Označimo sa $V(S_t, t)$ vrednost opcije u trenutku t .

Specijalno, neka je:

- $C(S_t, t)$ vrednost kupovne opcije u trenutku t ,
- $P(S_t, t)$ vrednost prodajne opcije u trenutku t .

Pretpostavimo da cena akcije (ili neke druge aktive na koju se opcija odnosi) prati model geometrijskog Braunovog kretanja.

Dalje, označimo sa $\sigma(t)$ volatilnost cene akcije u trenutku t , a sa $r(t)$ nerizičnu kamatnu stopu u trenutku t , koja je poznata funkcija vremena u periodu dok važi opcija. Neka je pored toga:

- isključena mogućnost arbitraže[‡];
- aktiva na koju se odnosi opcija ne obezbeđuje dividendu;
- nema troškova transakcije;
- moguće je neprekidno trgovanje aktivom;

[‡]Arbitraža je mogućnost da se ostvari trenutni profit bez rizika sa početnim ulaganjem ili da se vremenom ostvari profit, ali bez ikakvih ulaganja.

- Finansijsko tržište je likvidno[§], a aktiva je deljiva[¶] što znači da je u svakom trenutku moguće trgovati sa delom akcije;
- volatilnost je konstantna tokom vremena i poznata je^{||};
- nerizična kamatna stopa je konstantna i poznata;
- dozvoljena je kratka prodaja (eng. *short selling*) koja predstavlja pozajmljivanje hartija od vrednosti za koje se očekuje da će im cena pasti i da će se prodati na berzi, sa idejom da se kasnije te iste hartije od vrednosti kupe po nižoj ceni.

Ako je na datum dospeća cena akcije S_t veća od unapred određene cene ($S_T > E$), onda će se kupovna opcija izvršiti, a ako je $S_T < E$, tada se kupovna opcija neće izvršiti.

Funkcija prihoda za kupovnu opciju u momentu T je

$$C(S_T, T) = \max\{S_T - E, 0\},$$

a za prodajnu je

$$P(S_T, T) = \max\{E - S_T, 0\}.$$

Vrednost opcije $V(S_t, t)$ je funkcija od t , a S_t prati model geometrijskog Braunovog kretanja, tj.

$$dS_t = \eta S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

pa možemo primeniti Itovu formulu da bismo izračunali

$$dV(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} dS_t dS_t = \frac{\partial V}{\partial S_t} (\eta S_t dt + \sigma S_t dW_t) + \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt.$$

Dobijamo stohastičku diferencijalnu jednačinu za proces $V(S_t, t)$,

$$dV(S_t, t) = \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \left(\eta S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (12.1)$$

Sada konstruišemo portfolio (skup svih različitih vrednosnih papira) koji se sastoji od jedne opcije i $-\Delta$ akcija. Broj $-\Delta$ je trenutno nepoznat, ali smatramo da je konstantan u kratkim vremenskim intervalima dužine dt (iako, što ćemo pokazati, ta konstantnost zavisi od S_t i t). Vrednost ovakvog portfolija u trenutku t je π_t , gde

$$\pi_t = V(S_t, t) - \Delta S_t. \quad (12.2)$$

Pokazaćemo da je promena vrednosti ovog portfolija u vremenskom periodu dužine dt jednaka

$$d\pi_t = dV(S_t, t) - \Delta dS_t.$$

Koristeći da S_t prati model geometrijskog Braunovog kretanja i formulu (12.1) dobijamo stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$\begin{aligned} d\pi_t &= \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} dW_t + \left(\eta S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt - \Delta (\eta S_t dt + \sigma S_t dW_t) \\ &= \sigma S_t \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} - \Delta \right) dW_t + \left(\eta S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 - \Delta \eta S_t \right) dt. \end{aligned}$$

[§]Finansijsko tržište je likvidno ako je u svakom trenutku moguće kupiti ili prodati finansijske instrumente bez uticaja na njihovu cenu.

[¶]Aktiva je nedeljiva ako se ne može podeliti bez gubitka funkcionalnosti ili vrednosti.

^{||}Ova pretpostavka je slaba tačka modela jer u realnom svetu volatilnost nije ni konstantna, ni poznata, a ima veliki uticaj na cenu opcije.

Vidimo da je izraz za $d\pi_t$ jasno podeljen na dva dela, slučajni i deterministički. Cilj svakog investitora je da formira portfolio koji bi ga zaštitio od rizika ili ga bar minimizovao. Ako izaberemo $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, neutralisaćemo slučajni (stohastički) faktor iz prethodne formule. U tom slučaju dobijamo

$$d\pi_t = \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt. \quad (12.3)$$

Znamo da, ako bi svota novca jednaka vrednosti π_t bila investirana u banci po nerizičnoj kamatnoj stopi $r(t)$, dovela bi do prinosa

$$d\pi_t = r\pi_t dt$$

u vremenskom intervalu dužine dt . Pošto smo isključili mogućnost arbitraže, sledi da desna strana jednačine (12.3) mora biti, takođe jednaka $r\pi_t dt$. Dakle,

$$r\pi_t dt = \left(\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt.$$

Kombinovanjem ove jednačine sa (12.2) i zamenom oznake S_t sa X , dobijamo čuvenu Blek - Šolcovu** stohastičku diferencijalnu jednačinu,

$$\frac{\partial V(X, t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X^2} + rX \frac{\partial V(X, t)}{\partial X} - rV(X, t) = 0. \quad (12.4)$$

Još treba primetiti da Blek - Šolcova jednačina zavisi od volatilnosti σ , a ne od drifta η . To znači da vrednost opcije ne zavisi od brzine promene cene aktive nego od nestabilnosti (tj. volatilnosti) cena. Jednačina (12.4) je jedna linearna parcijalna diferencijalna jednačina paraboličnog tipa. Da bi njeno rešenje (vrednost opcije) bilo jedinstveno određeno, potrebno je definisati granične uslove. Granični uslovi su ti koji karakterišu tip evropske opcije (prodajne ili kupovne).

Potražimo granične uslove za evropske kupovne opcije. Podsetimo se, njihovu vrednost označavamo sa $C(S_t, t)$, odnosno $C(X, t)$.

Imamo sledeće uslove:

1. U momentu dospeća $t = T$, vrednost opcije mora biti jednaka prihodu koji ona donosi, tj. finalni uslov po vremenskoj promenljivoj je

$$C(S_T, T) = \max\{S_T - E, 0\},$$

ili

$$C(X, T) = \max\{X - E, 0\}.$$

2. Prvi granični uslov po prostornoj promenljivoj (koja predstavlja cenu aktive u vremenu t) dobijamo kada stavimo $X = 0$, tj. $S_t = 0$. Ako je u bilo kom vremenskom trenutku cena akcije jednaka nuli, onda na osnovu

$$\frac{dS_t}{S_t} = \eta dt + \sigma dW_t,$$

dolazimo do zaključka da je i dS_t jednako nuli, što znači da cena akcije ne može da se menja. Ovo je ujedno i jedini deterministički slučaj gornje jednakosti. Dakle, u trenutku dospeća, cena akcije je nula, a kako je prihod na bezvrednu akciju nula, sledi da je

$$C(0, t) = 0.$$

**eng. *Black-Scholes*

3. Drugi granični uslov po prostornoj promenljivoj dobijamo ako $X \rightarrow \infty$, odnosno, cena akcija neograničeno raste. U ovom slučaju opcija će se sigurno izvršiti (bez obzira na cenu E). Zato je njena vrednost jednaka

$$C(X, t) \rightarrow X - Ee^{-r(T-t)}, \quad X \rightarrow \infty.$$

Dakle, uslovi za evropske kupovne opcije su:

1. $C(X, T) = \max\{X - E, 0\}$,
2. $C(0, t) = 0$,
3. $C(X, t) \rightarrow X - Ee^{-r(T-t)}, \quad X \rightarrow \infty$.

Sada tražimo finalni i granične uslove za evropske prodajne opcije. Njihovu vrednost označavamo sa $P(S_t, t)$, odnosno sa $P(X, t)$.

1. U momentu despeća $t = T$ je

$$P(X, T) = \max\{E - X, 0\}.$$

2. Ako je $X = 0$, odnosno $S_t = 0$, onda, kao što je već objašnjeno, cena akcije ostaje nula u svakom vremenskom trenutku, pa je konačan prihod u momentu T jednak E . Da bismo dobili $P(0, t)$ u proizvoljnom vremenskom trenutku, diskontujemo po kamatnoj stopi r , pa dobijamo

$$P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}.$$

3. Ako $X \rightarrow \infty$, odnosno, ako cena akcije neograničeno raste, onda se prodajna opcija nikada neće izvršiti, pa je zbog toga

$$P(X, T) \rightarrow 0, \quad X \rightarrow \infty.$$

Dakle, finalni i granični uslovi za evropske prodajne opcije su:

1. $P(X, T) = \max\{E - X, 0\}$,
2. $P(0, t) = Ee^{-r(T-t)}$,
3. $P(X, t) \rightarrow 0, \quad X \rightarrow \infty$.

Blek - Šolcova jednačina sa datim graničnim uslovima se pogodnim smenama može transformisati u jednačinu provođenja toplote

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (12.5)$$

Naime, pomoću smena

$$y = \ln\left(\frac{X}{E}\right), \quad \tau = T - t \in [0, T], \quad Z(y, \tau) = V(Ee^y, T - \tau)$$

Blek - Šolcovu jednačinu (12.4) svodimo na parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right) \frac{\partial Z}{\partial y} + rZ = 0$$

sa početnim uslovom

$$Z(y, 0) = V(Ee^y, T).$$

Dalje, definišemo funkciju

$$u(y, t) = e^{\alpha y + \beta \tau} Z(y, \tau),$$

pri čemu se konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ biraju tako da u zadovoljava jednačinu provođenja toplote (12.5), i dobijamo

$$\alpha = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{8} + \frac{r^2}{2\sigma^2}.$$

Konačno, rešenje ovog problema je dato sa

$$u(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(s) e^{-\frac{(y-s)^2}{4\tau}} ds.$$

Rešavanjem integrala i vraćanjem smena dobija se traženo rešenje (tj. vrednost evropske kupovne opcije). Slično se radi i za evropsku prodajnu opciju, ili se koristi prodajno-kupovni ili *put-call* paritet^{††}.

Rešenja Blek - Šolcove jednačine za evropske opcije su

$$\begin{aligned} C(S_t, t) &= S_t \Phi(d_1) - E e^{-r(T-t)} \Phi(d_2), \\ P(S_t, t) &= E e^{-r(T-t)} \Phi(-d_2) - S_t \Phi(-d_1), \end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S_t}{E}\right) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \end{aligned}$$

i $\Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, predstavlja funkciju raspodele slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom.

Linearnost Blek - Šolcove jednačine garantuje da možemo izračunati vrednosti čitavih portfolija opcija (a ne samo jedne) kao linearnu kombinaciju vrednosti kupovnih i prodajnih opcija. Blek - Šolcova jednačina se rešava i za opcije sa proizvoljnom funkcijom prihoda $\Lambda(S_T)$, pa se sličnim postupkom dobija rešenje u obliku

$$V(S_t, t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty \Lambda(x) \exp\left(-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{S_t}\right) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)^2}{2\sigma^2(T-t)}\right) \frac{dx}{x}.$$

^{††} *Put-call* paritet je formula koja daje vezu između cene evropske kupovne i prodajne opcije.

12.3.1 Blek - Šolcova jednačina za evropske opcije sa dividendama

Neke vrste aktiva kao što su, npr. državne hartije od vrednosti i obične akcije, isplaćuju svojim vlasnicima dividende. Ako želimo da izračunamo vrednost opcija koje se odnose na ovakvu vrstu aktiva, potrebno je modifikovati Blek - Šolcov model. Dividende se mogu isplaćivati u diskretnim vremenskim trenucima, kao npr. kod akcija, a može se vršiti i neprekidno isplaćivanje, kao npr. za inostrane valute. Svota novca koja se isplaćuje može biti deterministička ili stohastička. Prinos od dividendi se definiše kao deo cene akcije (aktive) koji se isplaćuje po jedinici vremena (u procentima).

Konstantni prinos od dividendi

Najjednostavnija modifikacija Blek - Šolcove jednačine se dobija kada se pretpostavi da za vreme dt akcija isplaćuje dividendu jednaku svoti novca $D_0 S_t dt$, gde je D_0 konstanta. Ova svota novca u suštini ne zavisi direktno od t , ali zavisi od cene akcije u trenutku t , tj. od S_t . U ovom slučaju je prinos od dividende konstantan i iznosi D_0 . Isplaćivanje dividendi ima efekta na cenu akcije (što u potpunosti odgovara hipotezi da tržište momentalno reaguje na sve promene i nove informacije). Isplaćivanje dividendi rezultuje padom cene akcije, pored svih ostalih fluktuacija. Zbog toga je potrebno modifikovati Blek - Šolcov model tako što ćemo najpre modifikovati model geometrijskog Braunovog kretanja po kome se ponaša cena akcije.

Prinos cene akcije je sada

$$dS_t = (\eta - D_0)S_t dt + \sigma S_t dW_t.$$

Takođe se menja i vrednost portfolija iz Blek - Šolc analize pošto dobijamo $D_0 S_t dt$ novca po akciji, a imamo $-\Delta$ akcija, pa se vrednost portfolija menja za svotu $-\Delta D_0 S_t dt$.

Dakle, sada imamo

$$d\pi_t = dV - \Delta dS_t - \Delta D_0 S_t dt.$$

Sa svim ovim promenama, Blek - Šolcova jednačina postaje

$$\frac{\partial V(X, t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X^2 \frac{\partial^2 V(X, t)}{\partial X^2} + (r - D_0)X \frac{\partial V(X, t)}{\partial X} - rV(X, t) = 0.$$

Prva dva uslova za kupovnu opciju

1. $C(X, T) = \max\{X - E, 0\}$,
2. $C(0, t) = 0$

ostaju ista i u slučaju sa dividendama. Međutim, poslednji se menja. Kada cena akcije neograničeno raste, opcija će se sigurno izvršiti, tj. kupiće se akcije, i onda opcija postaje ekvivalentna akciji, ali bez prinosa od dividende. Sada imamo

3. $C(X, t) \rightarrow X e^{-D_0(T-t)}, \quad X \rightarrow \infty.$

U suprotnom bi postojala mogućnost arbitraže.

Smenom

$$C(x, t) = e^{-D_0(T-t)} C_1(x, t),$$

dobija se da $C_1(x, t)$ zadovoljava Blek - Šolcovu jednačinu u kojoj umesto r imamo $r - D_0$, i sa istim graničnim uslovima kao za kupovne opcije bez dividendi.

Dakle, vrednost $C_1(x, t)$ je ista kao za opcije bez dividendi sa kamatnom stopom $r - D_0$. Odavde se može dobiti rešenje Blek - Šolcove jednačine za opcije sa dividendama i rešenje je oblika

$$C(S_t, t) = e^{-D_0(T-t)} S_t \Phi(d_{1_0}) - E e^{-r(T-t)} \Phi(d_{2_0}),$$

gde su

$$d_{1_0} = \frac{\ln(\frac{S_t}{E}) + (r - D_0 + \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}$$

i

$$d_{2_0} = \frac{\ln(\frac{S_t}{E}) + (r - D_0 - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = d_{1_0} - \sigma\sqrt{T - t}.$$

Dividende smanjuju vrednost opcije. Isplata dividendi ima efekat da smanji vrednost kupovne opcije, jer vlasnik ne dobija dividendu. Primenom *put-call* pariteta dobija se vrednost prodajne opcije sa dividendama.

Diskretan prinos od dividendi

Pretpostavićemo da se dividenda isplaćuje jednom za vreme trajanja opcije i to u trenutku $t = t_d$, i da je stopa prinosa od dividende poznata konstanta d_y .

Označimo sa t_{d-} momenat neposredno pre isplate dividende, a sa t_{d+} momenat odmah nakon isplate dividende. To znači da akcionari u trenutku t_d dobijaju

$$d_y S_{t_{d-}}$$

novca od dividende. Takođe, dividenda ima efekat takav da cena akcije pada za onaj procenat svoje vrednosti koliko iznosi dividenda. Ako cena akcije ne bi padala, mogli bismo u trenutku t_d kupiti akciju, pokupiti dividendu i odmah prodati akciju i na taj način napraviti arbitražu. Zato je

$$S_{t_{d+}} = S_{t_{d-}} - d_y S_{t_{d-}} = (1 - d_y) S_{t_{d-}}.$$

U vremenskim trenucima t_d vrednost opcije se menja zbog slučajnog kretanja cene akcije, a te promene su neprekidne po t jer su trajektorije Braunovog kretanja neprekidne.

U trenutku isplate dividende $t = t_d$, vrednost opcije ima skok, ali vrednost opcije mora imati neprekidan prelaz po vremenu jer bi inače postojala mogućnost za arbitražu (vlasnik opcije ne dobija dividendu)

$$V(S_{t_{d+}}, t_{d-}) = V(S_{t_{d-}}, t_{d-}).$$

Kombinujemo ovu jednačinu sa prethodnom i stavljamo $S_t = X$, pa dobijamo

$$V(X, t_{d-}) = V((1 - d_y)X, t_{d-}).$$

Ovaj uslov tvrdi da vrednost opcije V mora biti neprekidna za svako t , i to za svaku realizaciju procesa S_t (za svako fiksirano X), ali ima skok po X u trenutku $t = t_d$.

Vrednost opcije sa dividendama se računa na sledeći način.

Označimo sa $C_d(X, t)$ vrednost kupovne opcije sa dividendama, a sa $C(X, t; E)$ vrednost kupovne opcije bez dividendi sa ugovorenim (strajk) cenom E .

1. Prvo se rešava Blek - Šolcova jednačina unazad od trenutka dospeća T do trenutka t_{d+} sa poznatim graničnim uslovima. To znači da je

$$C_d(X, t) = C(Z, t; E), \quad t_{d+} \leq t \leq T.$$

2. Zatim se koristi uslov skoka u trenutku $t = t_d$ da bi se odredila vrednost opcije u trenutku $t = t_{d-}$. Dakle,

$$C_d(X, t_{d-}) = C_d((1 - d_y)X, t_{d+}) = C((1 - d_y)X, t_{d+}; E).$$

3. Rešava se Blek - Šolcova jednačina unazad do trenutka t_{d-} kao datumom dospeća, i graničnim uslovom dobijenim u drugom koraku. Kako smo u drugom koraku dobili funkciju

$$C((1 - d_y)X, t_{d+}; E),$$

u kojoj je promenljiva X pomnožena skalarom, a Blek - Šolcova jednačina je linearna, sledi da je i $C((1 - d_y)X, t_{d+}; E)$ rešenje Blek - Šolcove jednačine.

Pošto je to ujedno jednako vrednosti opcije u trenutku t_{d-} , onda je jednako i vrednosti opcije u svakom trenutku pre t_{d-} . Dakle,

$$C_d(X, t) = C((1 - d_y)X, t, E) = (1 - d_y)C\left(X, t, \frac{E}{1 - d_y}\right), \quad t_0 \leq t \leq t_{d-}.$$

LITERATURA

- [1] H. Bauer, *Probability theory*, Berlin, Germany and New York, NY: de Gruyter, 1996.
- [2] D. Bertsekas, J.N. Tsitsiklis, *Introduction to probability* (Vol. 1), Athena Scientific, 2008.
- [3] Z. Brzeźniak, T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes: a course through exercises*, Springer, 2005.
- [4] I. Bošnjak, Z. Stojaković, *Elementi linearne algebre*, Symbol, Novi Sad, 2010.
- [5] J. Doob, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] L.C. Evans, *An introduction to stochastic differential equations*, American Mathematical Soc., 2012.
- [7] W. Farida Agustini, I. R. Affianti, E. R. Putri, *Stock price prediction using geometric Brownian motion*, Journal of physics: conference series. Vol. 974. IOP Publishing, 2018.
- [8] S. Gentili, *Measure, integration and a primer on probability theory*, Suiza: Springer, 2020.
- [9] O. Hadžić, *Odabrane metode teorije verovatnoće*, Novi Sad, 1990.
- [10] K. Itô, *Introduction to Probability Theory*, Cambridge University Press, 1984.
- [11] Z. Ivković, *Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku*, Građevinska knjiga, Beograd, 1972.
- [12] Klenke, A., *Probability theory– A comprehensive course (2nd ed.)*, London, UK: Springer, 2013.
- [13] V.G. Kulkarni, *Modeling and analysis of stochastic systems*, Chapman and Hall/CRC, 2016.
- [14] M. Lefebvre, *Applied stochastic processes*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [15] M. Loève, *Probability theory I, 4th Edition*, Springer-Verlag, 1977.
- [16] J. Mališić, *Slučajni procesi: teorija i primene*, Građevinska knjiga, 1989.
- [17] T. Marco, *Conditional probability with respect to a sigma-algebra*, Lectures on probability theory and mathematical statistics. Kindle Direct Publishing, 2021.
- [18] M. Musiela, M. Rutkowski, *Martingale methods in financial modelling* (Vol. 36), Springer Science & Business Media, 2006.

-
- [19] D. Rajter-Ćirić, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, 2009.
 - [20] S. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 9th edition, 2007.
 - [21] R. Steyer, W. Nagel, *Probability and conditional expectation: Fundamentals for the empirical sciences*, (Vol. 5). John Wiley & Sons, 2017.
 - [22] R. Yates, D. Goodman, *Probability and Stochastic Processes: A Friendly Introduction for Electrical and Computer Engineers*, John Wiley & Sons, 2014.

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Biblioteka Matice srpske, Novi Sad

519.21(075.8)

RAJTER-Ćirić, Danijela, 1973-

Stohastička analiza sa primerima [Elektronski izvor]: udžbenik namenjen studentima koji slušaju kurs Stohastička analiza / Danijela Rajter-Ćirić, Sanja Ružičić. - Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet, 2025

Način pristupa (URL):

https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/rajter_ciric_ruzicic_stohasticka_analiza_sa_primerima.pdf. - Opis zasnovan na stanju na dan 25.12.2025. - Nasl. sa naslovnog ekrana. - Bibliografija.

ISBN 978-86-7031-684-3

1. Ružičić, Sanja, 1991-
a) Stohastička analiza

COBISS.SR-ID 183525385

Odlukom nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu 23. decembra 2025. godine, odobreno je publikovanje i upotreba ovog udžbenika.