**Природно-математички факултет**
Универзитет у Новом Саду

Трг Доситеја Обрадовића 3, 21000 Нови Сад, Србија
**тел** 021.455.630 **факс** 021.455.662 **e-mail** dekan@pmf.uns.ac.rs **web** www.pmf.uns.ac.rs
**ПИБ** 101635863 **МБ** 08104620

Небојша Мудрински

# ЛИНЕАРНА АЛГЕБРА

2023

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

512(075.8)

**МУДРИНСКИ, Небојша, 1978-**
Линеарна алгебра [Електронски извор] / Небојша Мудрински. - Нови Сад : Природно-математички факултет, 2023

Начин приступа (URL):
https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/mudrinski_linearna_algebra.pdf. - Опис заснован на стању на дан 27.6.2023. - Насл. са насловног екрана. - Библиографија.

ISBN 978-86-7031-487-0

а) Алгебра

COBISS.SR-ID 119387657

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР

Ова књига је писана према предавањима које је аутор држао из предмета Линеарна алгебра за студенте математике прве године разних смерова. Свакако је могу користити и остали студенти који слушају неки предмет са уводним садржајем из линеарне алгебре. Изложени материјал по деловима је на сличан начин представљен у многим другим књигама из линеарне алгебре, па и алгебре уопште као што су [1], [3], [8], [9],[10], [11], али је овде прилагођен плану и програму курса Линеарна алгебра из 2018. године Департмана за математику и информатику Природно-математичког факултета у Новом Саду. Ради лакшег читања и бољег разумевања па и усвајања изложених појмова претпоставља се да читалац већ добро влада правилима закључивања математичке логике, наивном теоријом скупова, релацијама, а посебно релацијама еквиваленције као и појмом функције, сирјекције, инјекције и бијекције као и њиховим особинама у вези са композицијом и инверзном функцијом. За оне који желе да се најпре подсете ових појмова или их учврсте препоручујемо [2], [4], [5], [6], [7], [12], [13].

Нови Сад, 22.2.2022. Небојша Мудрински

Глава 1

# ДЕТЕРМИНАНТЕ И СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА

## 1.1 Детерминанте

### 1.1.1 О пермутацијама

Дефиниција 1.1 Бијекција коначног скупа у себе самог назива се пермутација.

Пример: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ је једна пермутација скупа $\{1,2,3\}$. Ову пермутацију можемо записати и као $[\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3)]$.

Пермутације ћемо означавати малим грчким словима. У наставку ћемо радити са пермутацијама на скупу $\{1,\ldots,n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Као у претходном примеру користимо и запис $[\varphi(1),\ldots,\varphi(n)]$. Скуп свих пермутација на скупу $\{1,\ldots,n\}$ означавамо са $S_n$. Посебно место међу пермутацијама имају транспозиције.

Дефиниција 1.2 Пресликавање $\tau : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ такво да је

$$\tau(x) = \begin{cases} j, & x = i \\ i, & x = j \\ x, & x \neq i,j \end{cases}$$

за неке $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ назива се транспозиција.

Напомена: У претходној дефиницији транспозицију $\tau$ зовемо и транспозиција која размењује $i$ и $j$.

Дефиниција 1.3 Ако су $i, j, n \in \mathbb{N}$ и $i < j$, а за пермутацију $\pi$ на $\{1, \ldots, n\}$ је $\pi(i) > \pi(j)$, онда пар $(\pi(i), \pi(j))$ чини инверзију пермутације $\pi$. Број инверзија неке пермутације $\sigma$ означавамо са $Inv\,\sigma$. Уколико је $Inv\,\sigma$ паран број кажемо да је $\sigma$ парна, иначе је $\sigma$ непарна пермутација.

Пример: У пермутацији $\varphi$ из претходног примера парови $(\varphi(1), \varphi(3))$ и $(\varphi(2), \varphi(3))$ чине инверзију, а пар $(\varphi(1), \varphi(2))$ не. Зато је $Inv\,\varphi = 2$, па је $\varphi$ парна пермутација.

Теорема 1.1 Нека је $\sigma$ пермутација скупа $\{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Тада је $(-1)^{Inv\,\sigma} = \Pi_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Доказ: У производу разломака са десне стране наведене једнакости, све разлике које се појављују у имениоцима се појављују и у бројиоцима, у евентуално промењеном редоследу, и са евентуално промењеним знаком и та промена знака се јавља тачно тамо где пар $(\sigma(i), \sigma(j))$ чини инверзију.

Теорема 1.2 Нека је $\sigma$ пермутација скупа $\{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\tau$ транспозиција тог скупа. Тада је $(-1)^{Inv\,\sigma} = -(-1)^{Inv\,\tau\circ\sigma}$.

Доказ: Нека транспозиција $\tau$ размењује $k$ и $\ell$, где је $k < \ell$. У изразу $\Pi_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ за $m < k$ транспозиција $\tau$ не мења производ разломака $\frac{\sigma(m)-\sigma(k)}{m-k}$ и $\frac{\sigma(m)-\sigma(\ell)}{m-\ell}$. Аналогно за $\ell < m$, $\tau$ не мења производ разломака $\frac{\sigma(\ell)-\sigma(m)}{\ell-m}$ и $\frac{\sigma(k)-\sigma(m)}{k-m}$. Даље, за свако $m$ за које је $k < m < \ell$ производ разломака $\frac{\sigma(k)-\sigma(m)}{k-m}$ и $\frac{\sigma(m)-\sigma(\ell)}{m-\ell}$, остаје непромењен. Најзад разломак $\frac{\sigma(k)-\sigma(\ell)}{k-\ell}$ мења знак и то доводи до промене знака производа $\Pi_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ после примене транспозиције $\tau$.

Напомена: Из претходне теореме стављајући $\sigma = \tau$ добијамо да је транспозиција непарна пермутација.

Теорема 1.3 Нека је $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тада су $\sigma$ и $\sigma^{-1}$ исте парности.

Доказ: Нека је $\sigma(i) = k$ и $\sigma(j) = \ell$, за неке $i \neq j$ и $k \neq \ell$. Тада је $\sigma^{-1}(k) = i$ и $\sigma^{-1}(\ell) = j$. Сада је

$$(-1)^{Inv\,\sigma} = \Pi_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$$

$$= \Pi_{1\leq k<\ell\leq n}\frac{k-\ell}{\sigma^{-1}(k)-\sigma^{-1}(\ell)}$$

$$= \Pi_{1\leq k<\ell\leq n}\frac{\sigma^{-1}(k)-\sigma^{-1}(\ell)}{k-\ell}$$

$$= (-1)^{Inv\,\sigma^{-1}}.$$

Зато су $\sigma$ и $\sigma^{-1}$ исте парности.

Теорема 1.4 Нека је $\sigma \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ако је $\sigma(1) = k$ за $k \in \{1,\ldots,n\}$, онда је $Inv\,\sigma = k-1+Inv\,[\sigma(2),\ldots,\sigma(n)]$.

Доказ: За дато $\sigma$ видимо да пар $(\sigma(1),\sigma(j)) = (k,\sigma(j))$ образује инверзију за све $\sigma(j) \in \{1,\ldots,k-1\}$.

### 1.1.2 Дефиниција детерминанте

Дефиниција 1.4 Нека $n \in \mathbb{N}$. Тада се за реалне (комплексне) бројеве $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{nn}$ број

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma_{\pi\in S_n}(-1)^{Inv\,\pi}a_{1\pi(1)}\ldots a_{n\pi(n)}$$

назива детерминанта реда $n$ над елементима $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$, $a_{21}, \ldots, a_{nn}$. Бројеви $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ чине $i$-ту врсту, а бројеви $a_{1i}, \ldots$, $a_{ni}$ $i$-ту колону за свако $i \in \{1,\ldots,n\}$. Елементи $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ чине главну дијагоналу, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ споредну дијагоналу.

Размотримо детерминанте реда два и три. За $n = 2$ имамо укупно две пермутације на скупу $\{1,2\}$, а то су идентичко пресликавање $I$ која је парна и транспозиција $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ која је непарна пермутација. Зато је $S_2 = \{I, \tau\}$, па добијамо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Sigma_{\pi \in S_2} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)}$$

$$= (-1)^{Inv\,I} a_{1I(1)} a_{2I(2)} + (-1)^{Inv\,\tau} a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Заиста, детерминанту реда два рачунамо као разлику производа елемената на главној и споредној дијагонали.

За $n = 3$ имамо укупно 6 пермутација на скупу $\{1, 2, 3\}$, а то су три парне: $I$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ и $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ као и три непарне пермутације: $\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Зато је $S_3 = \{I, \sigma, \sigma^{-1}, \iota, \lambda, \kappa\}$, па добијамо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Sigma_{\pi \in S_3} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} a_{3\pi(3)}$$

$$= (-1)^{Inv\,I} a_{1I(1)} a_{2I(2)} a_{3I(3)} + (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)}$$

$$+ (-1)^{Inv\,\sigma^{-1}} a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} a_{3\sigma^{-1}(3)}$$

$$+ (-1)^{Inv\,\iota} a_{1\iota(1)} a_{2\iota(2)} a_{3\iota(3)} + (-1)^{Inv\,\lambda} a_{1\lambda(1)} a_{2\lambda(2)} a_{3\lambda(3)}$$

$$+ (-1)^{Inv\,\kappa} a_{1\kappa(1)} a_{2\kappa(2)} a_{3\kappa(3)}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Израз за рачунање детерминанте реда три познатији је као Сарусово правило које каже да се детерминанта реда три израчунава тако што се са десне стране допишу редом прве две колоне и онда се од производа елемената на главној и њој двема паралелним дијагоналама одузимају производи елемената на споредној и њој двема паралелним дијагоналама. Аналогно се дефинише Сарусово правило када се детерминанти допишу испод прве две врсте.

Напомена: Сарусовим правилом се не могу израчунавати детерминанте реда већег од три, па зато разматрамо особине детерминанти које дајемо у наставку.

### 1.1.3 Особине детерминанти

Теорема 1.5 Детерминанта се не мења ако врсте и колоне међусобно замене места.

Доказ: Покажимо да је

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где је $b_{ij} = a_{ji}$, за све $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Сада користећи особину да пермутација и њој инверзна имају исту парност и комутативност за множење реалних (комплексних) бројева добијамо:

$\Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} b_{1\pi(1)} \dots b_{n\pi(n)}$
$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{\pi(1)1} \dots a_{\pi(n)n}$
$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi^{-1}(1)} \dots a_{n\pi^{-1}(n)}$
$= \Sigma_{\pi^{-1} \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi^{-1}} a_{1\pi^{-1}(1)} \dots a_{n\pi^{-1}(n)}$.

Пример: Користећи Сарусово правило можемо проверити да је

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right. = 0 + 0 + 8 - 12 - 6 - 0 = -10,$$

али и

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{matrix} = 0 + 8 + 0 - 12 - 6 - 0 = -10.$$

Напомена: Због претходне теореме можемо надаље све особине детерминанти формулисати само за врсте, а аналогони важе за колоне. У доказу претходне теореме користили смо $S_n = \{\sigma^{-1} \,|\, \sigma \in S_n\}$, а у доказу наредне теореме користимо да је $S_n = \{\tau \circ \pi \,|\, \pi \in S_n\}$ за произвољну транспозицију $\tau$. Обе тврдње важе због особина композиције функција и бијекција.

Теорема 1.6 Замена места двеју врста детерминанте мења знак детерминанте.

Доказ: Покажимо да је

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где је за неке $i, j \in \{1, \dots, n\}$ испуњено $b_{ik} = a_{jk}$ и $b_{jk} = a_{ik}$ , за све $k \in \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Нека је транспозиција $\tau : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ таква да је

$$\tau(x) = \begin{cases} j, & x = i \\ i, & x = j \\ x, & x \neq i, j \end{cases}$$

Сада користећи особину да пермутација и са транспозицијом компонована та пермутација имају различиту парност и комутативност за множење реалних (комплексних) бројева добијамо:

$$\Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} b_{1\pi(1)} \dots b_{i\pi(i)} \dots b_{j\pi(j)} \dots b_{n\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{j\pi(i)} \dots a_{i\pi(j)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{j\tau\circ\pi(j)} \dots a_{i\tau\circ\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\tau\circ\pi(1)} \dots a_{j\tau\circ\pi(j)} \dots a_{i\tau\circ\pi(i)} \dots a_{n\tau\circ\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} - (-1)^{Inv\,\tau\circ\pi} a_{1\tau\circ\pi(1)} \dots a_{j\tau\circ\pi(j)} \dots a_{i\tau\circ\pi(i)} \dots a_{n\tau\circ\pi(n)}$$

$$= -\Sigma_{\tau\circ\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\tau\circ\pi} a_{1\tau\circ\pi(1)} \dots a_{i\tau\circ\pi(i)} \dots a_{j\tau\circ\pi(j)} \dots a_{n\tau\circ\pi(n)}.$$

Пример: Користећи Сарусово правило рачунамо

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -10,$$

али је после замене места прве и друге врсте

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 10.$$

Теорема 1.7 Ако детерминанта има две једнаке врсте онда је она једнака нули.

Доказ: На основу претходне теореме та детерминанта је једнака себи самој са промењеним знаком јер замена те две једнаке врсте не мења распоред врста уствари, па мора бити нула јер је то једини број који је једнак свом супротном броју.

Теорема 1.8 Ако су сви елементи једне врсте детерминанте једнаки нули онда је и сама детерминанта нула.

Доказ: Нека су у $i$-тој врсти сви елементи нула, за неко $i \in \{1, \dots, n\}$, где је $n \in \mathbb{N}$ ред посматране детерминанте. Тада је за свако $\pi \in S_n$ производ $(-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)} = 0$, јер је $a_{i\pi(i)} = 0$. Како је та детерминанта уствари сума оваквих производа то је она збир нула па је нула.

Теорема 1.9 Ако све елементе једне врсте неке детерминанте помножимо неким бројем новодобијена детерминанта једнака је полазној детерминанти помноженој тим бројем.

Доказ: Нека су елементи $i$-те врсте помножени са $\lambda$. Користећи дистрибутивност множења према сабирању и дефиницију детерминанте добијамо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots \lambda a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \lambda \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример: Користећи дефиницију можемо проверити да је

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3,$$

али је после множења прве врсте са два

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.10 Ако су две врсте у детерминанти пропорционалне онда је та детерминанта једнака нули.

Доказ: Нека је $n \in \mathbb{N}$ ред детерминанте $D$ у којој је за неке $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и неки број $\lambda$ испуњено $a_{jk} = \lambda a_{ik}$, за све $k \in \{1, \dots, n\}$. По претходној теореми је $D = \lambda D'$, где су у $D'$ $i$-та и $j$-та врста једнаке па је $D' = 0$. Зато је $D = \lambda 0 = 0$.

Теорема 1.11 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \{1, \dots, n\}$. Тада је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказ: Због дистрибутивности множења према сабирању имамо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$+ \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a'_{i\pi(i)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots (a_{i\pi(i)} + a'_{i\pi(i)}) \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \dots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3$ и $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$, а

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9 = -3 + (-6) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 1.12 Вредност детерминанте се не мења ако елементима једне врсте додамо одговарајуће елементе неке друге врсте претходно помножене неким бројем.

Доказ: Због претходних теорема имамо:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & \dots & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \lambda a_{j2} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \lambda 0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример: Ако у детерминанти $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$ елементима друге врсте додамо одговарајуће елементе прве врсте претходно помножене са $-1$ добијамо $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6$.

### 1.1.4 Лапласов развој

Дефиниција 1.5 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $i,j \in \{1,\dots,n\}$. За детерминанту реда $n$ над елементима $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$, минор који одговара елементу $a_{ij}$ у означи $M_{ij}$ је детерминанта која се од полазне добија избацивањем $i$-те врсте и $j$-те колоне. Алгебарски комплемент или кофактор који одговара елементу $a_{ij}$ је $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Пример: За $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ је $M_{23} = 3$, а $A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -3$.

Теорема 1.13 Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Доказ: Потребно је уствари трансформисати суму која дефинише детерминанту.

$$\Sigma_{\pi \in S_n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1\pi(1)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=1} (-1)^{Inv\,\pi} a_{11} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$+ \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=2} (-1)^{Inv\,\pi} a_{12} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} + \dots$$

$$+ \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{1n} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$= a_{11} \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=1} (-1)^{Inv\,\pi} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

$$+ a_{12} \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=2} (-1)^{Inv\,\pi} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} + \dots$$

$$+ a_{1n} \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=n} (-1)^{Inv\,\pi} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)}$$

Сада за $k$-ти сабирак, сем првог где је јасно

$$a_{11} \Sigma_{\pi \in S_n, \pi(1)=1} (-1)^{Inv\,\pi} a_{2\pi(2)} \dots a_{n\pi(n)} a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

посматрамо детерминанту у којој смо разменили места $k-1$ пута $k$-тој колони са колоном испред ње и тако добили детерминанту чији је минор на месту 11 једнак минору на месту $1k$ у полазној детерминанти. Новодобијена се детерминанта своди на полазну множењем са $(-1)^{k-1}$. Тиме добијамо да је $k$-ти сабирак у горњој суми $(-1)^{k-1} a_{1k} M_{1k} = a_{1k} (-1)^{1+k} M_{1k} = a_{1k} A_{1k}$, одакле следи тврдња.

Напомена: Једнакост из претходне теореме називамо и развој по првој врсти. Аналогно формулишемо и развој по некој другој врсти или колони детерминанте што дајемо у следећој теореми.

Теорема 1.14 (Лапласов развој) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Тада је

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
   $= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + \ldots + a_{ni}A_{ni};$
2. $a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0;$
3. $a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0.$

Доказ: Прву продужену једнакост доказујемо аналогно претходној теореми. Преостале две једнакости представљају развој по $j$-тој врсти (колони) детерминанте која има две једнаке врсте (колоне) $i$-ту и $j$-ту,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} = a_{i1} & a_{j2} = a_{i2} & \ldots & a_{jn} = a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

па је једнака нули.

Пример: Развијањем по првој врсти рачунамо следећу детерминанту: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}(-1)^{1+1}M_{11}$
$+a_{12}(-1)^{1+2}M_{12} = 2 \cdot 5 + 4 \cdot (-1) \cdot 3 = -2.$

Последица 1.1 Детерминанта чији су сви елементи испод (изнад) главне дијагонале једнаки нули назива се горња (доња) троугаона детерминанта и једнака је производу елемената на главној дијагонали.

Доказ: Уколико је у питању горња троугаона детерминанта развијање по првој колони има само један сабирак у коме фигурише минор који је поново горња троугаона детерминанта па поступак понављамо. Аналогно поступамо за доњу троугаону детерминанту користећи Лапласове развоје по врстама.

## 1.2 Системи једначина

### 1.2.1 Једначина. Систем једначина.

У уводу у математичку логику дефинисали смо терм на неком језику. Изједначавањем два терма $s$ и $t$ добијамо једначину $s = t$ по промењљивама које се појављују у термима $s$ и $t$ и које зовемо непознате. Систем једначина представља конјункцију једначина. Како даље радимо са системима линеарних једначина дајемо прецизну дефиницију линеарног терма.

Дефиниција 1.6 Линеарни терми на језику $\{+, \cdot\}$ добијају се само коначним бројем примена следећих правила:

1. промењљиве и константе су линеарни терми;
2. ако су $u$ и $v$ линеарни терми онда су то и $\alpha u$ и $(u + v)$ за сваку константу $\alpha$.

Напомена: Важи конвенција о изостављању спољашњих заграда. Како надаље радимо само на реалним и комплексним бројевима и уобичајеним операцијама сабирања и множења у складу са приоритетима можемо изостављати и друге заграде које не нарушавају приоритет операција. Усвојимо и да нам је $-v$ замена за $(-1)v$, а $u - v$ замена за $u + (-v)$.

Пример: $x - 2y$ јесте линеарни терм, а $2y^2 - 1$ то није.

Дефиниција 1.7 Ако су $s$ и $t$ линеарни терми и $x_1, \ldots, x_n$ све промењљиве које се у њима појављују, онда једначину $s = t$ називамо линеарна једначина по $x_1, \ldots, x_n$. Те промењљиве зовемо још и непознате. Конјункција линеарних једначина назива се систем линеарних једначина.

Напомена: Обично систем линеарних једначина не записујемо као конјункцију једначина него само наводимо једначине једну испод друге.

Пример: $x-y+2z=4 \wedge y=3z$ је систем линеарних једначина, али га записујемо чешће као

$$x - y + 2z = 4$$

$$y = 3z$$

Дефиниција 1.8 Систем линеарних једначина у коме су број непознатих и број једначина исти назива се квадратни, иначе је правоугаони систем.

### 1.2.2 Еквивалентни системи

Дефиниција 1.9 Два система једначина $S_1$ и $S_2$ у реалним (комплексним) бројевима су еквивалентна ако је формула $S_1 \Leftrightarrow S_2$ тачна у реалним (комплексним) бројевима.

Пример: Систем $x + y = 0 \wedge x = 0$ је еквивалентан систему $x = 0 \wedge y = 0$.

Теорема 1.15 За сваку линеарну једначину $s = t$ по непознатима $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ јединствено постоје бројеви $a_1, \ldots, a_n, b$ такви да је једначина $s = t$ еквивалентна са $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$.

Доказ: Последица особина сабирања и множења у реалним (комплексним) бројевима и алгебарских трансформација које можемо применити да неку линеарну једначину доведемо у описани облик.

Последица 1.2 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Сваки линеарни систем од $m$ једначина по непознатима $x_1, \ldots, x_n$ еквивалентан је систему једначина

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

за неке коефицијенте $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ и слободне чланове $b_1, \ldots, b_m$ који су реални (комплексни) бројеви.

Доказ: Користимо претходну теорему за сваку од $m$ једначина.

Напомена: Систем који је у облику датом као у претходном тврђењу назива се систем у сређеном облику.

Дефиниција 1.10 Систем линеарних једначина код кога су у сређеном облику сви слободни чланови једнаки нули назива се хомогени систем.

Дефиниција 1.11 Решење система линеарних једначина од $n \in \mathbb{N}$ непознатих је било која $n$-торка бројева који када се редом уврсте уместо непознатих добијамо тачне једнакости за сваку од једначина тог система.

Напомена: Решити систем једначина значи наћи скуп решења тог система кога чине сва решења система.

Према броју решења система једначина системе делимо на противречне (контрадикторне или несагласне) - то су они који немају решења и непротивречне (сагласне) - то су они који имају решења. Сагласни системи се деле на одређене - ако је решење јединствено и неодређене - ако постоји више решења.

Примери: Сваки хомогени систем је сагласан јер има решење које чине само нуле и оно се назива тривијално решење. Систем једначина

$$x - y = 2$$

$$2x - 2y = 1$$

је несагласан, а систем

$$x - y = 2$$

$$2x - 2y = 4$$

је сагласан и неодређен.

Теорема 1.16 Неодређен систем у реалним или комплексним бројевима увек има бесконачно много решења.

Доказ: Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Нека систем

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

има два решења по $x_1, \ldots, x_n$ и нека су то $(u_1, \ldots, u_n)$ и $(v_1, \ldots, v_n)$. Покажимо да је $(tu_1 + (1-t)v_1, \ldots, tu_n + (1-t)v_n)$ решење за сваки број $t$. Нека $i \in \{1, \ldots, n\}$ и уврстимо новонасталу $n$-торку у $i$-ту једначину:

$$a_{i1}(tu_1 + (1-t)v_1) + a_{i2}(tu_2 + (1-t)v_2) + \ldots + a_{in}(tu_n + (1-t)v_n)$$

$$= t(a_{i1}u_1 + a_{i2}u_2 + \ldots + a_{in}u_n) + (a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n)$$

$$-t(a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + \ldots + a_{in}v_n) = tb_i + b_i - tb_i = b_i.$$

Зато посматрана $n$-торка задовољава сваку од једначина посматраног система па је решење система. Како је $t$ произвољан број добили смо бесконачно много решења система.

Последица 1.3 Ако хомогени систем над реалним или комплексним бројевима има једно нетривијално решење онда има бесконачно много нетривијалних решења.

Доказ: Ако има једно нетривијално решење онда има бар два решења јер увек има и тривијално решење, па по претходној теореми има бесконачно много нетривијалних решења.

Теорема 1.17 Два система једначина су еквивалентна ако и само ако имају исте скупове решења.

Доказ: Нека су системи $S_1$ и $S_2$ са непознатима $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ еквивалентни. Тада је формула $S_1 \Leftrightarrow S_2$ тачна. Зато када уврстимо решење $(u_1, \ldots, u_n)$ система $S_1$ добијамо тачну формулу $S_1 \Leftrightarrow S_2$ па како је лева страна тачна мора бити тачна и десна страна што значи да је $(u_1, \ldots, u_n)$ решење система $S_2$. Зато је свако решење система $S_1$ истовремено и решење система $S_2$. Аналогно закључујемо и обратно да је свако решење система $S_2$ истовремено и решење система $S_1$. Зато еквивалентни системи имају исте скупове решења. Нека сада системи $S_1$ и $S_2$ са непознатима $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$ имају исте скупове решења. Тада у формули $S_1 \Leftrightarrow S_2$ када уместо $x_1, \ldots, x_n$ уврстимо $n$-торку бројева која јесте решење обе стране еквиваленције су тачне, а ако уврстимо $n$-торку бројева која није решење једног не може бити решење ни другог система, па су обе стране еквиваленције нетачне. У сваком од случајева еквиваленција је тачна, па су системи по дефиницији еквивалентни.

### **1.2.3** Троугаони системи

Теорема 1.18 Нека су $J_1$ и $J_2$ два линеарна терма. Тада је

1. $J_1 = 0 \wedge J_2 = 0 \Leftrightarrow J_2 = 0 \wedge J_1 = 0$;
2. $\alpha J_1 = 0 \Leftrightarrow J_1 = 0$, за $\alpha \neq 0$;
3. $J_1 = 0 \wedge J_2 = 0 \Leftrightarrow J_1 = 0 \wedge \alpha J_1 + J_2 = 0$.

Доказ: 1. следи из комутативности конјункције. 2. Ако је $J_1 = 0$ онда је $\alpha J_1 = \alpha 0 = 0$, а ако је $\alpha \neq 0$ онда постоји број $\frac{1}{\alpha}$, па из $\alpha J_1 = 0$ следи $\frac{1}{\alpha}\alpha J_1 = \frac{1}{\alpha}0 = 0$ па је $J_1 = 0$. 3. Нека је $J_1 = 0 \wedge J_2 = 0$ тада је $\alpha J_1 + J_2 = \alpha 0 + 0 = 0$, а ако је $J_1 = 0 \wedge \alpha J_1 + J_2 = 0$ онда је $\alpha 0 + J_2 = 0$ па је $J_2 = 0$.

Напомена: Уместо линеарних једначина облика $J = 0$ у претходној теореми можемо имати и линеарне једначине облика $t_1 = t_2$ јер лако прелазимо на еквивалентан облик $t_1 - t_2 = 0$. Претходна теорема даје нам основ за следећу дефиницију.

Дефиниција 1.12 Следеће трансформације система називају се еквивалентне трансформације:

1. замена места две једначине система;
2. множење неке једначине система бројем различитим од нуле;
3. додавање једне једначине система, претходно помножене неким бројем, некој другој једначини система.

Последица 1.4 Еквивалентним трансформацијама се систем преводи у њему еквивалентан.

Последица 1.5 Вршењем еквивалентних трансформација не мења се скуп решења система.

Дефиниција 1.13 Нека $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{rr}, \beta_1, \ldots, \beta_r$, $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{rs}, \delta \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$, при чему је $\alpha_{ii} \neq 0$, за све $i \in \{1, \ldots, r\}$. Тада систем

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1r}y_r = \beta_1 + \gamma_{11}z_1 + \ldots + \gamma_{1s}z_s$$

$$\alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2r}y_r = \beta_2 + \gamma_{21}z_1 + \ldots + \gamma_{2s}z_s$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{rr}y_r = \beta_r + \gamma_{r1}z_1 + \ldots + \gamma_{rs}z_s$$

$$0 = \delta$$

називамо троугаони систем. У овом систему непознате $z_1, \ldots, z_s$ зовемо слободне, а непознате $y_1, \ldots, y_r$ зовемо везане.

Напомена: Троугаони систем је контрадикторан ако је $\delta \neq 0$, јер онда једначина $0 = \delta$ није тачна шта год узели за непознате $y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_s$. Ако је тачно $0 = \delta$ онда из претпоследње једначине добијамо $y_r = \frac{\beta_r}{\alpha_{rr}} + \frac{\gamma_{r1}}{\alpha_{rr}}z_1 + \ldots + \frac{\gamma_{rs}}{\alpha_{rs}}z_s$, затим израз за $y_r$ уврштавамо у $(r-1)$-ву по реду једначину из које изражавамо $y_{r-1}$ преко $z_1, \ldots, z_s$ и тако редом док не добијемо све $y_1, \ldots, y_r$

изражене преко $z_1, \dots, z_s$. Зато је у овом случају систем сагласан. За $s = 0$ добијени $y_1, \dots, y_r$ су бројеви, па је тада систем одређен. За $s > 0$ систем је неодређен са $s$ степена слободе, јер сваки од $y_1, \dots, y_r$ зависи од избора вредности за $z_1, \dots, z_s$. Зато непознате $y_1, \dots, y_r$ називамо везане, а $z_1, \dots, z_s$ слободне.

Теорема 1.19 Нека $n \in \mathbb{N}$. Нека је $S$ систем линеарних једначина по $x_1, \dots, x_n$. Тада постоје $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ такви да је $r + s = n$, $Y = \{y_1 \dots, y_r\}$ и $Z = \{z_1, \dots, z_s\}$, $Y \cup Z = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y \cap Z = \emptyset$ и троугаони систем из претходне дефиниције који је еквивалентан са $S$.

Доказ: Претпоставићемо да се у систему налазе само праве непознате, оне код којих је коефицијент бар у једној једначини различит од нуле. Доказ дајемо индукцијом по $n$. За $n = 1$ $S$ има облик

$$a_{11}x_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{m1}x_1 = b_m$$

где је бар за једно $i \in \{1, \dots, m\}$ $a_{i1} \neq 0$, па нека је то $a_{11}$, иначе замењујемо места $i$-те и прве једначине. Сада прву једначину додајемо другој претходно помножену са $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, и тако редом све до $m$-те којој додајемо прву претходно помножену са $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$. Тиме добијамо еквивалентан систем $a_{11}x_1 = b_1 \wedge 0 = c_2 \wedge \dots \wedge 0 = c_m$ који јесте еквивалентан са

$$a_{11}x_1 = b_1$$

$$0 = \delta$$

Овим је показана база индукције. Посматрајмо сада систем $S$ који има $n + 1$ непознатих, за $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(n+1)}x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2(n+1)}x_{n+1} = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{m(n+1)}x_{n+1} = b_m$$

Нека је $a_{11} \neq 0$, иначе заменом места једначина доводимо на прво место једначину код које је коефицијент уз $x_1$ различит од нуле. Поново као у бази, прву једначину додајемо другој претходно помножену са $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, и тако редом све до $m$-те којој додајемо прву претходно помножену са $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$. Тиме добијамо еквивалентан систем

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1(n+1)}x_{n+1} = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2(n+1)}x_{n+1} = b'_2$$

$$\ldots$$

$$a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{m(n+1)}x_{n+1} = b'_m$$

Сада за овај систем без прве једначине који јесте систем са $n$ непознатих $\{x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ по индукцијској хипотези постоје $r-1 \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ такви да је $(r-1)+s = n$, $Y = \{y_2 \ldots, y_r\}$ и $Z = \{z_1, \ldots, z_s\}$, $Y \cup Z = \{x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, $Y \cap Z = \emptyset$ и троугаони систем њему еквивалентан

$$\alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2r}y_r = \beta_2 + \gamma_{21}z_1 + \ldots + \gamma_{2s}z_s$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{rr}y_r = \beta_r + \gamma_{r1}z_1 + \ldots + \gamma_{rs}z_s$$

$$0 = \delta$$

па ако ставимо $y_1 = x_1$ и заменимо остале непознате у првој једначини полазног система у складу са новонасталим скуповима непознатих $Y$ и $Z$, онда је полазни систем еквивалентан са

$$\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1r}y_r = \beta_1 + \gamma_{11}z_1 + \ldots + \gamma_{1s}z_s$$

$$\alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2r}y_r = \beta_2 + \gamma_{21}z_1 + \ldots + \gamma_{2s}z_s$$

$$\ldots$$

$$\alpha_{rr}y_r = \beta_r + \gamma_{r1}z_1 + \ldots + \gamma_{rs}z_s$$

$$0 = \delta$$

Овим је показан индукцијски корак.

Напомена: Поступак описан у доказу претходне теореме којим се неки систем линеарних једначина своди на њему еквивалентан троугаони систем назива се Гаусов алгоритам.

Пример: Нека $a \in \mathbb{R}$. Свести следећи систем на њему еквивалентан троугаони.

$$2x + 3y - 4z = 0$$

$$4x + y + z = 2$$

$$-2x - 8y + 13z = a$$

По Гаусовом алгоритму, најпре елеминишемо променљиву $x$ из друге и треће једначине. Прву једначину помножену са $-2$ сабирамо са другом једначином и добијену једначину уписујемо на место друге једначине. Потом, на место треће једначине уписујемо збир прве и треће једначине задатог система. Тако добијамо следећи систем једначина еквивалентан полазном.

$$2x + 3y - 4z = 0$$

$$-5y + 9z = 2$$

$$-5y + 9z = a$$

Сада треба да елеминишемо непознату $y$ из треће једначине, што ћемо учинити тако што на место треће једначине уписујемо разлику треће и друге једначине новодобијеног система.

$$2x + 3y - 4z = 0$$

$$-5y + 9z = 2$$

$$0 = a - 2$$

Тражени систем у троугаоном облику који је еквивалентан полазном је следећи.

$$2x + 3y = 4z$$

$$-5y = 2 - 9z$$

$$0 = a - 2$$

Одавде је јасно да је за $a \neq 2$ полазни систем контрадикторан, а за $a = 2$ сагласан, али неодређен са једним степеном слободе.

### **1.2.4** Крамерова теорема

Дефиниција 1.14 Нека $n \in \mathbb{N}$. За систем линеарних једначина

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_x = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

детерминанту $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ називамо детерминанта система. Детерминанту $D_i$ за $i \in \{1, \ldots, n\}$ добијамо из $D$ тако што елементе $i$-те колоне заменимо одговарајућим слободним члановима.

$$\text{Пример: } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Теорема 1.20 Ако је детерминанта $D$ квадратног система линеарних једначина са $n$ непознатих $x_1, \dots, x_n$ различита од нуле онда тај систем има јединствено решење дато формулом $x_i = \frac{D_i}{D}$, за све $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доказ: Нека је $D \neq 0$ и нека је $i \in \{1, \dots, n\}$. Даље нека је $(y_1, \dots, y_n)$ једно решење датог система тада је

$$a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = b_1$$

$$a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n = b_2$$

$$\dots$$

$$a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = b_n$$

Уврстимо у $D_i$ уместо $b_j$ израз $a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \dots + a_{jn}y_n$ јер су једнаки и то за свако $j \in \{1, \dots, n\}$. Сада у $D_i$ додајмо $j$-тој колони $k$-ту колону помножену са $-y_k$, за све $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, па добијамо $D_i = Dy_i$. Зато је $y_i = \frac{D_i}{D}$, за све $i \in \{1, \dots, n\}$. Покажимо још да $(\frac{D_1}{D}, \dots, \frac{D_n}{D})$ јесте решење посматраног система. Уврстимо ову $n$-торку у $i$-ту једначину. Добијамо $a_{i1}\frac{D_1}{D} + \dots + a_{ii}\frac{D_i}{D} + \dots + a_{in}\frac{D_n}{D} = b_i$. Да би проверили тачност ове једнакости развићемо $D_j$ по $j$-тој колони за свако $j \in \{1, \dots, n\}$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и уврстити уместо $D_j$, па тако добијамо

$$a_{i1}D_1 + \dots + a_{ii}D_i + \dots + a_{in}D_n$$

$$= a_{i1}(b_1 A_{11} + \ldots + b_i A_{i1} + \ldots + b_n A_{n1}) + \ldots$$
$$+ a_{ii}(b_1 A_{1i} + \ldots + b_i A_{ii} + \ldots + b_n A_{ni}) + \ldots$$
$$+ a_{in}(b_1 A_{1n} + \ldots + b_i A_{in} + \ldots + b_n A_{nn})$$
$$= b_1(a_{i1} A_{11} + \ldots + a_{ii} A_{1i} + \ldots + a_{in} A_{1n}) + \ldots$$
$$+ b_i(a_{i1} A_{i1} + \ldots + a_{ii} A_{ii} \ldots + a_{in} A_{in}) + \ldots$$
$$+ b_n(a_{i1} A_{n1} + \ldots + a_{ii} A_{ni} + \ldots + a_{in} A_{nn})$$
$$= b_i(a_{i1} A_{i1} + \ldots + a_{ii} A_{ii} \ldots + a_{in} A_{in}) = b_i D$$

остали сабирци јесу нуле јер су у заградама изрази који представљају Лапласове развоје са две једнаке врсте.

Пример: Решити систем једначина:

$$2x_1 - 3x_2 = 4$$

$$2x_1 + x_2 = 6$$

Детерминанта система је $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$, па по Крамеровој теореми систем има јединствено решење дато са $x_1 = \frac{D_1}{D}$ и $x_2 = \frac{D_2}{D}$, где је $D_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 22$ и $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 4$, па је $(\frac{11}{4}, \frac{1}{2})$ једино решење посматраног система.

Последица 1.6 Ако хомогени квадратни систем има нетривијална решења онда је детерминанта тог система једнака нули.

Доказ: Контрапозицијом Крамерове теореме за квадратни хомогени систем.

Глава 2

# ПРОСТОРИ РЕАЛНИХ И КОМПЛЕКСНИХ $n$-ТОРКИ

## 2.1 Простори и потпростори

Дефиниција 2.1 Нека је $n \in \mathbb{N}$. На $\mathbb{R}^n$ дефинишемо бинарну операцију $+$ са:

$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
за све $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$
и унарну операцију множења бројем са:
$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$,
за све $\alpha, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Напомена: На исти начин уводимо ове операције на $\mathbb{C}^n$. За $n = 1$ ове операције се поклапају са уобичајеним операцијама сабирања и множења бројем у скупу реалних односно комплексних бројева.

Теорема 2.1 Нека $n \in \mathbb{N}$, тада за све $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

1. $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n)$;
2. $((x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n)) + (z_1, \ldots, z_n) = (x_1, \ldots, x_n) + ((y_1, \ldots, y_n) + (z_1, \ldots, z_n))$;
3. $(x_1, \ldots, x_n) + (0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0) + (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$;
4. $(x_1, \ldots, x_n) + (-x_1, \ldots, -x_n) = (-x_1, \ldots, -x_n) + (x_1, \ldots, x_n)$ $= (0, \ldots, 0)$;

5. $\alpha((x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n)) = \alpha(x_1,\ldots,x_n)+\alpha(y_1,\ldots,y_n)$;

6. $(\alpha+\beta)(x_1,\ldots,x_n) = \alpha(x_1,\ldots,x_n)+\beta(x_1,\ldots,x_n)$;

7. $(\alpha\beta)(x_1,\ldots,x_n) = \alpha(\beta(x_1,\ldots,x_n))$;

8. $1(x_1,\ldots,x_n) = (x_1,\ldots,x_n)$.

Доказ:

1. на основу комутативности сабирања бројева 2. на основу асоцијативности сабирања бројева 3. јер је $a+0=a$ 4.јер је $a+(-a)=0$ 5. и 6. на основу дистрибутивности множења у односу на сабирање, 7. на основу асоцијативности за множење и 8. последица идентитета $1\cdot x = x$ .

Дефиниција 2.2 Структура $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ за све $n\in\mathbb{N}$ назива се векторски простор реалних $n$-торки. Те $n$-торке зовемо вектори, а реалне бројеве скалари.

Напомена: За $n=2$ $(n=3)$ добијамо простор уређених парова (тројки) реалних бројева који представљају везане векторе у координатној равни (простору) чија је почетна тачка у координатном почетку.

Аналогно дефинишемо векторски простор комплексних $n$-торки, јер претходна торема важи и ако уместо реалних посматрамо комплексне бројеве. Убудуће ћемо тврђења формулисати у $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$, али ћемо подразумевати да она важе у истој форми и за $(\mathbb{C}^n,+,\cdot)$, сем ако се другачије експлицитно не нагласи.

Векторе означавамо малим латиничним словима $u,v,w,\ldots$, а скаларе обично грчким словима $\alpha,\beta,\ldots$. $n$-торку $(0,...,0)$ зовемо нула вектор и означавамо са 0. За вектор $(x_1,\ldots,x_n)$ је $(-x_1,\ldots,-x_n) = -(x_1,\ldots,x_n)$ супротан вектор. За вектор $(x_1,\ldots,x_n)$ су $x_1,\ldots,x_n$ компоненте (касније ћемо их звати и координате вектора).

Дефиниција 2.3 Нека $n\in\mathbb{N}$. За $\emptyset\neq U\subseteq\mathbb{R}^n$ кажемо да је потпростор ако је за све $u,v\in U$ и $\alpha\in\mathbb{R}$ испуњено

1. $u+v\in U$;

2. $\alpha u \in U$.

Теорема 2.2 Нека $n \in \mathbb{N}$. Онда је $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ потпростор ако и само ако је за све $u, v \in U$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ испуњено $\alpha u + \beta v \in U$.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $U$ потпростор и нека су $u, v, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада су због 2. претходне дефиниције $\alpha u, \beta v \in U$, а због 1. претходне дефиниције је $\alpha u + \beta v \in U$.

($\Leftarrow$) Нека су $u, v \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је $u + v = 1u + 1v \in U$ и $\alpha u = \alpha u + 0v \in U$ по претпоставци, па је по дефиницији $U$ потпростор.

Теорема 2.3
1. Сваки потпростор садржи нула вектор.
2. За сваки вектор неког потпростора, тај потпростор садржи и њему супротан вектор.

Доказ: 1. Како је тај потпростор непразан скуп, он садржи неки вектор, а ако то није нула вектор онда по дефиницији нула вектор као умножак тог вектора са нулом мора бити садржан у потпростору. 2. Посматрамо умножак уоченог вектора са -1.

Примери: Нула потпростор је потпростор који садржи само нула вектор. Сви вектори на истој правој (равни) чине потпросторе вектора у Еуклидском простору. $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ је сам себи потпростор.

Теорема 2.4 Нека $n \in \mathbb{N}$. Скуп свих решења хомогеног система једначина са $n$ непознатих чини потпростор од $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$.

Доказ: Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ и нека су $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ решења хомогеног система од $m$ једначина са $n$ непознатих и нека су $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада за $i$-ту по реду једначину имамо:

$a_{i1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \ldots + a_{in}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n) + \beta(a_{i1}y_1 + \ldots + a_{in}y_n) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$

Зато $\alpha(x_1, \ldots, x_n) + \beta(y_1, \ldots, y_n)$ задовољава и-ту па и сваку једначину уоченог система па јесте решење система једначина. По теореми онда сва решења чине потпростор.

Пример: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 2x\}$ је потпростор. Проверавамо услов из теореме и установљавамо да важи: $\alpha(x, y) + \beta(z, t) = (\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta t)$ и $\alpha y + \beta t = 2(\alpha x + \beta z)$, јер је $y = 2x$ и $t = 2z$.

## 2.2 Базе и димензије

### 2.2.1 Линеарна зависност

Дефиниција 2.4 Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека су $v_1, \ldots, v_n$ вектори и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Тада је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ линеарна комбинација вектора $v_1, \ldots, v_n$.

Дефиниција 2.5 Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека су $v_1, \ldots, v_n$ вектори. Тада је низ вектора $v_1, \ldots, v_n$ линеарно зависан ако постоје $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ од којих је бар један различит од нуле и $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$. Иначе је низ вектора $v_1, \ldots, v_n$ линеарно независан.

Пример: $(1,2,-1), (2,-1,2), (3,1,1)$ чине линеарно зависан низ, јер је

$(-1)(1,2,-1) + (-1)(2,-1,2) + (3,1,1) = (0,0,0)$. Међутим низ $(1,0), (1,1)$ је линеарно независан.

Приметимо да приликом провере линеарне зависности неког низа вектора уствари решавамо хомогени систем једначина.

Теорема 2.5

1. Низ вектора који садржи нула вектор је увек линеарно зависан.
2. Низ вектора који садржи линеарно зависан подниз вектора је линеарно зависан.
3. Низ који садржи два иста вектора је линеарно зависан.
4. Сваки подниз линеарно независног низа вектора је линеарно независан.
5. Једночлани низ је линеарно независан осим ако је то нула вектор.
6. Линеарна зависност не зависи од редоследа вектора у низу.

Доказ: Последица дефиниције.

Дефиниција 2.6 Бесконачан низ вектора је линеарно независан ако је сваки његов коначан подниз линеарно независан.

### 2.2.2 Линеал

Дефиниција 2.7 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тада скуп свих линеарних комбинација вектора из $S$ називамо линеал скупа $S$ и означавамо са $\mathcal{L}(S)$.

Напомена: За $m, n \in \mathbb{N}$ и $a_1 \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ је $\mathcal{L}(\{a_1, \ldots, a_m\}) = \{\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_m a_m \,|\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}$. Уместо $\mathcal{L}(\{a_1, \ldots, a_m\})$ пишемо $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_m)$. Линеал празног скупа је нула потпростор.

Теорема 2.6 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Тада је $\mathcal{L}(S)$ најмањи потпростор у $\mathbb{R}^n$ који садржи $S$.

Доказ: Ако $u, v \in \mathcal{L}(S)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ онда $\alpha u + \beta v \in \mathcal{L}(S)$ па је $\mathcal{L}(S)$ потпростор. Нека је $U$ потпростор за који је $S \subseteq U$ тада свака линеарна комбинација два, па онда и коначно много вектора из $S$ јесте у $U$, па је $\mathcal{L}(S) \subseteq U$.

Последица 2.1 Ако је $W$ потпорстор од $\mathbb{R}^n$ онда је $\mathcal{L}(W) = W$.

Теорема 2.7 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $S, T \subseteq \mathbb{R}^n$. Тада је

1. $S \subseteq \mathcal{L}(S)$;
2. $S \subseteq T \Rightarrow \mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$;
3. $\mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(\mathcal{L}(S))$;
4. $(S \subseteq \mathcal{L}(T) \wedge T \subseteq \mathcal{L}(S)) \Rightarrow \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(T)$;
5. $\mathcal{L}(S) = \cup_{S_i \subseteq S, |S_i| < \infty} \mathcal{L}(S_i)$.

Доказ: 1. Сваки вектор јесте линеарна комбинација једног вектора - себе самог. 2. По дефиницији линеала 3. Због претходне последице 4. Из $S \subseteq \mathcal{L}(T)$ користећи 2. и 3. је $\mathcal{L}(S) \subseteq \mathcal{L}(T)$. Аналогно показујемо обратну инклузију. 5. Из дефиниције линеала.

Дефиниција 2.8 Ако за потпростор $U$ векторског простора $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ и $S \subseteq \mathbb{R}^n$ важи да је $\mathcal{L}(S) = U$ онда кажемо да је $U$ генерисан са $S$. Кажемо и да је $S$ генераторни скуп (низ) вектора за $U$. Ако постоји коначан генераторни скуп (низ) за $U$ кажемо да је $U$ коначно генерисан потпростор.

Пример: Низ $(1,0), (1,1)$ је генераторни за $\mathbb{R}^2$ јер за све $a, b \in \mathbb{R}$ имамо $(a, b) = (a - b)(1, 0) + b(1, 1)$.

### 2.2.3 Базе

Дефиниција 2.9 База неког потпростора од $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ је низ линеарно независних вектора који генерише тај потпростор. Ако је тај низ коначан база је коначна.

Напомена: Видећемо у наставку да су потпростори са којима ми радимо са коначном базом.

Пример: Како смо већ утврдили да је $(1,0),(1,1)$ и линеарно независан и генераторни низ за $\mathbb{R}^2$ то је база.

Теорема 2.8 Низ вектора неког потпростора је база тог потпростора ако и само ако је тај низ максималан линеарно независан низ.

Доказ: ($\Rightarrow$) Ако посматрамо било који вектор који није у бази онда због тога што је база низ генератора се тај нови вектор приказује као линеарна комбинација вектора базе, па са векторима базе чини линеарно зависан низ.

($\Leftarrow$) Ако је неки низ вектора $v_1, \ldots, v_n$ максималан линеарно независан низ онда било који други вектор $u$ заједно са уоченим векторима чини линеарно зависан низ. Што значи да постоји линеарна комбинација $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \alpha v = 0$ при чему је $\alpha \neq 0$, иначе због претпоставке о линеарној независности за $v_1, \ldots, v_n$ добијамо да су сви коефицијенти нуле. Такође не може бити само $\alpha \neq 0$ него је још неки од коефицијената различит од нуле, а онда се $v$ може приказати као линеарна комбинација вектора полазног низа, па је полазни низ и генераторни низ, па је база.

Теорема 2.9 Низ вектора је база ако и само ако је минималан низ генератора.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је неки низ вектора база. Ако избацимо неки вектор онда ако је новонастали низ и даље низ генератора онда се избачени вектор може изразити преко преосталих па са преосталима чини линеарно зависан низ па није база. Зато је то минималан низ генератора. ($\Leftarrow$) Ако уочени минимални низ генератора није линеарно независан онда се неки од тих вектора може изразити преко осталих па преостали вектори чине генераторни низ, што је немогуће због минималности.

Теорема 2.10 У потпростору $U$ је низ вектора $v_1, \ldots, v_m$, $m \in \mathbb{N}$ база ако и само ако се сваки вектор из $U$ на јединствен начин може приказати као линеарна комбинација вектора $v_1, \ldots, v_m$.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека $u \in U$ и нека је $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ и $u = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_m v_m$. Тада је $0 = (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_m - \beta_m)v_m$, па како је низ вектора $v_1, \ldots, v_m$ линеарно независан добијамо $\alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_m - \beta_m = 0$ одакле следи тврдња.

($\Leftarrow$) Ако се сваки вектор из $U$ може на јединствен начин приказати као линеарна комбинација вектора $v_1, \ldots, v_m$ онда је $v_1, \ldots, v_m$ свакако генераторни низ. Из јединствености приказа нула вектора као линеарне комбинације вектора $v_1, \ldots, v_m$ следи линеарна независност низа $v_1, \ldots, v_m$, па је он база.

Теорема 2.11 Нека $n \in \mathbb{N}$. Нека је за све $i \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i$ $n$-торка која на $i$-том месту има 1, а на свим осталим местима нуле. Тада је $e_1, \ldots, e_n$ база за $\mathbb{R}^n$.

Доказ: Тврђење произилази из једнакости $(a_1, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n$ за све $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Напомена: База из претходне теореме назива се стандардна база простора $\mathbb{R}^n$, за све $n \in \mathbb{N}$.

Последица 2.2 Векторски простор $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ има коначну базу и коначно је генерисан за све $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.12 Низ вектора $v_1, \ldots, v_m$ који не садржи нула вектор је линеарно зависан ако и само ако међу векторима $v_2, \ldots, v_m$ постоји вектор $v_k$ који је једнак линеарној комбинацији вектора $v_1, \ldots, v_{k-1}$.

Доказ: Како је низ вектора $v_1, \ldots, v_m$ линеарно зависан то постоје бројеви $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ такви да је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m = 0$ и бар један од $\alpha_i \neq 0$. Нека је $k$ највећи међу индексима алфи који нису нула. Јасно $k > 1$. Сада је $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$, а одавде добијамо $v_k$ као линеарну комбинацију вектора $v_1, \ldots, v_{k-1}$. Обратно знамо да сваки низ који садржи линеарно зависан подниз је и сам линеарно зависан.

Теорема 2.13 Ако је у неком потпростору $v_1, \dots, v_m$ линеарно независан низ, а $u_1, \dots, u_k$ низ генератора онда је $m \leq k$.

Доказ: У низу $u_1, \dots, u_k$ додамо $v_1$ па добијамо $v_1, u_1, \dots, u_k$, а то је и даље генераторни низ који је линеарно зависан. Зато постоји вектор $u_i$ који је једнак линеарној комбинацији вектора $v_1, u_1, \dots, u_{i-1}$ по претходној теореми. Сад посматрамо низ $v_1, v_2, u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_k$. То је опет линеарно зависан низ генератора па понављамо поступак. Нови вектор који избацујемо није ни $v_1$ ни $v_2$ због линеарне независности, него неки од $u$-ова. Поступак настављамо док има вектора. Уколико је $m > k$ контрадикција јер добијамо да је $v_1, \dots, v_m$ линеарно зависан, јер садржи линеарно зависан подниз.

Теорема 2.14 За све $n \in \mathbb{N}$ све базе за $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ имају исти број елемената.

Доказ: Нека $n \in \mathbb{N}$. Знамо да $e_1, \dots, e_n$ јесте једна база за $\mathbb{R}^n$. Ако посматрамо неку другу базу уколико је бесконачна због претходне теореме дужина коначног линеарно независног подниза је ограничена са $n$ јер је $e_1, \dots, e_n$ низ генератора. Зато не може постојати бесконачан линеарно независан низ вектора па ни бесконачна база. Ако је неки други коначан низ $v_1, \dots, v_m$ база онда како смо већ објаснили мора бити $m \leq n$, а како је $v_1, \dots, v_m$ такође низ генератора, а $e_1, \dots, e_n$ линеарно независан низ, мора бити $n \leq m$, па је $n = m$.

Последица 2.3 За свако $n \in \mathbb{N}$, сваки потпростор од $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ има коначну базу.

Доказ: Нека је $V$ произвољан потпростор од $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Посматрамо све линеарно независне низове вектора у $V$. Сваки од тих низова је линеарно независан и у $\mathbb{R}^n$, па је дужина тих низова ограничена са $n$, по теореми 2.13, јер стандардна база јесте генераторни низ од $n$ елемената. По теореми 2.8, линеарно независан низ који је максималне дужине је база за $V$.

Последица 2.4 Нека $n \in \mathbb{N}$. Све базе имају исти број елемената у потпросторима од $\mathbb{R}^n$.

Доказ: Доказ је аналоган доказу тврђења да све базе за $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ имају исти број елемената.

Дефиниција 2.10 Нека је $v_1, \ldots, v_m$, $m \in \mathbb{N}$ база потпростора и за вектор $x$ тог потпростора је $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$ јединствена репрезентација. Тада је $\alpha_i$ $i$-та координата вектора $x$ у бази $v_1, \ldots, v_m$.

Теорема 2.15 Сваки генераторни низ $v_1, \ldots, v_m$ неког ненула потпростора садржи подниз који је база.

Доказ: Нека $v_1, \ldots, v_m$ не садржи нула векторе, у супротном такве векторе најпре избацимо. Ако $v_2$ може да се изрази преко $v_1$ избацујемо га, а иначе не. Овај поступак понављамо за сваки следећи вектор у низу. По теореми 2.12 новодобијени подниз полазног низа вектора је линеарно независан који је низ генератора па је база.

Теорема 2.16 Сваки коначан линеарно независан низ вектора у неком потпростору је база или се може допунити до базе.

Доказ: Нека је $v_1, \ldots, v_m$ линеарно независан низ у потпростору од $\mathbb{R}^n$ са базом $u_1 \ldots, u_k$, где $m, n, k \in \mathbb{N}, m, k \leq n$. Посматрамо низ $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_k$ на који примењујемо поступак из доказа претходне теореме. Вектори $v_1, \ldots, v_m$ неће бити избачени, новодобијени низ јесте низ генератора и линеарно је независан.

Дефиниција 2.11 Број вектора базе неког потпростора назива се димензија тог потпростора.

Пример: За $n \in \mathbb{N}$ димензија од $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ је $n$.
Напомена: Димензију потпростора $U$ означаваћемо са $d(U)$.

Пропозиција 2.1 Сваки линеарно независан низ дужине једнаке димензији потпростора, је база тог потпростора.

Доказ: По ранијој теореми знамо да се тај линеарно независан низ може допунити до базе, али све базе имају исти број елемената који је једнак димензији.

Пропозиција 2.2 Сваки генераторни низ дужине једнаке димензији потпростора, је база тог потпростора.

Доказ: По ранијој теореми знамо да тај генераторни низ садржи подниз који је база, али све базе имају исти број елемената који је једнак димензији.

Теорема 2.17 Ако су $U$ и $V$ два потпростора и $U \subseteq V$ онда је $d(U) \leq d(V)$.

Доказ: Свака база у $U$ је линеарно независан низ вектора у $V$ па се може допунити до базе за $V$.

Теорема 2.18 Непразан скуп вектора је потпростор од $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ ако и само ако представља скуп решења хомогеног система једначина.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $U$ потпростор. Знамо да он има коначну базу $(u_1^1, \ldots, u_n^1), \ldots, (u_1^m, \ldots, u_n^m)$, где је $n \geq m$, за неке реалне бројеве $u_1^1, \ldots, u_n^1, \ldots, u_1^m, \ldots, u_n^m$. Сад је за свако $x \in U$ испуњено $x = (x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1(u_1^1, \ldots, u_n^1) + \ldots + \alpha_m(u_1^m, \ldots, u_n^m)$. Запишимо ову једнакост користећи стандардну базу. Тако добијамо

$x_1e_1 + \ldots + x_ne_n = (\alpha_1u_1^1 + \ldots + \alpha_mu_1^m)e_1 + \ldots + (\alpha_1u_n^1 + \ldots + \alpha_mu_n^m)e_n$.

Овим долазимо до хомогеног система једначина:

$\alpha_1u_1^1 + \ldots + \alpha_mu_1^m - x_1 = 0 \wedge \ldots \wedge \alpha_1u_n^1 + \ldots + \alpha_mu_n^m - x_n = 0$

по непознатим $x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$. Овај систем сводимо на њему еквивалентан хомогени систем у троугаоном облику и то тако да су све слободне променљиве међу $x_1, \ldots, x_n$, а преостале непознате су везане променљиве. У новодобијеном систему у првих $m$ једначина фигуришу непознате $x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, а у преосталих $n-m$ једначина само непознате $x_1, \ldots, x_n$. Посматрајмо сада хомогени систем који чине само једначине у којима фигуришу само непознате $x_1, \ldots, x_n$. Полазни систем има нетривијална решења, која чине потпростор $U$, ако уочени систем има нетривијална решења. Та решења су тачно координате вектора из $U$.

($\Leftarrow$) Ово смо показали раније.

## 2.3 Изоморфизми

Дефиниција 2.12 Нека су $U$ и $V$ потпростори векторског простора $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, редом, где $n, m \in \mathbb{N}$. Бијекција $f : U \to V$ за коју је

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$,

за све $u, v \in U$ и све $\alpha \in \mathbb{R}$, назива се изоморфизам. Кажемо да је тада потпростор $U$ изоморфан са $V$ и то пишемо $U \cong V$.

Напомена: Услови 1. и 2. су еквивалентни са $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, за све $u, v \in U$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Пример: Идентичко пресликавање је изоморфизам.

Теорема 2.19 Изоморфизам пресликава нула вектор у нула вектор.

Доказ: Нека је $f : U \to V$ изоморфизам. За произвољно $u \in U$ је $f(0_U) = f(0u) = 0f(u) = 0_V$.

Теорема 2.20 За све потпросторе $U$, $V$ и $W$ важи:

1. $U \cong U$;
2. ако је $U \cong V$ онда је $V \cong U$;
3. ако је $U \cong V$ и $V \cong W$ онда је $U \cong W$.

Доказ: 1. због идентичког пресликавања. 2. инверзно пресликавање изоморфизма је изоморфизам. 3. композиција два изоморфизма је изоморфизам.

Теорема 2.21 Два потпростора су изоморфни ако и само ако имају исте димензије.

Доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $U \cong V$ и нека је $f : U \to V$ изоморфизам. Ако је $u_1, \ldots, u_n$ база за $U$ покажимо да је $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ база за $V$. За произвољно $v \in V$ постоји $u \in U$ тако да је $f(u) = v$ јер је $f$ изоморфизам па је ,,на". Сада је $v = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) =$

$\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$, па $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ јесте генераторни низ. Ако је за неке $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ испуњено $\alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n) = 0$ онда је $f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = 0 = f(0)$, па је $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$ јер је $f$ ,,1-1" јер је изоморфизам. Међутим онда је $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ јер је низ $u_1, \ldots, u_n$ линеарно независан. Зато је $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ линеарно независан, па је база. ($\Leftarrow$) Нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, редом такви да је $d(U) = d(V) = k$, за неке $k, n, m \in \mathbb{N}$. Посматрајмо базе $u_1, \ldots, u_k$ за $U$ и $v_1, \ldots, v_k$ за $V$. Дефинишимо пресликавање $f : U \to V$ са $f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$, за све $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Из јединствености приказивања сваког вектора као линеарне комбинације вектора базе следи да је $f$ ,,1-1" и ,,на", односно бијекција. Даље, за произвољне $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_k, \gamma \in \mathbb{R}$ је:

$f((\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) + (\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k)) = f((\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)u_k) = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)v_k = (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k) + f(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k)$.

$f(\gamma(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)) = f(\gamma\alpha_1 u_1 + \ldots + \gamma\alpha_k u_k) = \gamma\alpha_1 v_1 + \ldots + \gamma\alpha_k v_k = \gamma(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \gamma f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_k u_k)$.

Зато је $f$ изоморфизам.

## 2.4 Суме и пресеци потпростора

### 2.4.1 Пресек и унија потпростора

Пропозиција 2.3 Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је пресек произвољно много потпростора у $\mathbb{R}^n$ поново потпростор од $\mathbb{R}^n$.

Доказ: Тај пресек је непразан јер сваки од уочених потпростора садржи нула вектор. На основу дефиниције потпростора проверавамо да тај пресек јесте потпростор.

Пропозиција 2.4 Нека је $n \in \mathbb{N}$. Тада је пресек два потпростора у $\mathbb{R}^n$ највећи потпростор од $\mathbb{R}^n$ који је садржан у сваком од њих.

Доказ: Нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Јасно, $U \cap V \subseteq U, V$. Ако је потпростор $W$ такав да је $W \subseteq U, V$ онда је $W \subseteq U \cap V$.

Приметимо да унија два потпростора не мора бити потпростор. Погледајмо следећи пример. Посматрамо потпростор од $\mathbb{R}^2$ генерисан са $e_1$ и потпростор генерисан са $e_2$. Јасно $(1,1) = e_1 + e_2$ не припада њиховој унији.

Питање: Да ли постоји најмањи потпростор који садржи сваки од два уочена потпростора?

Дефиниција 2.13 Нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је $U + V = \{u + v \,|\, u \in U, v \in V\}$ сума потпростора $U$ и $V$.

Теорема 2.22 Сума два потпростора је најмањи потпростор који садржи та два потпростора.

Доказ: Нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. $0 = 0 + 0 \in U + V$, па је $U + V \neq \emptyset$. Ако $u_1, u_2 \in U$ и $v_1, v_2 \in V$ онда је $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \in U + V$, а за свако $\alpha \in \mathbb{R}$ имамо $\alpha(u_1 + v_1) = \alpha u_1 + \alpha v_1 \in U + V$, јер $\alpha u_1 \in U$ и $\alpha v_1 \in V$. Овим смо показали да је $U + V$ потпростор. Како $0 \in U, V$ то је $U, V \subseteq U + V$. Ако за неки потпростор $W$ важи $U, V \subseteq W$ онда је $U + V \subseteq W$ због дефиниције потпростора.

Теорема 2.23 Нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$, за неко $n \in \mathbb{N}$. Тада је $d(U) + d(V) = d(U + V) + d(U \cap V)$.

Доказ: Нека је $d(U) = m$, а $d(U \cap V) = k$. Како је $U \subseteq U + V$ и $U \cap V \subseteq V$ то се база $u_1, \ldots, u_m$ за $U$ може допунити до базе за $U + V$, а база $v_1, \ldots, v_k$ за $U \cap V$ се може допунити до базе $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ за $V$. Покажимо да је $u_1, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ база за $U+V$. Прво, покажимо да је $u_1, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ генераторни низ за $U+V$. За $x \in U+V$ је $x = u+v$, за неке $u \in U$ и $v \in V$, па је $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$, а $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_{k+t} v_{k+t}$. Приметимо да је $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k \in U$ јер $U \cap V \subseteq U$. Зато је $\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k = \gamma_1 u_1 + \ldots + \gamma_m u_m$, за неке $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$. Сада добијамо $x = (\alpha_1 + \gamma_1) u_1 + \ldots + (\alpha_m + \gamma_m) u_m + \beta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \beta_{k+t} v_{k+t}$, па је $u_1, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ генераторни низ за $U + V$. Претпоставимо сада да је низ $u_1, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ линеарно зависан. Тада постоје $\theta_1, \ldots, \theta_m, \delta_{k+1}, \ldots, \delta_{k+t} \in \mathbb{R}$ од којих бар један није нула такви да је $\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_m u_m + \delta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \delta_{k+t} v_{k+t} = 0$. Сада је $\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_m u_m = -\delta_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \delta_{k+t} v_{k+t}$, али

$\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_m u_m \in U$, а $\delta_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \delta_{k+t} v_{k+t} \in V$. Зато је $-\delta_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \delta_{k+t} v_{k+t} \in U \cap V$. Ако је $\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_m u_m = -\delta_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \delta_{k+t} v_{k+t} = 0$ добијамо $\theta_1 = \ldots = \theta_m = \delta_{k+1} = \ldots = \delta_{k+t} = 0$ јер је $u_1, \ldots, u_m$ линеарно независан низ, а $v_{k+1}, \ldots, v_{k+t}$ подниз линеарно независног низа па је линеарно независан. Уколико $\theta_1 u_1 + \ldots + \theta_m u_m \neq 0$ онда је $-\delta_{k+1} v_{k+1} - \ldots - \delta_{k+t} v_{k+t}$ линеарна комбинација вектора $v_1, \ldots, v_k$, а одавде је низ $v_1, \ldots, v_{k+t}$ линеарно зависан, а то је контрадикција јер знамо да је тај низ база за $V$.

Дефиниција 2.14 Ако потпростори $U$ и $V$ задовољавају услов $U \cap V = \{0\}$ онда се њихова сума назива директна сума и записује као $U \oplus V$.

Теорема 2.24 За потпросторе $U$ и $V$ такве да је $U \cap V = \{0\}$ испуњено је $d(U \oplus V) = d(U) + d(V)$.

Доказ: Последица претходне теореме.

Теорема 2.25 Сваки вектор из $U \oplus V$ се на јединствен начин може приказати као збир једног вектора из $U$ и једног вектора из $V$.

Доказ: Претпоставимо да постоје $u_1, u_2 \in U$ и $v_1, v_2 \in V$ такви да је $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Тада је $u_1 - u_2 = v_2 - v_1$, али лева страна је у $U$, а десна страна је вектор из $V$. Сума је директна па то морају бити нула вектори. Зато је $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$.

Напомена: Ако за $k \in \mathbb{N}$ дефинишемо $V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ ако је $(V_1 + \ldots + V_{i-1} + V_{i+1} + \ldots + V_k) \cap V_i = \{0\}$, за све $i \in \{1, \ldots, k\}$ онда за свако $x \in V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ постоје јединствени вектори $v_i \in V_i$ док $i \in \{1, \ldots, k\}$ такви да је $x = v_1 + \ldots + v_k$.

## 2.5 Линеарне функционеле

Дефиниција 2.15 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $V$ потпростор од $\mathbb{R}^n$. Пресликавање $f : V \to \mathbb{R}$ за које је

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$;

2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$;

за све $u, v \in V$ и све $\alpha \in \mathbb{R}$ назива се линеарна функционела.

Напомена: Услови 1. и 2. из претходне дефиниције могу се заменити условом $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, за све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и све $u, v \in V$.

Примери: Пресликавање које сваки вектор пресликава у нулу као реалан број јесте линеарна функционела ма ког потпростора. Ово пресликавање означавамо са $O$. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и нека је $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тада је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дато са $f((x_1, \ldots, x_n)) = x_i$ линеарна функционела.

Пропозиција 2.5 Свака линеарна функционела пресликава нула вектор у нулу.

Доказ: На основу особине 1. за линеарну функционелу $f$ неког потпростора $U$ имамо: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, па је $f(0) = 0$.

Теорема 2.26 Ако је $V$ потпростор од $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ са базом $v_1, \ldots, v_k$, где је $k \in \mathbb{N}$, онда постоји једна и само једна линеарна функционела $f : V \to \mathbb{R}$ таква да је $f(v_1) = a_1, \ldots, f(v_k) = a_k$, за дате $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Доказ: Дефинишимо $f : V \to \mathbb{R}$ са $f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k$, за све $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Проверимо да је $f$ линеарна функционела. Нека $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k, \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k \in V$ и $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Тада је

$$
\begin{aligned}
&f(\gamma(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) + \delta(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k)) \\
&= f((\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)v_1 + \ldots + (\gamma\alpha_k + \delta\beta_k)v_k) \\
&= (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)a_1 + \ldots + (\gamma\alpha_k + \delta\beta_k)a_k \\
&= \gamma(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k) + \delta(\beta_1 a_1 + \ldots + \beta_k a_k) \\
&= \gamma f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) + \delta f(\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_k v_k).
\end{aligned}
$$

Нека је $g : V \to \mathbb{R}$ линеарна функционела за коју је $g(v_1) = a_1, \ldots, g(v_k) = a_k$. Тада је за произвољан вектор $x \in V$ испуњено

$g(x) = g(\theta_1 v_1 + \ldots + \theta_k v_k) = \theta_1 g(v_1) + \ldots + \theta_k g(v_k) = \theta_1 a_1 + \ldots + \theta_k a_k = \theta_1 f(v_1) + \ldots + \theta_k f(v_k) = f(\theta_1 v_1 + \ldots + \theta_k v_k) = f(x)$.

Зато је $f = g$.

Теорема 2.27 Ако је скуп свих линеарних функционела потпростора $V$ од $\mathbb{R}^n$ означен са $Hom(V, \mathbb{R})$, а за све $f, g \in Hom(V, \mathbb{R})$ и све $\alpha \in \mathbb{R}$ је дефинисано $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ и $(\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, за све $x \in V$ онда важи:

1. $f + g = g + f$;
2. $(f + g) + h = f + (g + h)$;
3. $f + O = O + f = f$;
4. $f + (-f) = (-f) + f = O$;
5. $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$;
6. $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$;
7. $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$;
8. $1 \cdot f = f$,

за све $f, g, h \in Hom(V, \mathbb{R})$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Доказ: У питању су једнакости функција, које јасно имају једнаке домене и једнаке кодомене, остаје да се испита једнакост правила пресликавања. Показаћемо да важи особина 5, а остало остављамо читаоцу за вежбу. За произвољно $x \in V$ је $\alpha(f + g)(x) = \alpha((f + g)(x)) = \alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x) = (\alpha f + \alpha g)(x)$.

Дефиниција 2.16 Векторски простор $(Hom(V, \mathbb{R}), +, \cdot)$ се назива дуални векторски простор.

## 2.6 Унитарни потпростори

### 2.6.1 Скаларни производ

Дефиниција 2.17 Нека је $V$ потпростор од $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Пресликавање $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ за које је:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$;

4. $\langle x, x\rangle \geq 0$;

5. $\langle x, x\rangle = 0$ ако и само ако $x = 0$,

за све $x, y \in V$ и све $\alpha \in \mathbb{C}$, називамо унутрашњи или скаларни производ, а потпростор $V$ унитарни векторски потпростор.

Напомена: Ако уместо потпростора од $\mathbb{C}^n$ посматрамо потпростор од $\mathbb{R}^n$ онда је у питању Еуклидски векторски потпростор.

Примери: Стандардни скаларни производ у $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ је $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$, за све $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$; Специјално, стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$ је $\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$, за све $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.28 За све $n \in \mathbb{N}$ и све $x, y, z \in \mathbb{C}^n$ као и све $\alpha \in \mathbb{C}$ је:

1. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$;

2. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$;

3. $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.

Доказ: 1. $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$. 2. $\langle x, y + z\rangle = \overline{\langle y + z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle} = \overline{\langle y, x\rangle} + \overline{\langle z, x\rangle} = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$. 3. $\langle 0, x\rangle = \langle 0 + 0, x\rangle = \langle 0, x\rangle + \langle 0, x\rangle$, одавде је $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$ због прве особине.

### **2.6.2** Норма

Дефиниција 2.18 У унитарном потпростору $V$ од $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ пресликавање $||\bullet|| : V \to \mathbb{R}$ дефинисано са $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, за све $x \in V$ назива се норма.

Теорема 2.29 (Коши-Шварцова неједнакост) У унитарном потпростору $V$, за свако $x, y \in V$ важи неједнакост: $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Доказ: За све $x, y \in V$ и $\alpha \in \mathbb{C}$ имамо:

$\langle x-\alpha y, x-\alpha y\rangle \geq 0$, сада користећи особине скаларног производа добијамо:

$\langle x, x\rangle - \langle \alpha y, x\rangle - \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \geq 0$

$\langle x, x\rangle - \alpha\langle y, x\rangle - \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\overline{\alpha}\langle y, y\rangle \geq 0$, ако изаберемо $\alpha = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$, за $y \neq 0$, добијамо после потирања трећег и четвртог сабирка:

$\langle x, x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle} \geq 0$, множењем са $\langle y, y\rangle$, па потом применом $\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} = |\langle x, y\rangle|^2$ и кореновањем добијамо тражену неједнакост.

Приметимо да за $y = 0$ важи једнакост у датој неједнакости.

Пример: За $n \in \mathbb{N}$ и стандардни скаларни производ добијамо неједнакост:

$$|x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}| \leq \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}\sqrt{|y_1|^2 + \ldots + |y_n|^2}$$

у $\mathbb{C}^n$, а у $\mathbb{R}^n$ имамо: $|x_1y_1+\ldots+x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + \ldots + y_n^2}$.

Напомена: Једнакост у Коши-Шварцовој неједнакости важи кад год су вектори $x$ и $y$ колинеарни.

Теорема 2.30 У унитарном потпростору $V$ за све $x, y \in V$ и све $\alpha \in \mathbb{C}$ важи:

1. $||x|| \geq 0$;
2. $||x|| = 0$ ако и само ако је $x = 0$;
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Доказ: 1. и 2. следе директно из особина 4. и 5. скаларног производа. 3. $||\alpha x|| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x\rangle} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle} = \sqrt{|\alpha|^2\langle x, x\rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\alpha|||x||$ 4. $||x + y||^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + 2Re\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$

$\leq \langle x, x\rangle + 2|\langle x, y\rangle| + \langle y, y\rangle \leq \langle x, x\rangle + 2||x|| \cdot ||y|| + \langle y, y\rangle = ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$

Напомена: Особина 4. се назива и неједнакост троугла.

Дефиниција 2.19 Вектор се назива нормиран ако му је норма једнака јединици.

Теорема 2.31 Сваки ненула вектор се може нормирати.

Доказ: Помножимо га реципрочном вредности његове норме.

### **2.6.3** Ортогоналност

Приметимо да израз $\frac{|\langle x,y\rangle|}{||x||\cdot||y||}$ увек узима вредност из $[-1,1]$ у сваком унитарном потпростору.

Дефиниција 2.20 У Еуклидском потпростору угао између ненула вектора $x$ и $y$ је реалан број $\alpha \in [0,\pi]$ такав да је $\cos\alpha = \frac{|\langle x,y\rangle|}{||x||\cdot||y||}$.

Дефиниција 2.21 У унитарном потпростору $V$ за $x, y \in V$ кажемо да су ортогонални ако важи $\langle x, y\rangle = 0$.

Дефиниција 2.22 У унитарном потпростору се неки низ вектора назива ортогоналан ако су свака два вектора из тог низа међусобно ортогонална. Ортогоналан низ у коме је сваки вектор нормиран назива се ортонормирани низ.

Теорема 2.32 У унитарном потпростору је сваки ортогоналан низ који не садржи нула вектор линеарно независан.

Доказ: Нека је за неке $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ испуњено $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$, где је $a_1, \ldots, a_k$ ортогоналан низ. Сада је
$\langle \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k, a_j\rangle = \langle 0, a_j\rangle = 0$
$\langle \alpha_1 a_1, a_j\rangle + \ldots + \langle \alpha_k a_k, a_j\rangle = 0$
$\alpha_1\langle a_1, a_j\rangle + \ldots + \alpha_k\langle a_k, a_j\rangle = 0$

У овој једнакости је $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ за $i \neq j$ па је $\alpha_j\langle a_j, a_j\rangle = 0$, а одавде је $\alpha_j = 0$ јер је $\langle a_j, a_j\rangle \neq 0$ јер је $a_j \neq 0$. Тако мењајући $j \in \{1, \ldots, k\}$ добијамо да су сви коефицијенти алфе једнаке нули у полазној линеарној комбинацији.

Последица 2.5 Сваки ортонормирани низ је линеарно независан.

Теорема 2.33 Ако је $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ ортонормирана база унитарног потпростора $V$ онда је за свако $x \in V$ испуњено

$$x = \langle x, a_1\rangle a_1 + \ldots + \langle x, a_n\rangle a_n.$$

Доказ: Како је $a_1, \ldots, a_n$ база то постоје $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ такви да је $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$. Поступамо као у доказу претходне теореме.

Теорема 2.34 У унитарном потпростору $V$ са базом $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ скаларни производ за векторе $x = \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n$ и $y = \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n$ је $\langle x, y\rangle = \alpha_1 \overline{\beta_1} + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n}$ ако и само ако је база $a_1, \ldots, a_n$ ортонормирана.

Доказ: ($\Rightarrow$) Ако важи дата формула за скаларни производ онда је

$\langle a_i, a_j\rangle = 0$, за $i \neq j$, а $||a_i|| = \sqrt{\langle a_i, a_i\rangle} = 1$, па је база ортонормирана.

($\Leftarrow$) Ако је $(a_1, \ldots, a_n)$ ортонормирана база онда је

$\langle x, y\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n, \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n\rangle$

$= \langle \alpha_1 a_1, \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n\rangle + \ldots + \langle \alpha_n a_n, \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_n a_n\rangle$

$= \alpha_1 \overline{\beta_1} \langle a_1, a_1\rangle + \ldots + \alpha_n \overline{\beta_n} \langle a_n, a_n\rangle$.

Теорема 2.35 Сваки унитарни потпростор има ортонормирану базу.

Доказ: Показаћемо да увек постоји ортогонална база, а онда је можемо нормирати и добити ортогоналну базу. Нека је $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ једна база уоченог потпростора. Нову базу формирамо по формули (Грам-Шмитов поступак):

$b_k = a_k - \Sigma_{i=1}^{k-1} \frac{\langle a_k, b_i\rangle}{\langle b_i, b_i\rangle} b_i$,

за све $k = 2, \ldots, n$. Узимамо $b_1 = a_1$. Из формуле даље рачунамо $b_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, a_1\rangle}{\langle a_1, a_1\rangle} a_1$ и тако редом колико год има вектора у бази. Провером утврђујемо ортогоналност ових вектора. Сада је низ $b_1, \ldots, b_n$ ортогоналан, па је линеарно независан, а како садржи $n$ вектора као и полазна база мора бити база.

Пример: Стандардна база је ортонормирана у односу на стандардни скаларни производ.

Напомена: Ако Грам-шмитов поступак применимо на ортогоналан низ вектора добијамо исти низ вектора.

Дефиниција 2.23 Нека је $V$ унитарни потпростор и $\emptyset \neq S \subseteq V$. Скуп свих вектора из $V$ ортогоналних на сваки вектор из $S$ назива се ортогонални комплемент од $S$ и означава са $S^\perp$.

Теорема 2.36 Ортогонални комплемент је потпростор.

Доказ: Нека је $\emptyset \neq S \subseteq V$. Јасно, $0 \in S^{\perp}$. Нека $x, y \in S^{\perp}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ онда је за произвољно $v \in S$ испуњено $\langle \alpha x + \beta y, v\rangle = \alpha\langle x, v\rangle + \beta\langle y, v\rangle = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, па $\alpha x + \beta y \in S^{\perp}$.

Пример: У $\mathbb{R}^2$ је $\mathcal{L}(e_2)$ ортогонални комплемент од $\mathcal{L}(e_1)$.

Теорема 2.37 Ако је $W$ потпростор унитарног потпростора $V$, $d(V) = n$, $n \in \mathbb{N}$, онда је $W \oplus W^{\perp} = V$.

Доказ: Сума је директна јер ако $x \in W \cap W^{\perp}$ онда је $\langle x, x\rangle = 0$ па је $x = 0$. Нека је $v_1, \ldots, v_k$ ортогонална база за $W$, $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ база за $V$. Грам-шмитовим поступком добијамо ортогоналну базу $u_1, \ldots, u_n$ за $V$, при чему је $u_1 = v_1, \ldots, u_k = v_k$ ортогонална база за $W$. Сада $u_{k+1}, \ldots, u_n \in W^{\perp}$ и представљају линеарно независан низ јер су ортогоналан низ па је $d(W^{\perp}) \geq n - k$. Одавде је $d(V) \geq d(W \oplus W^{\perp}) = d(W) + d(W^{\perp}) \geq k + (n-k) = n = d(V)$, јер је свакако $W \oplus W^{\perp} \subseteq V$. Како смо добили и да је $d(W \oplus W^{\perp}) = d(V)$ то је $W \oplus W^{\perp} = V$.

Пример: Због претходног примера имамо $\mathcal{L}(e_1) \oplus \mathcal{L}(e_2) = \mathbb{R}^2$.

Теорема 2.38 За сваки потпростор $U$ унитарног простора $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$ важи $(U^{\perp})^{\perp} = U$.

Доказ: По дефиницији ортогоналног комплемента је $U \subseteq (U^{\perp})^{\perp}$, јер ако $x \in U$ онда за све $y \in U^{\perp}$ имамо $\langle x, y\rangle = 0$ па $x \in (U^{\perp})^{\perp}$. Приметимо $d(U) + d(U^{\perp}) = n = d(U^{\perp}) + d((U^{\perp})^{\perp})$, па је $d(U) = d((U^{\perp})^{\perp})$. Зато следи тврдња.

Дефиниција 2.24 У унитарном потпростору $V$ нека је $V = W \oplus W^{\perp}$. Тада се јединствени вектори $w_1 \in W$ и $w_2 \in W^{\perp}$ за произвољан вектор $v \in V$ такви да је $v = w_1 + w_2$ називају ортогоналне пројекције вектора $v$ на $W$ и $W^{\perp}$, редом.

Пример: Ортогонална пројекција $(2, 5)$ на $\mathcal{L}(e_1)$ је $(2, 0)$, а ортогонална пројекција на $\mathcal{L}(e_2)$ је $(0, 5)$.

Глава 3

# ЛИНЕАРНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ И МАТРИЦЕ

## 3.1 Линеарне трансформације

Дефиниција 3.1 Нека $n, m \in \mathbb{N}$ и нека су $U$ и $V$ потпростори од $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$, редом. Пресликавање $f : U \to V$ за које важи:

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$,

за све $u, v \in U$ и све $\alpha \in \mathbb{R}$ назива се линеарна трансформација или линеарно пресликавање.

Напомена: Услови 1. и 2. претходне дефиниције еквивалентни су са условом $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, за све $u, v \in U$ и све $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Скуп свих линеарних трансформација потпростора $U$ у потпростор $V$ означаваћемо са $Hom(U, V)$, а ако је $U = V$ онда са $End(U)$.

Примери: Сваки изоморфизам је линеарна трансформација. Идентичко пресликавање ћемо означавати са $E$. Пресликавање које све векторе пресликава у нула вектор је линеарна трансформација и означава се са $O$. Свака линеарна функционела јесте линеарна трансформација. Пресликавање $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дато са $f(x, y) = (y, x)$, за све $x, y \in \mathbb{R}$ јесте линеарна трансформација. Међутим пресликавање $f(x, y) = (x^2, y)$ векторског простора $\mathbb{R}^2$ у себе сама линеарна трансформација јер не испуњава услове 1. и 2. дефиниције, на пример $f(2(1,1)) = (4,2) \neq (2,2) = 2(1,1) = 2f((1,1))$.

Теорема 3.1 Ако је $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ база потпростора $U$, а $b_1, \ldots, b_n \in V$ онда постоји једна и само једна линеарна трансформација $f : U \to V$ за коју је $f(a_1) = b_1, \ldots, f(a_n) = b_n$.

Доказ: Аналоган доказу за одговарајућу теорему за линеарне функционеле.

Дефиниција 3.2 Нека је $f : U \to V$ линеарна трансформација потпростора $U$ у потпростор $V$. Тада скуп свих вектора из $U$ који се пресликавају у нула вектор из $V$ називамо језгро линеарне трансформације у ознаци $Kerf$.

$Kerf = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$.

Пример: $KerO = \{U\}$, $Kerf = \{0\}$ ако је $f$ „1-1".

Дефиниција 3.3 Нека је $f : U \to V$ линеарна трансформација потпростора $U$ у потпростор $V$. Тада скуп свих вектора из $V$ у који се пресликава неки вектор из $U$ називамо имиџ линеарне трансформације у ознаци $Imf$.

$Imf = \{x \in V \mid (\exists y \in U) f(y) = x\}$.

Пример: Имиџ нула трансформације је нула потпростор. Имиџ изоморфизма је цео кодомен.

Теорема 3.2 Језгро је потпростор домена, а имиџ је потпростор кодомена линеарне трансформације.

Доказ: Нека је $f : U \to V$, где су $U$ и $V$ потпростори. Приметимо најпре да је $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$, па је $f(0) = 0$. Зато, $0 \in Kerf$, па је $\emptyset \neq Kerf \subseteq U$. Ако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u, v \in Kerf$ онда је $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$, па $\alpha u + \beta v \in Kerf$. Ако $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $u, v \in Imf$ онда постоје $a, b \in U$ такви да је $f(a) = u$ и $f(b) = v$ па је$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha u + \beta v$, па $\alpha u + \beta v \in Imf$. Како је $U \neq \emptyset$ то је $\emptyset \neq Imf \subseteq V$. Овим смо показали да су $Kerf$ и $Imf$ потпростори од $U$ и $V$, редом.

Теорема 3.3 За линеарну трансформацију $f : U \to V$ важи $d(Kerf) + d(Imf) = d(U)$.

Доказ: Нека је $d(Kerf) = m$ и $d(U) = n$, како је $Kerf$ потпростор од $U$, $m \leq n$ и његова база $u_1, \ldots, u_m$ се може допунити до базе $u_1, \ldots, u_n$, потпростора $U$. Покажимо да је $f(u_{m+1}), \ldots, f(u_n)$ база за $Imf$. Нека $v \in Imf$ тада постоји $u \in U$ такво да је $f(u) = v$. Знамо да је $u = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$, а онда је $v = f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$. Како $u_1, \ldots, u_m \in Kerf$ то је $f(u_1) = \ldots = f(u_m) = 0$ па је $v = \alpha_{m+1} f(u_{m+1}) + \ldots + \alpha_n f(u_n)$. Зато је $f(u_{m+1}), \ldots, f(u_n)$ генераторни низ за $Imf$. Нека су сада $\theta_{m+1}, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$ такви да је $\theta_{m+1} f(u_{m+1}) + \ldots + \theta_n f(u_n) = 0$. Онда је $f(\theta_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \theta_n u_n) = f(0) = 0$, па $\theta_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \theta_n u_n \in Kerf$ али онда је $\theta_{m+1} u_{m+1} + \ldots + \theta_n u_n$ линеарна комбинација вектора $u_1, \ldots, u_m$, па је низ $u_1, \ldots, u_n$ линеарно зависан. Ово је контрадикција са претпоставком да је $u_1, \ldots, u_n$ база. Остаје да је $f(u_{m+1}), \ldots, f(u_n)$ линеарно независан низ па је база за $Imf$. Зато је $d(Imf) = n - m$ па важи тражена једнакост.

Дефиниција 3.4 Димензија имиџа назива се ранг, а димензија језгра нулитет линеарне трансформације.

Дефиниција 3.5 Ако су $A, B \in Hom(U, V)$, где су $U$ и $V$ неки потпростори, а $\alpha \in \mathbb{R}$ онда дефинишемо збир линеарних трансформација $A$ и $B$ са $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$, за све $x \in U$ и умножак линеарне трансформације $A$ скаларом $\alpha$ са $(\alpha A)(x) = \alpha \cdot A(x)$, за све $x \in U$.

Пропозиција 3.1 Ако су $A, B \in Hom(U, V)$, где су $U$ и $V$ неки потпростори, а $\alpha \in \mathbb{R}$ онда $A + B, \alpha A \in Hom(U, V)$.

Доказ: Нека $x, y \in U$ и нека $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Тада за $A, B \in Hom(U, V)$ имамо $(A + B)(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) + B(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) + \alpha B(x) + \beta B(y) = \alpha(A(x) + B(x)) + \beta(A(y) + B(y)) = \alpha(A+B)(x) + \beta(A+B)(y)$. Даље, $(\alpha A)(\beta x + \gamma y) = \alpha(\beta A(x) + \gamma A(y)) = \alpha\beta A(x) + \alpha\gamma A(y) = \beta(\alpha A)(x) + \gamma(\alpha A)(y)$.

Теорема 3.4 Нека је $V$ потпростор. За све $A, B, C \in End(V)$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ је:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3. $A + O = O + A = A$;

4. $A + (-A) = (-A) + A = O$, где је $-A = (-1)A$;

5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;

8. $1 \cdot A = A$.

Доказ: 6. $(\alpha + \beta)A(x) = \alpha \cdot A(x) + \beta \cdot A(x) = (\alpha A)(x) + (\beta A)(x) = (\alpha A + \beta A)(x)$, за све $x \in V$. Слично доказујемо остале тврдње.

Напомена: Претходна теорема важи и ако узмемо $A, B, C \in Hom(U, V)$ за неке различите потпросторе $U$ и $V$.

Дефиниција 3.6 Нека је $V$ потпростор и $A, B \in End(V)$. Тада је $AB : V \to V$ дефинисано са $AB(x) = A(B(x))$, за све $x \in V$.

Пропозиција 3.2 Нека је $V$ потпростор и $A, B \in End(V)$. Тада је $AB \in End(V)$.

Доказ: Нека $x, y \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тада је $AB(\alpha x + \beta y) = A(B(\alpha x + \beta y)) = A(\alpha B(x) + \beta B(y)) = \alpha A(B(x)) + \beta A(B(y)) = \alpha AB(x) + \beta AB(y)$. Зато $AB \in End(V)$.

Теорема 3.5 Нека је $V$ потпростор и $A, B, C \in End(V)$. Тада је $(AB)C = A(BC)$, $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$, $EA = AE = A$.

Доказ: Проверавамо по дефиницији.

Дефиниција 3.7 Нека је $V$ потпростор. Тада се $A \in End(V)$ назива регуларна ако постоји трансформација $B$ таква да је $AB = BA = E$ и тада $B$ зовемо инверзна трансформација. Иначе је $A$ сингуларна.

Теорема 3.6 Линеарна трансформација је регуларна ако и само ако је бијекција и у том случају инверзна трансформација постоји јединствено.

Доказ: Знамо да функција има инверзну ако и само ако је бијекција.

Приметимо да свака регуларна линеарна трансформација јесте изоморфизам, а да важи и обратно ако је у питању изоморфизам потпростора у себе сама.

Теорема 3.7 Ако је $A$ регуларна линеарна трансформација, а $B$ њена инверзна трансформација, онда је и $B$ линеарна трансформација.

Доказ: Нека је $AB = BA = E$ за неке $A, B \in End(V)$ и неки потпростор $V$. Нека $x, y \in V$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ сада је $A(B(\alpha x + \beta y)) = AB(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha AB(x) + \beta AB(y) = A(\alpha B(x) + \beta B(y))$. Сада како је $A$ регуларна то је бијекција па је инјекција па добијамо $B(\alpha x + \beta y) = \alpha B(x) + \beta B(y)$.

Напомена: Инверзну трансформацију за регуларну линеарну трансформацију $A$ означавамо са $A^{-1}$.

Теорема 3.8 Нека је $V$ потпростор и $A \in End(V)$. Следећи услови су еквивалентни:

1. $A$ је регуларна;
2. $ImA = V$;
3. $KerA = \{0\}$;
4. $A$ је ињекција;
5. Ако је $a_1, \ldots, a_n$, $n \in \mathbb{N}$ база за $V$ онда је то и $A(a_1), \ldots, A(a_n)$.

Доказ: 1. $\Rightarrow$ 2. $A$ је бијекција па и ,,на" па је $ImA = V$. 2. $\Rightarrow$ 3. Услов даје да је $d(KerA) = 0$, па је $KerA = \{0\}$. 3. $\Rightarrow$ 4. Нека је $A(u) = A(v)$. Тада је $A(u - v) = 0$ па $u - v \in KerA$ па је по претпоставци $u - v = 0$, односно $u = v$. 4. $\Rightarrow$ 5. Ако је $\alpha_1 A(a_1) + \ldots + \alpha_n A(a_n) = 0$ онда је $A(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n) = A(0)$ па је због инјективности $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n = 0$ па је $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Како је $d(V) = n$ то је $A(a_1), \ldots, A(a_n)$ база. 5. $\Rightarrow$ 1. Под овом претпоставком је испуњено 2., а тиме и 3. па је $A$ бијекција, па је регуларна.

Теорема 3.9 Производ две регуларне линеарне трансформације је регуларна линеарна трансформација.

Доказ: Композиција бијекција је бијекција.

Напомена: Инверзна трансформација за $AB$, где су и $A$ и $B$ регуларне линеарне трансформације је $B^{-1}A^{-1}$.

Теорема 3.10 Ако је $V$ потпростор и $A \in End(V)$, а $B : V \to V$ таква да је $AB = E$ онда је и $BA = E$ и $A$ је регуларна линеарна трансформација и $B = A^{-1}$.

Доказ: Из $AB = E$ закључујемо да је $A$ ,,на" односно да је $ImA = V$. По теореми знамо да је онда $A$ регуларна па постоји јединствено $C \in End(V)$ такво да је $AC = CA = E$. Сада је $C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B$, па је $BA = CA = E$.

## 3.2 Матрице

### 3.2.1 Дефиниција и операције са матрицама

Дефиниција 3.8 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Реална матрица формата $m \times n$ је правоугаона таблица или шема реалних бројева која има $m$ врста и $n$ колона:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Елементе $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ називамо елементима матрице. Матрице означавамо великим штампаним словима латинице. Наведену матрицу једноставније записујемо и као $[a_{ij}]_{m \times n}$. Матрицу $[a]_{1 \times 1}$ идентификујемо са елементом $a$. Скуп свих реалних матрица формата $m \times n$ означавамо са $\mathbb{R}^{m,n}$. Ако је $m = n$ матрица је квадратна и кажемо да је реда $n$, уместо формата $n \times n$. Ако је $m \neq n$ матрица је правоугаона.

Напомена: На исти начин дефинишемо комплексне матрице и уводимо одговарајуће ознаке.

Пример: $\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3,2}$

Дефиниција 3.9 Матрицу која има на свим местима нуле називамо нула матрица и означавамо са $O$. Квадратну матрицу која на главној дијагонали има јединице, а на осталим местима нуле називамо јединична матрица и означавамо са $E$.

Дефиниција 3.10 Две матрице су једнаке ако су истог формата и ако су одговарајући елементи једнаки.

Дефиниција 3.11 Нека $m, n \in \mathbb{N}$, $[a_{ij}]_{m\times n}, [b_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{R}^{m,n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је $[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$ и $\alpha[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$.

Теорема 3.11 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Тада за све $A, B, C \in \mathbb{R}^{m,n}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ важи:

1. $A + B = B + A$;
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3. $A + O = O + A = A$;
4. $A + (-A) = (-A) + A = O$, где је $-A = (-1)A$;
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
7. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
8. $1 \cdot A = A$.

Доказ: Нека су $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m\times n}$. Покажимо 5. $\alpha(A + B) = \alpha([a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}) = \alpha[a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} = [\alpha(a_{ij} + b_{ij})]_{m\times n} = [\alpha a_{ij} + \alpha b_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n} + [\alpha b_{ij}]_{m\times n} = \alpha[a_{ij}]_{m\times n} + \alpha[b_{ij}]_{m\times n} = \alpha A + \alpha B$. Остала својства доказујемо аналогно.

Напомена: Приметимо да су особине 1. до 8. особине које имају вектори, па се квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ могу посматрати као $n^2$-торке јер се сабирање и множење бројем такође поклапа са векторима.

Дефиниција 3.12 Нека су $m, n, p \in \mathbb{N}$, а $[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m,n}$ и $[b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,p}$. Тада је $[a_{ij}]_{m\times n} \cdot [b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij}]_{m\times p}$, где је $c_{ij} = \Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $i \in \{1,\ldots,m\}$ и $j \in \{1,\ldots,p\}$.

Теорема 3.12 Нека су $m, n, p, r \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B, D \in \mathbb{R}^{n,p}$, $C \in \mathbb{R}^{p,r}$. Тада је

1. $AE = EA = A$;
2. $(AB)C = A(BC)$;
3. $A(B + D) = AB + AD$;
4. $(B + D)C = BC + DC$.

Доказ: Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{n\times p}$, $C = [c_{ij}]_{p\times r}$, $D = [d_{ij}]_{n\times p}$.

2. $(AB)C = [\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{m\times p}[c_{ij}]_{p\times r} = [\Sigma_{l=1}^{p}(\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kl})c_{lj}]_{m\times r} = [\Sigma_{l=1}^{p}\Sigma_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kl})c_{lj}]_{m\times r} = [\Sigma_{l=1}^{p}\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kl}c_{lj})]_{m\times r}$
$= [\Sigma_{k=1}^{n}\Sigma_{l=1}^{p} a_{ik}(b_{kl}c_{lj})]_{m\times r} = [\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}\Sigma_{l=1}^{p} b_{kl}c_{lj}]_{m\times r}$
$= [a_{ij}]_{m\times n}[\Sigma_{l=1}^{p} b_{il}c_{lj}]_{n\times r} = A(BC)$.

3. $A(B + D) = [a_{ij}]_{m\times n}([b_{ij}]_{n\times p} + [d_{ij}]_{n\times p}) = [a_{ij}]_{m\times n}[b_{ij} + d_{ij}]_{n\times p} = [\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+d_{kj})]_{m\times p} = [\Sigma_{k=1}^{n}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}d_{kj})]_{m\times p} = [\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{m\times p} + [\Sigma_{k=1}^{n} a_{ik}d_{kj}]_{m\times p} = AB + AD$

Аналогно показујемо особине 1. и 4.

Напомена: Производ матрица није комутативан. Погледајмо следећи пример: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Дефиниција 3.13 Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Ако је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ онда је $A^t = [a_{ij}^t]_{n\times m}$, где је $a_{ij}^t = a_{ji}$, за све $i \in \{1,\ldots,m\}$ и $j \in \{1,\ldots,n\}$. Матрица $A^t$ се назива транспонована матрица матрице $A$.

Напомена: У литератури се транспонована матрица матрице $A$ обележава и са $A^T$ или $A'$.

Пример: $E^t = E, O^t = O$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Теорема 3.13 Нека су $m, n, p \in \mathbb{N}$. Ако $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$, $C \in \mathbb{R}^{n,p}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ онда је:

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$;
3. $(AC)^t = C^t A^t$.

Доказ:
3. Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, а $C = [c_{ij}]_{n\times p}$. Сада је $(AC)^t = [(\Sigma_{k=1}^n a_{ik}c_{kj})^t] = [\Sigma_{k=1}^n a_{jk}c_{ki}] = [\Sigma_{k=1}^n a_{kj}^t c_{ik}^t] = [\Sigma_{k=1}^n c_{ik}^t a_{kj}^t] = C^t A^t$.

Дефиниција 3.14 Нека је $n \in \mathbb{N}$. За квадратну матрицу $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ дефинишемо $tr(A) = \Sigma_{i=1}^n a_{ii}$ и називамо траг матрице $A$.

Пример: Траг јединичне матрице једнак је њеном реду.

Теорема 3.14 Нека је $n \in \mathbb{N}$. Ако $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ онда је:

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$;
3. $tr(AB) = tr(BA)$.

Доказ: Нека је $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, а $B = [b_{ij}]_{n\times n}$.
1. $tr(A+B) = \Sigma_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \Sigma_{i=1}^n a_{ii} + \Sigma_{i=1}^n b_{ii} = tr(A) + tr(B)$.

### 3.2.2 Матрице и линеарне трансформације

Дефиниција 3.15 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $v \in V$, где је $V$ потпорстор димензије $n \in \mathbb{N}$. Уочимо једну базу $B$ за $V$ и у односу на ту базу нека су $v_1, \ldots, v_n$ координате од $v$. Тада се матрица $\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}_B$ назива координатна колона вектора $v$ у датој бази $B$ и краће записује као $[v]_B$. Када је јасно о којој бази је реч ознаку у индексу изостављамо.

Напомена: Координатне колоне су $n$-торке само записане вертикално уместо хоризонтално и сабирамо их и множимо бројем као и на уобичајен начин записане $n$-торке. На снази остају све особине које имају $n$-торке у односу на сабирање и множење бројем.

Теорема 3.15 Нека је $A : V \to V$ линеарна трансформација потпростора $V$, димензије $n \in \mathbb{N}$. Тада постоје бројеви $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$ којима је $A$ јединствено одређена.

Доказ: Нека је $v_1, \ldots, v_n$ база потпростора $V$. Из раније теореме знамо да је свака линеарна трансформација јединствено одређена сликама вектора базе. Како се сваки вектор на једиствен начин може представити као линеарна комбинација вектора базе, то важи и за векторе $A(v_1), \ldots, A(v_n)$. Зато јединствено постоје бројеви $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$ за које је $A(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n, A(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n, \ldots, A(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$.

Дефиниција 3.16 Нека је $A : V \to V$ линеарна трансформација потпростора $V$ са базом $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Ако је $A(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n, A(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n, \ldots, A(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$ онда се матрица $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ назива матрица трансформације $A$ у бази $B$ и означава са $[A]_B$. Ознаку базе изостављамо без конфузије.

Теорема 3.16 Нека је $A : V \to V$ линеарна трансформација потпростора $V$ са базом $B$ димензије $n \in \mathbb{N}$. Тада за произвољан вектор $x = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ важи $[A(x)]_B = [A]_B[x]_B$.

Доказ: Нека је $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ база за $V$ и $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ матрица трансформације $A$. Тада је $A(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n, A(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n, \ldots, A(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$. Сада је за неко $x \in V$, $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$, па је $A(x) = x_1A(v_1) + \ldots + x_nA(v_n) = x_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n) + x_2(\alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n) + \ldots + x_n(\alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n)$. Када измножимо заграде и групишемо уз в-ове добијамо: $A(x) = (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \ldots + x_n\alpha_{1n})v_1 + (x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_n\alpha_{2n})v_2 + \ldots + (x_1\alpha_{n1} + x_2\alpha_{n2} + \ldots + x_n\alpha_{nn})v_n$. Зато је координатна колона вектора $A(x) = \begin{bmatrix} x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \ldots + x_n\alpha_{1n} \\ x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_n\alpha_{2n} \\ \vdots \\ x_1\alpha_{n1} + x_2\alpha_{n2} + \ldots + x_n\alpha_{nn} \end{bmatrix}$, то се са друге стране поклапа са производом $[A][x]$.

Пример: Матрица линеарне трансформације $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ дате са $A(x, y) = (y, x)$ у стандардној бази је: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ јер је $A(e_1) = e_2$ и $A(e_2) = e_1$.

Теорема 3.17 Нека је $U$ потпростор, $A, B \in End(U)$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Тада је:

1. $[A + B] = [A] + [B]$;
2. $[\alpha A] = \alpha[A]$;
3. $[AB] = [A][B]$.

Доказ:

3. Нека је $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ база за $U$ и $[\alpha_{ij}]_{n\times n}$ матрица трансформације $A$, а $[\beta_{ij}]_{n\times n}$ матрица трансформације $B$. Тада је $A(v_1) = \alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n, A(v_2) = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n, \ldots, A(v_n) = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$ и $B(v_1) = \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 + \ldots + \beta_{n1}v_n, B(v_2) = \beta_{12}v_1 + \beta_{22}v_2 + \ldots + \beta_{n2}v_n, \ldots, B(v_n) = \beta_{1n}v_1 + \beta_{2n}v_2 + \ldots + \beta_{nn}v_n$. Сада је $A(B(v_1)) = \beta_{11}A(v_1) + \beta_{21}A(v_2) + \ldots + \beta_{n1}A(v_n)$, $A(B(v_2)) = \beta_{12}A(v_1) + \beta_{22}A(v_2) + \ldots + \beta_{n2}A(v_n)$ и тако даље $A(B(v_n)) = \beta_{1n}A(v_1) + \beta_{2n}A(v_2) + \ldots + \beta_{nn}A(v_n)$. Одавде је

$AB(v_j) = \beta_{1j}(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n) + \beta_{2j}(\alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n) + \ldots + \beta_{nj}(\alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n)$

$= (\alpha_{11}\beta_{1j} + \alpha_{12}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{nj})v_1 + (\alpha_{21}\beta_{1j} + \alpha_{22}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{nj})v_2 + \ldots + (\alpha_{n1}\beta_{1j} + \alpha_{n2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{nj})v_n$, за све $j \in \{1, \ldots, n\}$. Приметимо да $j$-та колона матрице $[AB]$ јесте управо

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{1j} + \alpha_{12}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{nj} \\ \alpha_{21}\beta_{1j} + \alpha_{22}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{nj} \\ \vdots \\ \alpha_{n1}\beta_{1j} + \alpha_{n2}\beta_{2j} + \ldots + \alpha_{nn}\beta_{nj} \end{bmatrix}.$$

### 3.2.3 Регуларне матрице

Дефиниција 3.17 Квадратна матрица $A$ је регуларна ако постоји квадратна матрица $B$ истог реда таква да је $AB = BA = E$. У супротном матрицу називамо сингуларна.

Пример: Јединична матрица је регуларна, јер је $EE = E$, а нула матрица је сингуларна, јер је $XO = OX = O$, за све квадратне матрице $X$ истог реда као $O$.

Теорема 3.18 Нека је $V$ потпростор. Линеарна трансформација $A \in End(V)$ је регуларна ако и само ако је њена матрица регуларна.

Доказ:

($\Rightarrow$) Ако је $A$ регуларна онда постоји линеарна трансформација $B$ таква да је $AB = BA = E$, па је $[AB] = [BA] = [E]$ односно $[A][B] = [B][A] = [E]$. Зато је $[A]$ регуларна матрица.

($\Leftarrow$) Ако је $[A]$ регуларна матрица, онда постоји матрица $B$, која јесте матрица неке линеарне трансформације означимо је исто са $B$, таква да је $[A]B = B[A] = E$, односно $[A][B] = [B][A] = [E]$, па је $[AB] = [BA] = [E]$, па је $AB = BA = E$. Зато је $A$ регуларна линеарна трансформација.

Теорема 3.19 Квадратна матрица $A$ је регуларна ако и само ако постоји квадратна матрица $B$ истог реда таква да је $AB = E$.

Доказ: Ако је $A$ регуларна матрица онда је испуњено $AB = E$. Ако је $AB = E$ онда је $[A][B] = [E]$, па је $A$ регуларна линеарна трансформација по теореми 3.18, па је $A$ регуларна матрица.

Теорема 3.20 Квадратна матрица $A$ је регуларна ако постоји квадратна матрица $B$ истог реда таква да је $BA = E$.

Доказ: Аналогно доказу претходне теореме.

Теорема 3.21 За дату регуларну квадратну матрицу $A$ јединствено постоји матрица $B$ за коју је $AB = BA = E$.

Доказ: Последица је теореме да је матрица линеарне трансформације у датој бази јединствено одређена и јединствености инверзне линеарне трансформације.

Дефиниција 3.18 Јединствена матрица $B$ за матрицу $A$ из претходне теореме назива се инверзна матрица матрице $A$ и означава са $A^{-1}$.

Теорема 3.22 Матрица инверзне линеарне трансформације једнака је инверзној матрици матрице полазне линеарне трансформације.

Доказ:

Нека је $A \in End(V)$ за неки потпростор $V$ и $A^{-1}$ њена инверзна трансформација. Како је $[A][A^{-1}] = [AA^{-1}] = E = [A^{-1}A] = [A^{-1}][A]$ и $[A]^{-1}$ јединствена, то мора бити $[A^{-1}] = [A]^{-1}$.

Теорема 3.23 Нека је $D$ регуларна квадратна матрица и $A$ произвољна матрица истог формата. Тада је:

1. $(D^{-1})^t = (D^t)^{-1}$;
2. $tr(D^{-1}AD) = tr(A)$.

Доказ:

1. Знамо да је $DD^{-1} = D^{-1}D = E$ па транспоновањем ових једнакости применом теореме 3.13 под 3, добијамо $D^t(D^{-1})^t = (D^{-1})^t D^t = E^t = E$, али је и $D^t(D^t)^{-1} = (D^t)^{-1}D^t = E$, па због јединствености инверзне матрице за $D^t$ добијамо тражену једнакост.

2. По особини 3. из раније теореме која каже да је $tr(XY) = tr(YX)$ имамо $tr(D^{-1}(AD)) = tr((AD)D^{-1}) = tr(A)$.

Дефиниција 3.19 Нека је $n \in \mathbb{N}$. Детерминанта квадратне матрице $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ је $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$, у ознаци $det(A)$ или $|A|$.

Теорема 3.24 Ако је детерминанта квадратне матрице различита од нуле онда је она регуларна.

Доказ:

Квадратна матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$, је регуларна ако и само ако је линеарна трансформација њоме одређена, у ознаци исто $A$, регуларна. То је еквивалентно са $KerA = \{0\}$. Ово је еквивалентно са $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, односно са тим да хомогени квадратни систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

има само тривијално решење, а ово је по Крамеровој теореми тачно ако је детерминанта тог система различита од нуле, односно $|A| \neq 0$.

## 3.3 Ранг матрице

### 3.3.1 Потпростори врста и колона и минори

Дефиниција 3.20 Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$. Тада је $\mathcal{L}((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$ потпростор од $\mathbb{R}^n$ и назива се потпростор врста, а $\mathcal{L}((a_{11}, \ldots, a_{m1}), \ldots, (a_{1n}, \ldots, a_{mn}))$ потпростор од $\mathbb{R}^m$ и назива се потпростор колона матрице $A$.

Дефиниција 3.21 Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, и нека $m, n \in \mathbb{N}$. Тада је за $k \leq min\{m, n\}$ подматрица типа $k \times k$ матрице $A$ квадратна матрица реда $k$ која се од $A$ добија изостављањем $m-k$ врста и $n-k$ колона. Детерминанта те подматрице назива се минор реда $k$.

Напомена: Овај појам минора је општији од појма минора који је коришћен за алгебарски комплемент (кофактор) у Лапласовом развоју детерминанте по врсти односно колони. Ти минори су у смислу претходне дефиниције детерминанте подматрица реда за један мањег од реда матрице чија је детерминанта баш она која се посматра.

Пример: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$ је један минор реда 2 матрице $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Дефиниција 3.22 Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и нека је $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Природан број $r$ је ранг по минорима матрице $A$ ако су сви минори реда већег од $r$ једнаки нули, а постоји минор реда $r$ различит од нуле. Ранг по минорима нула матрице је нула.

Пример: Ранг по минорима јединичне матрице једнак је реду те матрице. Ранг по минорима матрице $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ је 1.

Теорема 3.25 Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и нека је $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Нека је $r \in \mathbb{N}$ ранг по минорима матрице $A$ и нека је $M \neq 0$ минор реда $r$. Тада се свака врста (колона) као $n$-торка ($m$-торка) може представити као линеарна комбинација оних врста (колона) које учествују у минору $M$.

Доказ: Нека је $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Без умањења општости узећемо да је $M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$. Посматрајмо сад детерминанту $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$. Како је ранг по минорима $r$, а ред детерминанте $D$ је $r+1$, мора бити $D = 0$. Развијањем $D$ по последњој врсти добијамо $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ir}A_{ir} + a_{ij}M = 0$. Како је $M \neq 0$ то је $a_{ij} = (-\frac{A_{i1}}{M})a_{i1} + \ldots + (-\frac{A_{ir}}{M})a_{ir}$. Јасно, $-\frac{A_{i1}}{M}, \ldots, -\frac{A_{ir}}{M}$ не зависе од $i$, па их можемо означити редом са $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, па добијамо $a_{ij} = \lambda_1 a_{i1} + \ldots + \lambda_r a_{ir}$, за све $i \in \{1, \ldots, m\}$. Зато је $j$-та колона линеарна комбинација првих $r$ колона. Аналогно показујемо за врсте.

Теорема 3.26 Детерминанта је различита од нуле ако и само ако њене врсте (колоне) чине линеарно независан низ.

Доказ: Ако врсте образују линеарно зависан низ $n$-торки, онда постоји њихова линеарна комбинација једнака нули. Нека је $\lambda \in \mathbb{R}$ онај коефицијент у тој линеарној комбинацији који није нула. Помножимо најпре одговарајућу врсту ове детерминанте $D$ са $\lambda$, тиме је нова вредност $\lambda D$. Користећи особине детерминанте добијамо да се вредност не мења додавајући уоченој врсти преостале врсте претходно помножене коефицијентима из линеарне комбинације. Тиме је добијена нула врста у $\lambda D$ па је $\lambda D = 0$, односно $D = 0$. Аналогно показујемо за колоне. Контрапозицијом је овим доказано да ако је $D \neq 0$ врсте (колоне) образују линеарно независан низ $n$-торки. Претпоставимо да је сада $D = 0$, то даје да је ранг по минорима одговарајуће матрице мањи од реда детерминанте, па постоји минор различит од нуле. По претходној теореми се онда врста (колона) која не учествује у том минору може приказати као линеарна комбинација врста (колона) из тог минора, па врсте (колоне) образују линеарно зависан низ. Поново контрапозицијом добјамо други смер тврђења.

Дефиниција 3.23 Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ и $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Димензија потпростора од $\mathbb{R}^n$ генерисаног врстама матрице $A$ назива се ранг по врстама матрице $A$. Димензија потпростора од $\mathbb{R}^m$ генерисаног колонама матрице $A$ назива се ранг по колонама матрице $A$.

Пропозиција 3.3 Ранг по врстама матрице је максималан број њених линеарно независних врста, а ранг по колонама матрице је максималан број њених линеарно независних колона.

Доказ: На основу раније теореме и претходне дефиниције.

Теорема 3.27 Ранг по врстама, колонама и минорима за сваку матрицу су једнаки.

Доказ: Нека је $r \in \mathbb{N}$ ранг матрице $A$ по минорима. Тада знамо да постоји минор реда $r$ различит од нуле и да се свака друга врста (колона) може изразити као линеарна комбинација тих $r$ врста (колона), а да су тих $r$ врста (колона) које учествују у том минору линеарно независан низ по претходне две теореме. Зато су ранг по врстама и колонама такође $r$. Ранг по врстама и колонама нула матрице је нула.

Дефиниција 3.24 Сваки од три уведена ранга називамо ранг матрице и означавамо са $r(A)$, за произвољну матрицу $A$.

### 3.3.2 Елементарне трансформације и матрице

Дефиниција 3.25 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Елементарне трансформације неке матрице из $\mathbb{R}^{m,n}$ су:

1. замена места две врсте (колоне);
2. множење неке врсте (колоне) бројем различитим од нуле;

3. додавање елемената неке врсте (колоне) претходно помножених неким бројем одговарајућим елементима неке друге врсте (колоне).

Дефиниција 3.26 Елементарне матрице су матрице добијене од јединичне матрице вршењем тачно једне од наведених елементарних трансформација. $E_{ij}$ је матрица добијена од $E$ заменом $i$-те и $j$-те врсте (колоне). $E_i(k)$ је матрица добијена од $E$ множењем $i$-те врсте (колоне) бројем $k \neq 0$. $E_{ij}(k)$ је матрица добијена од $E$ додавањем $i$-тој врсти $j$-те врсте помножене претходно бројем $k$. $E'_{ij}(k)$ је матрица добијена од $E$ додавањем $i$-тој колони $j$-те колоне помножене претходно бројем $k$.

Теорема 3.28 $E_{ij}^t = E_{ij}$, $E_i(k)^t = E_i(k)$ и $E'_{ij}(k) = E_{ji}(k) = E_{ij}(k)^t$.

Доказ: Директном провером.

Теорема 3.29 Све елементарне матрице су регуларне и њихове инверзне матрице су такође елементарне матрице.

Доказ: Ова тврдња је последица једнакости: $E_{ij}E_{ij} = E$, $E_i(k)E_i(\frac{1}{k}) = E$ и $E_{ij}(k)E_{ij}(-k) = E$.

Теорема 3.30 Нека је $m, n \in \mathbb{N}$ и $A \in \mathbb{R}^{m,n}$. Ако је $P \in \mathbb{R}^{m,m}$ елементарна матрица добијена од $E$ елементарном трансформацијом на врстама онда је $PA$ матрица добијена од $A$ истом елементарном трансформацијом. Аналогно, ако је $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ елементарна матрица добијена од $E$ елементарном трансформацијом на колонама онда је $AQ$ матрица добијена од $A$ истом елементарном трансформацијом.

Доказ: Из дефиниције производа матрица.

Теорема 3.31 Елементарним трансформацијама се ранг матрице не мења.

Доказ: Елементарним трансформацијама на врстама не мења се ранг по врстама, јер врсте као торке после примене сваке од три наведене елементарне трансформације генеришу исти потпростор који су генерисале пре примене елементарне трансформације. На исти начин елементарним трансформацијама на колонама не мења се ранг по колонама, а они су једнаки и једнаки су рангу по минорима.

Теорема 3.32 Свака матрица се применом елементарних трансформација своди на матрицу

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Број јединица у овој матрици једнак је рангу полазне матрице.

Доказ: Ако је у питању нула матрица њен ранг је нула и она има наведени облик. Ако матрица $[a_{ij}]_{m\times n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, није нула онда постоји елемент који није нула и њега елементарним трансформацијама заменама врста односно колона доводимо на место елемента $a_{11}$. Зато без умањења општости претпоставимо да је $a_{11} \neq 0$. Сада прву врсту множимо са $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и додајемо другој врсти. Исти поступак понављамо за све преостале врсте. Тако добијамо матрицу која у првој колони има све нуле осим елемента $a_{11}$. Сада множимо прву колону са $-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ и додајемо другој колони и тако редом за све преостале колоне. Тиме у првој врсти добијамо све нуле осим $a_{11}$. Сада посматрамо подматрицу добијену од новонастале брисањем прве врсте и прве колоне. Ако је она нула матрица поступак је завршен, а ако није понављамо описани поступак све док се добија подматрица која није нула матрица. Тако добијамо матрицу $\begin{bmatrix} a'_{11} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a'_{rr} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Сад множењем

$i$-те врсте са $\frac{1}{a'_{ii}}$, за $i \in \{1, \dots, r\}$ добијамо наведени облик матрице која има ранг $r$ и полазна матрица има исти ранг због претходне теореме.

Напомена: Означимо матрицу са $r$ јединица на главној дијагонали и свим осталим елементима једнаким нули, која се помиње у претходној теореми, са $J_r$.

Теорема 3.33 Ранг линеарне трансформације једнак је рангу матрице те линеарне трансформације.

Доказ: Нека је $V$ потпростор димензије $n \in \mathbb{N}$ и $A \in End(V)$. Ранг од $A$ је $d(ImA)$, а то је димензија потпростора генерисаног са $A(v_1), \dots, A(v_n)$,а то је ранг (по колонама) матрице $[A]$ у бази $v_1, \dots, v_n$ за $V$.

Теорема 3.34 Квадратна матрица је регуларна ако и само ако се елементарним трансформацијама може свести на јединичну матрицу.

Доказ: По дефиницији регуларности матрица можемо директно проверити да било која матрица која има све нуле осим неколико јединица на главној дијагонали може бити регуларна једино ако је то баш јединична матрица. По теореми 3.32, знамо да постоје регуларне матрице $P$ и $Q$ које су једнаке производима елементарних матрица које одговарају елементарним трансформацијама које вршимо на полазној матрици $A$ реда $n \in \mathbb{N}$, да добијемо матрицу која има све нуле осим $r$ јединица на главној дијагонали, где је $r = r(A)$. Зато је $PAQ = J_r$, односно $A = P^{-1} J_r Q^{-1}$. Из ових матричних једнакости директно следи тврдња.

Последица 3.1 Квадратна матрица је регуларна ако и само ако је њен ранг једнак њеном реду.

Доказ: Из претходне теореме.

Теорема 3.35 Квадратна матрица је регуларна ако и само ако је њена детерминанта различита од нуле.

Доказ: Ако је детерминанта квадратне матрице различита од нуле показали смо раније да је она регуларна. Ако је регуларна онда је њен ранг (по минорима) једнак реду, па је њена детерминанта различита од нуле.

Дефиниција 3.27 Разлика између реда и ранга квадратне матрице назива се нулитет те матрице. Нулитет квадратне матрице $A$ означавамо са $\nu(A)$.

Теорема 3.36 Нулитет линеарне трансформације једнак је нулитету њене матрице.

Доказ: Последица једнакости $d(KerA) + d(ImA) = d(V)$, за потпростор $V$ и $A \in End(V)$ и тврдње да је ранг линеарне трансформације једнак рангу њене матрице.

Теорема 3.37 Свака регуларна матрица је производ елементарних матрица.

Доказ: По теореми знамо да се регуларна матрица $A$ елементарним трансформацијама доводи до $E$. По ранијој теореми знамо да примена елементарне трансформације на врсти односно колони јесте множење матрице са леве односне десне стране одговарајућом елементарном матрицом. Према томе постоје елементарне матрице $E_1, \ldots, E_k$ и $E'_1, \ldots, E'_m$ такве да је $E_1 \cdot \ldots \cdot E_k A E'_1 \cdot \cdots \ldots \cdot E'_m = E$, а како је свака елементарна матрица регуларна, то множењем са одговарајућим инверзним матрицама последњу једнакост, добијамо тврђење.

Теорема 3.38 За сваке две квадратне матрице $A$ и $B$ истог реда, ако је $B$ елементарна матрица онда је $|AB| = |A||B|$.

Доказ: Постоје три могућности за матрицу $B$:

1. $B = E_{ij}$: тада је $|E_{ij}| = -1$, а по особинама детерминанти је $|AE_{ij}| = -|A|$, па је испуњено $|AE_{ij}| = |A||E_{ij}|$.

2. $B = E(k)$: тада је $|E_i(k)| = k$, а по особинама детерминанти је $|AE_i(k)| = k|A|$, па је испуњено $|AE_i(k)| = |A||E_i(k)|$.

3. $B = E'_{ij}(k)$: тада је $|E'_{ij}(k)| = 1$, а по особинама детерминанти је $|AE'_{ij}(k)| = |A|$, па је испуњено $|AE'_{ij}(k)| = |A||E'_{ij}(k)|$.

Теорема 3.39 За сваке две квадратне матрице $A$ и $B$ истог реда је $|AB| = |A||B|$.

Доказ: Ако је $B$ регуларна онда знамо да је $B = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k$ за неко $k \in \mathbb{N}$ и неке елементарне матрице $E_1, \ldots, E_k$. Па је $|AB| = |AE_1 \cdot \ldots \cdot E_k| = |AE_1 \cdot \ldots \cdot E_{k-1}||E_k| = \ldots = |A||E_1| \cdot \ldots \cdot |E_k| = |A||E_1E_2||E_3 \cdot \ldots \cdot E_k| = \ldots = |A||B|$.

Ако је $B$ сингуларна онда је $|B| = 0$. Претпоставимо да је $AB$ регуларна. Тада постоји матрица $X$ истог реда, таква да је $XAB = E$, али онда је и $B$ регуларна. Контрадикција. Зато је $AB$ сингуларна, па је $|AB| = 0$, па важи тражена једнакост.

Последица 3.2 Детерминанта инверзне матрице је реципрочна вредност детерминанте полазне матрице.

Доказ: Нека је $A$ регуларна матрица тада је $|A| \neq 0$ и $AA^{-1} = E$, па је $|AA^{-1}| = |E|$, односно $|A||A^{-1}| = |E|$, а одавде следи тврдња.

Дефиниција 3.28 Нека $m, n \in \mathbb{N}$ и нека су $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Тада је матрица $A$ еквивалентна матрици $B$, записујемо $A \sim B$, ако постоје регуларне матрице $P \in \mathbb{R}^{m,m}$ и $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ тако да је $B = PAQ$.

Теорема 3.40 Нека $m, n \in \mathbb{N}$. Релација $\sim$ је релација еквиваленције на $\mathbb{R}^{m,n}$.

Доказ: Рефлексивност: $A = EAE$. Симетричност: Ако је $B = PAQ$ онда је $A = P^{-1}BQ^{-1}$ и $P^{-1}, Q^{-1}$ су регуларне јер су $P$ и $Q$ регуларне. Транзитивност: Ако је $B = PAQ$ и $C = RBS$ онда је $C = (RP)A(QS)$ и $RP, QS$ су регуларне јер су $R, P, Q, S$ регуларне матрице.

Теорема 3.41 Две матрице истог формата су еквивалентне ако и само ако се елементарним трансформацијама могу свести једна на другу.

Доказ: Ако се елементарним трансформацијама матрица $A$ може свести на матрицу $B$ онда постоје елементарне матрице којима матрицу $A$ множимо са леве односно десне стране и добијамо $B$. Производи тих елементарних матрица са леве односно десне стране матрице $A$ представљају регуларне матрице $P$ и $Q$ такве да је $B = PAQ$. Обратно ако је $B = PAQ$, знамо да су онда регуларне матрице $P$ и $Q$ производи елементарних матрица, па се онда $B$ од $A$ добија елементарним трансформацијама па је $A \sim B$.

Последица 3.3 Две матрице истог формата су еквивалентне ако и само ако имају исти ранг.

Доказ: Обе матрице еквивалентне су истој матрици са нулама и јединицама евентуално на главној дијагонали из раније теореме.

Напомена: Због претходне теореме класе еквиваленције у односу на релацију $\sim$ за матрице формата $m \times n$ су: матрице ранга 0, ранга 1,..., матрице ранга $min\{m, n\}$. За представнике класа узимамо: нула матрицу, матрицу која има само у горњем левом углу јединицу а остало нуле, матрицу која има само на прва два места на главној дијагонали јединице а остало нуле,..., матрицу која има на првих $min\{m, n\}$ места на главној дијагонали јединице, а остало нуле.

### 3.3.3 Особине ранга

Теорема 3.42 Ранг матрице се не мења ако се она помножи регуларном матрицом.

Доказ: Тврдња је последица теорема да је свака регуларна матрица производ елементарних матрица и да применом елементарних трансформација не мењамо ранг матрице.

Теорема 3.43 Ако $m, n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ онда је $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

Доказ: Нека су $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ колоне матрице $A$, а $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^m$ колоне матрице $B$. Тада је $r(A) = d(\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n))$ и $r(B) = d(\mathcal{L}(b_1, \dots, b_n))$. Даље, $a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n \in \mathbb{R}^m$ су колоне матрице $A + B$, па је $r(A + B) = d(\mathcal{L}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n))$. Приметимо да је $\mathcal{L}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \subseteq \mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) + \mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)$. Зато је $d(\mathcal{L}(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)) \leq d(\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n) + \mathcal{L}(b_1, \dots, b_n)) \leq d(\mathcal{L}(a_1, \dots, a_n)) +$

$d(\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_n))$, по теореми о димензији суме и пресека потпростора.

Последица 3.4 Ако $m, n \in \mathbb{N}$ и $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ онда је $r(A \mp B) \geq |r(A) - r(B)|$.

Доказ: Посматрамо матрице $B$ и $A - B$ и примењујемо претходну теорему. Добијамо $r(B) + r(A - B) \geq r(B + (A - B)) = r(A)$. Зато је $r(A - B) \geq r(A) - r(B)$. Аналогно је $r((B - A) + A) \leq r(B - A) + r(A)$ па је $r(B - A) \geq r(B) - r(A)$, а како је $r(X) = r(-X)$ за све матрице $X$ то је $r(A - B) \geq -(r(A) - r(B))$. Зато је $r(A - B) \geq |r(A) - r(B)|$. За доказ $r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|$ уврстимо $-B$ уместо $B$ у доказану неједнакост.

Теорема 3.44 Ако $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n,p}$ онда је $r(AB) \leq min\{r(A), r(B)\}$.

Доказ: Нека су $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, даље нека су $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$ $m$-торке колоне матрице $A$ и $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^p$ $p$-торке врсте матрице $B$. Сада је $r(AB)$ димензија потпростора од $\mathbb{R}^p$ генерисаног врстама од $AB$, а то је уствари димензија потпростора генерисаног са $a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n, \ldots, a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n$, а овај потпорстор је сигурно подскуп од потпростора генерисаног са $b_1, \ldots, b_n$ па је $r(AB) \leq r(B)$. Аналогно посматрамо потпростор $a_1b_{11} + a_2b_{21} + \ldots + a_nb_{n1}, \ldots, a_1b_{1p} + a_2b_{2p} + \ldots + a_nb_{np}$, а овај потпорстор је сигурно подскуп од потпростора генерисаног са $a_1, \ldots, a_n$ па је $r(AB) \leq r(A)$.

Теорема 3.45 Нека су $A, B \in End(V)$, за неки потпростор $V$. Тада је $r([B][A]) = r([A]) - d(ImA \cap KerB)$.

Доказ: Заправо треба показати да је $d(ImBA) = d(ImA) - d(ImA \cap KerB)$. Посматрајмо линеарну трансформацију $B' : ImA \to V$ дату са $B'(x) = B(x)$, за све $x \in ImA$. Знамо да је $d(KerB') + d(ImB') = d(ImA)$. Приметимо да је $KerB' = ImA \cap KerB$, а $ImB' = ImBA$. Одавде добијамо тврдњу.

Последица 3.5 Нека су $A, B \in End(V)$, за неки потпростор $V$ димензије $n \in \mathbb{N}$. Тада је $r([B][A]) \geq r([A]) + r([B]) - n$.

Доказ: Знамо да је $r([B]) = d(ImB) = n - d(KerB)$. Сада имамо $d(KerB) = n - r([B])$ и $d(ImA \cap KerB) = r([A]) - r([B][A])$. Јасно да је $ImA \cap KerB \subseteq KerB$, па је $d(ImA \cap KerB) \leq d(KerB)$. Одавде је $r([A]) - r([B][A]) \leq n - r([B])$, па следи неједнакост.

Теорема 3.46 (Силвестерова неједнакост) Нека су $A$ и $B$ квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$. Ако је $\nu$ нулитет матрице онда је $\nu(AB) \leq \nu(A) + \nu(B)$.

Доказ: По уведеној ознаци је $\nu(AB) = n - r(AB)$, $\nu(A) = n - r(A)$ и $\nu(B) = n - r(B)$. Из претходне последице је $r(AB) \geq r(A) + r(B) - n$, па је $r(AB) - n \geq r(A) - n + r(B) - n$, одавде је $\nu(AB) \leq \nu(A) + \nu(B)$.

### **3.3.4** Примене ранга матрице у системима једначина

Дефиниција 3.29 Нека су $m, n \in \mathbb{N}$. За систем једначина по $x_1, \ldots, x_n$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

је $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ матрица система једначина, а $\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$ проширена матрица система једначина.

Теорема 3.47 (Кронекер-Капелијева) Систем једначина је сагласан ако и само ако је ранг матрице система једнак рангу проширене матрице система. Специјално, ако је тај ранг једнак броју непознатих онда је систем одређен, а уколико је тај ранг мањи од броја непознатих онда је тај систем неодређен.

Доказ: Нека су $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$ и $b = (b_1, \ldots, b_m)$. Тада је горњи систем једначина сагласан ако и само ако постоје бројеви $x_1, \ldots, x_n$ такви да је $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, ово је еквивалентно са $b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)$, еквивалентно са $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n) = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n, b)$, а ово је еквивалентно са $d(\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)) = d(\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n, b))$, еквивалентно са $r(A) = r(\overline{A})$. Уколико је $r(A) = n$, а $m > n$ онда су једначине од $n + 1$.-ве до $m$-те линеарне комбинације првих $n$ једначина, па се могу одбацити, а квадратни систем има детерминанту различиту од нуле јер је $A$ регуларна матрица пошто јој је ранг једнак реду, па по Крамеровој теореми систем има јединствено решење. Уколико је $r(A) < n$ онда су вектор колоне $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$ линеарно зависне, па постоји више решења.

Пример: За систем једначина

$$2x + 3y = 4$$

$$4x + 6y = 5$$

матрица система је $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, ранга 1, а проширена матрица система је $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, ранга 2. Како имају различите рангове то је систем противречан.

Теорема 3.48 Хомогени систем има нетривијална решења ако и само ако је ранг матрице система мањи од броја непознатих система.

Доказ: Овде посматрамо систем једначина:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0$$

Нека су $a_1 = (a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}), \ldots, a_n = (a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{mn})$. Тада овај систем има нетривијално решење ако и само ако $(\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R})((x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0) \wedge a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0)$ а то је ако и само ако су вектори $a_1, \ldots, a_n$ линеарно зависни односно ако и само ако је $d(\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_n)) < n$ односно ако и само ако је $r(A) < n$.

Последица 3.6 Ако је у хомогеном систему број једначина мањи од броја непознатих, онда систем има нетривијалних решења.

Доказ: Матрица система је тада формата $m \times n$, за неке $m, n \in \mathbb{N}$ где је $m < n$, па је ранг те матрице највише $m$ па тиме мањи од $n$ па по претходној теореми постоје нетривијална решења.

Последица 3.7 У квадратном хомогеном систему постоје нетривијална решења ако и само ако је детерминанта тог система једнака нули.

Доказ: Ако је детерминанта једнака нули онда је ранг матрице система мањи од броја непознатих па по претходној теореми постоје нетривијална решења. По Крамеровој теореми знамо да ако је детерминанта различита од нуле постоји само тривијално решење.

## 3.4 Промена базе

Дефиниција 3.30 Нека је $V$ потпростор димензије $n \in \mathbb{N}$. Ако су $v_1, \ldots, v_n$ и $u_1, \ldots, u_n$ прва и друга база редом, а $u_1 = \alpha_{11}v_1 +$

$\alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n$, $u_2 = \alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n$ и тако даље, $u_n = \alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n$, онда се матрица

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

назива матрица прелаза са прве на другу базу.

Пропозиција 3.4 Ако је $T_{12}$ матрица прелаза са прве на другу базу, $[x]_1$ вектор $x$ у првој бази, а $[x]_2$ вектор $x$ у другој бази онда је $[x]_1 = T_{12}[x]_2$.

Доказ: Директно из дефиниције матрице прелаза. Нека је $x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n$. Заменом сваког од овектора базе $u_1, \ldots, u_n$ одговарајућом линеарном комбинацијом добијамо $x = x_1(\alpha_{11}v_1 + \alpha_{21}v_2 + \ldots + \alpha_{n1}v_n) + x_2(\alpha_{12}v_1 + \alpha_{22}v_2 + \ldots + \alpha_{n2}v_n) + \ldots + x_n(\alpha_{1n}v_1 + \alpha_{2n}v_2 + \ldots + \alpha_{nn}v_n) = (x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + \ldots + x_n\alpha_{1n})v_1 + (x_1\alpha_{21} + x_2\alpha_{22} + \ldots + x_n\alpha_{2n})v_2 + \ldots + (x_1\alpha_{n1} + x_2\alpha_{n2} + \ldots + x_n\alpha_{nn})v_n$. Ови коефицијенти за $x$ у бази $v_1, \ldots, v_n$ се добијају управо из производа $T_{12}[x]_2$.

Пример: Нека је $u_1 = (1,2,3), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,2,0)$ једна база од $\mathbb{R}^3$. Тада је матрица прелаза са стандардне базе на базу $u_1, u_2, u_3$ дата са

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

јер је $u_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, u_2 = e_1 + e_3, u_3 = 2e_2$.

Последица 3.8 Матрица $T_{12}$ је регуларна и њој инверзна матрица је $T_{21}$.

Доказ: Знамо да је $[x]_1 = T_{12}[x]_2$ и $[x]_2 = T_{21}[x]_1$. Одавде је $[x]_1 = T_{12}T_{21}[x]_1$. Како ова једнакост важи за сваки вектор $x$, онда уврштавајући редом $e_1, \ldots, e_n$ у ту једнакост добијамо да су редом колоне ове матрице једнаке колонама матрице $E$. Зато је $T_{12}T_{21} = E$, па су ове матрице једна другој инверзне.

Пример: Нека је $u_1, u_2, u_3$ база од $\mathbb{R}^3$ из претходног примера. Тада је матрица прелаза са те базе на стандардну базу $e_1, e_2, e_3$ дата са

$$T_{21} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

јер је $e_1 = -\frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 + \frac{1}{2}u_3, e_2 = \frac{1}{2}u_3, e_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{2}u_3$.

Теорема 3.49 Нека је $[A]_1$ матрица линеарне трансформације $A$ у првој бази, а $[A]_2$ матрица те линеарне трансформације у другој бази. Тада је $[A]_1 = T_{12}[A]_2T_{21}$.

Доказ: $[A]_1[x]_1 = [A(x)]_1 = T_{12}[A(x)]_2 = T_{12}[A]_2[x]_2 = T_{12}[A]_2T_{21}[x]_1$. Одавде следи тврдња као у претходном доказу јер та једнакост вреди за све векторе $x$.

Последица 3.9 Детерминанта линеарне трансформације не зависи од базе.

Доказ: Нека су $[A]_1$ и $[A]_2$ матрице линеарне трансформације у некакве две базе потпростора. По претходној теореми имамо $[A]_1 = T_{12}[A]_2T_{21}$, па је $|[A]_1| = |T_{12}[A]_2T_{21}| = |T_{12}||[A]_2||T_{21}|$. Како је $T_{21} = T_{12}^{-1}$, то је $|T_{21}| = \frac{1}{|T_{12}|}$, па је $|[A]_1| = |[A]_2|$.

## 3.5 Адјунгована матрица

Дефиниција 3.31 Ако је $A = [a_{ij}]$ квадратна матрица реда $n \geq 2$ и ако је са $A_{ij}$ означен кофактор елемента $a_{ij}$ у $|A|$ онда се матрица $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$ назива адјунгована матрица матрице $A$ и означава са $adjA$ или $A^*$.

Пример: $\begin{bmatrix} 2 & 11 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Теорема 3.50 Нека је $A$ квадратна матрица реда $n \geq 2$. Тада је $AA^* = A^*A = |A|E$.

Доказ: Нека је $A = [a_{ij}]_{n\times n}$. Сада је

$$AA^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \Sigma_{i=1}^n a_{1i}A_{1i} & \Sigma_{i=1}^n a_{1i}A_{2i} & \dots & \Sigma_{i=1}^n a_{1i}A_{ni} \\ \Sigma_{i=1}^n a_{2i}A_{1i} & \Sigma_{i=1}^n a_{2i}A_{2i} & \dots & \Sigma_{i=1}^n a_{2i}A_{ni} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i=1}^n a_{ni}A_{1i} & \Sigma_{i=1}^n a_{ni}A_{2i} & \dots & \Sigma_{i=1}^n a_{ni}A_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{bmatrix} = |A|E.$$

Овде смо користили Лапласов развој. Другу једнакост показујемо аналогно.

Последица 3.10 Ако је $A$ регуларна онда је $|A^*| = |A|^{n-1}$.

Доказ: Како је $AA^* = |A|E$ то је $|AA^*| = ||A|E|$, па је $|A||A^*| = |A|^n$, а одавде добијамо једнакост.

Теорема 3.51 За квадратне матрице $A$ и $B$ реда $n \geq 2$ је $(AB)^* = B^*A^*$.

Доказ: (само за регуларне матрице)

Ако су $A$ и $B$ регуларне матрице онда имамо $AB(AB)^* = |AB|E$, па је $AB(AB)^* = |A||B|E$, а одавде је $A^*AB(AB)^* = |A||B|A^*$, па је $|A|EB(AB)^* = |A||B|A^*$, односно $B(AB)^* = |B|A^*$, даље је $B^*B(AB)^* = |B|B^*A^*$, $|B|E(AB)^* = |B|B^*A^*$, и онда добијамо тврдњу.

Теорема 3.52 Нека је $A$ квадратна матрица реда $n \geq 2$. Тада је:

1. $r(A) \leq n-2 \Rightarrow r(A^*) = 0$;
2. $r(A) = n-1 \Rightarrow r(A^*) = 1$;
3. $r(A) = n \Rightarrow r(A^*) = n$.

Доказ: 1. Сви минори реда $n-1$ су нуле па су сви кофактори нуле па је $A^* = O$. 3. У овом случају је $|A| \neq 0$, па је по претходној последици и $|A^*| \neq 0$. 2. Знамо да је $0 = r(O) = r(AA^*) \geq r(A) + r(A^*) - n$ из неједнакости о рангу производа. Одавде је $r(A^*) \leq 1$. Како је $r(A) = n-1$ то постоји бар један минор реда $n-1$ који није нула, па је $A^* \neq O$ па остаје $r(A^*) = 1$.

Последица 3.11 За сваку квадратну матрицу $A$ реда $n \geq 2$ је $|A^*| = |A|^{n-1}$.

Доказ: За сингуларну матрицу имамо због 1. и 2. претходне теореме да је $|A^*| = 0$ као и $|A| = 0$. За регуларну квадратну матрицу смо раније показали.

Теорема 3.53 За сваку квадратну матрицу $A$ реда $n \geq 2$ је:

1. $(A^*)^* = A$, за $n = 2$;
2. $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$, за $n \geq 3$.

Доказ: 1. Директно проверавамо. 2. Ако је $A$ регуларна онда је $|A| \neq 0$ па је $A^*(A^*)^* = |A^*|E$ па је $AA^*(A^*)^* = |A^*|A$, а одавде је $|A|E(A^*)^* = |A^*|A$. Користећи теорему о детерминанти адјунговане матрице добијамо $|A|(A^*)^* = |A|^{n-1}A$, па следи тврдња. Уколико је $A$ сингуларна онда је $|A| = 0$ па је $r(A) \leq n-1$. Одавде је по теореми 3.52 $r(A^*) \leq 1 \leq n-2$ па је поново по 1. теореме 3.52 $r((A^*)^*) = 0$ и зато је $(A^*)^* = O$ па важи једнакост.

## 3.6 Инверзна матрица

У овом одељку дајемо неке поступке за одређивање инверзне матрице.

Теорема 3.54 Нека је $A$ регуларна квадратна матрица. Тада је $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

Доказ: Из раније теореме знамо да је $AA^* = |A|E$, па како је код регуларне матрице $|A| \neq 0$ дељењем са $|A|$ добијамо тврдњу.

Пример: Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, тада је $|A| = 4$, а алгебрски комплементи редом $A_{11} = -2$, $A_{12} = 6$, $A_{13} = 2$, $A_{21} = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -2$ и $A_{33} = -2$. Зато је $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Напомена: Ову теорему користимо код матрица реда до три, јер за матрице већег реда израчунавање адјунговане матрице захтева извршавање великог броја множења и сабирања.

Други начин да нађемо инверзну матрицу квадратне матрице $A$ реда $n \in \mathbb{N}$ је да решимо одговарајућу матричну једначину $AX = E$. Матрицу $X$ записујемо преко колона $X_1, \ldots, X_n$ и добијамо $n$ система $AX_1 = e_1 \wedge \ldots \wedge AX_n = e_n$ који су сви квадратни са $n$ непознатих и решавамо их Гаусовим поступком елиминације.

Пример: Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Потражимо $A^{-1}$ решавајући матричну једначину $AX = E$. Нека је $X = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$. Тада добијамо $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, а одавде систем једначина

$$x + y = 1$$

$$z + t = 0$$

$$x + 2y = 0$$

$$z + 2t = 1$$

чије је јединствено решење $(2, -1, -1, 1)$, па је $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Теорема 3.55 Свака регуларна матрица може се свести на јединичну матрицу елементарним трансформацијама само на врстама.

Доказ: Како је $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ регуларна матрица то у првој колони сигурно постоји елемент који није нула и кога заменом одговарајућих врста доводимо на место $a_{11}$. Зато без умањења општости претпостављамо да је $a_{11} \neq 0$. Сада множимо прву врсту са $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \ldots, -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$ и додајемо редом другој и тако даље до $n$-те врсте. Тако добијамо све нуле у првој колони осим $a_{11}$. Затим у другој колони постоји ненула елемент међу новодобијенима $a'_{22}, \ldots, a'_{2n}$, иначе би прве две колоне биле линеарно зависне па ранг не би био једнак реду матрице. Тај ненула елемент доводимо на место $a'_{22}$ и испод њега добијамо нуле истим поступком као у првој колони. Потом другу врсту помножену са $-\frac{a_{12}}{a'_{22}}$ додајемо првој врсти. Поступак понављамо за сваку врсту до $n$-те. На крају сваку врсту помножимо одговарајућим коефицијентом да добијемо јединичну матрицу.

Напомена: Примертимо да по претходној теореми и теореми 3.32 за сваку регуларну матрицу $A$ постоји регуларна матрица $P$ тако да је $E = PA$, где је матрица $P$ једнака производу елементарних матрица које одговарају елементраним трансформацијама на врстама помоћу којих се $A$ своди на $E$. Зато је $P = A^{-1}$ односно $PE = A^{-1}$. Ово нам даје следећи поступак за одређивање инверзне матрице. Поред матрице дописујемо јединичну и вршимо елементарне трансформације како је описано у доказу претходне теореме и на матрици и на дописаној јединичној матрици. Када од полазне матрице добијемо јединичну, оно што смо добили од јединичне дописане матрице је онда инверзна матрица полазне матрице. Ово је најчешћи поступак за тражење инверзне матрице.

Пример: Потражимо за матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, инверзну поступком из доказа претходне теореме. Дописаћемо са десне стране јединичну матрицу

$$E_{12}(-2)E_{13}(-3)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim E_{32}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim E_{23}(-1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim E_3(\frac{1}{2})E_2(-\frac{1}{2})\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$E_{21}(-1)\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [E \,|\, A^{-1}].$$

Глава 4

# КАРАКТЕРИСТИЧНИ КОРЕНИ И ВЕКТОРИ

## 4.1 О полиномима

Дефиниција 4.1 Нека $n \in \mathbb{N}$ и нека $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, где је $a_n \neq 0$. Тада пресликавање $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ за које је $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, за све $x \in \mathbb{R}$ називамо полином по $x$ са реалним коефицијентима. Коефицијент $a_0$ се назива слободни члан. Коефицијент $a_n$ назива се водећи коефицијент, јер је $a_n x^n$ водећи члан. Број $n$ назива се степен полинома $p$. Степен нула полинома није дефинисан.

Напомена: Аналогно дефинишемо полиноме са комплексним коефицијентима. Скуп свих полинома по $x$ са реалним коефицијентима означавамо са $\mathbb{R}[x]$, са комплексним коефицијентима са $\mathbb{C}[x]$ са целобројним коефицијентма са $\mathbb{Z}[x]$ и са рационалним коефицијентима са $\mathbb{Q}[x]$.

Пример: $3x^5 - x + 7$ је полином петог степена по $x$, са реалним коефицијентима, а $ix + 1 - 2i$ је линеаран полином по $x$ са комплексним коефицијентима.

Дефиниција 4.2 Два полинома су једнака ако имају исти степен и исте коефицијенте уз одговарајуће степене.

Дефиниција 4.3 Нека $p \in \mathbb{R}[x]$. Број $\alpha \in \mathbb{C}$ назива се нула полинома $p$ ако је $p(\alpha) = 0$. Нека $k \in \mathbb{N}$. Тада је $\alpha$ нула полинома $p$ вишеструкости $k$ ако је $p(x) = (x - \alpha)^k q(x)$ и $\alpha$ није нула полинома $q$.

Пример: 1 је трострука нула полинома $x^3-3x^2+3x-1$ јер је $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$.

Теорема 4.1 Сваки полином са комплексним коефицијентима има онолико нула колики му је степен рачунајући сваку нулу онолико пута колика јој је вишеструкост.

Теорема 4.2 Ако је $\alpha \in \mathbb{C}$ нула полинома $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ онда је и $\overline{\alpha}$ нула полинома $p(x)$.

Доказ: Користимо особине коњуговања комплексних бројева.

Теорема 4.3 Нека је $f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Тада ако је $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ нула полинома $f(x)$ онда је $q|a_n$ и $p|a_0$.

Доказ: Користимо особине дељивости.

Напомена: Претходну теорему користимо да погодимо рационалне нуле полинома са целим коефицијентима. На основу те теореме формирамо листу кандидата за рационалне нуле и онда проверавамо за сваког кандидата понаособ да ли је стварно нула. Један ефикасан начин за ту проверу је такозвана Хорнерова шема. Хорнерова шема је таблица од две врсте и колона за два више од степена посматраног полинома чију нулу погађамо. У првој врсти уписујемо кандидата за нулу $\alpha$, па редом $a_n,\ldots,a_0$ коефицијенте полинома, а у другу врсту почев од другог места редом $b_n,\ldots,b_0$ где је $b_n=a_n$, а $b_i=\alpha\cdot b_{i+1}+a_i$, за све $i\in\{0,\ldots,n-1\}$. Уколико је $b_0=0$, онда је $\alpha$ нула уоченог полинома, $(x-\alpha)(b_nx^{n-1}+\ldots+b_2x+b_1)$ је разлагање полазног полинома. Уколико је $b_0\neq 0$ онда $\alpha$ није нула посматраног полинома и прелазимо на тестирање другог кандидата.

Пример: За полином $x^3-2x^2-5x+6$ кандидати за рационалне нуле су $\{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6\}$. Користећи Хорнерову шему утврђујемо:

| 1 | 1 | $-2$ | $-5$ | 6 |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | $-1$ | $-6$ | 0 |

па је $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$, а нуле квадратног тринома $x^2-x-6$ су $-2$ и 3.

Теорема 4.4 (Виетове везе) Нека је $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ полином $n$-тог степена, $n \in \mathbb{N}$. Ако су $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ све његове нуле исписане онолико пута колика им је вишеструкост, онда је:

$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$

$\alpha_1\alpha_2 + \ldots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \ldots + \alpha_2\alpha_n + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\ldots$

$\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

## 4.2 Карактеристични корени и вектори

Дефиниција 4.4 Нека је $V$ неки потпростор од $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$, $n \in \mathbb{N}$ и $A \in End(V)$. Тада је $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ карактеристични корен линеарне трансформације $A$ ако постоји не нула вектор $v \in V$ такав да је $A(v) = \lambda v$. Вектор $v$ се тада назива карактеристични вектор који одговара карактеристичном корену $\lambda$.

Дефиниција 4.5 Нека је $A$ квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$ у реалним (комплексним) бројевима. Тада је реалан (комплексан) број $\lambda$ карактеристични корен матрице $A$ ако постоји не нула $n$-торка вектор колона $v$ таква да је $Av = \lambda v$. Вектор $v$ се тада назива карактеристични вектор који одговара карактеристичном корену $\lambda$.

Напомена: Како је сваком матрицом јединствено одређена линеарна трансформација у некој бази и обратно ове дефиниције одређују практично исти појам. Понекад се карактеристични вектори називају сопствени вектори, а карактеристични корени сопствене вредности.

Пример: Одредити карактеристичне корене и векторе линеарне трансформације $A((x, y)) = (y, x)$. Треба решити систем $A((x, y)) = \lambda(x, y) \Leftrightarrow (y, x) = (\lambda x, \lambda y) \Leftrightarrow \lambda x = y \wedge \lambda y = x$. Овај систем је еквивалентан са $\lambda^2 x = x \wedge \lambda x = y$. Ако је $x = 0$ онда добијамо и $y = 0$, а знамо да је $(x, y) \neq (0, 0)$ то је $\lambda^2 = 1 \wedge \lambda x = y$. Зато постоје два случаја:

1. $\lambda = 1$, тада је $x = y$, па су карактеристични вектори облика $(x, x)$ док $x \in \mathbb{R}$;

2. $\lambda = -1$, тада је $-x = y$, па су карактеристични вектори облика $(x, -x)$ док $x \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 4.6 Скуп свих карактеристичних корена неке линеарне трансформације $A$ назива се спектар те линеарне трансформације и означава са $\sigma(A)$. Скуп свих карактеристичних корена матрице те линеарне трансформације $[A]$ назива се спектар те матрице и означава са $\sigma([A])$.

Теорема 4.5 Скуп свих карактеристичних вектора који одговарају истом карактеристичном корену заједно са нула вектором чине потпростор.

Доказ: Нека је $A$ линеарна трансформација и $\lambda \in \sigma(A)$. Ако су $u, v$ карактеристични вектори који одговарају $\lambda$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ онда је $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) = \alpha\lambda u + \beta\lambda v = \lambda(\alpha u + \beta v)$. Зато $\alpha u + \beta v$ јесте карактеристични вектор који одговара карактеристичном корену $\lambda$.

Дефиниција 4.7 Ако је $A$ линеарна трансформација потпростора $V$ и $\lambda \in \sigma(A)$ онда се потпростор $S(\lambda) = \{x \in V \mid A(x) = \lambda x\}$ назива инваријантни потпростор који одговара карактеристичном корену $\lambda$. Инваријантни потпростор димензије 1 назива се инваријантни правац.

Напомена: Аналогно дефинишемо инваријантне потпросторе који одговарају карактеристичним коренима матрице.

Дефиниција 4.8 За матрицу $A$ полином $|\lambda E - A|$ по $\lambda$ назива се карактеристични полином матрице $A$.

Напомена: Степен карактеристичног полинома матрице једнак је реду матрице.

Пример: Карактеристични полином јединичне матрице реда $n \in \mathbb{N}$ је полином $(\lambda - 1)^n$.

Теорема 4.6 Број $\lambda$ је карактеристични корен матрице ако и само ако је нула њеног карактеристичног полинома.

Доказ: $Ax = \lambda x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 0 = \lambda x - Ax \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow \lambda Ex - Ax = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda E - A)x = 0 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$.

Напомена: Сопствене вредности линеарне трансформације можемо потражити као нуле карактеристичног полинома њене матрице.

Теорема 4.7 За карактеристични полином $p(\lambda)$ матрице $A$ реда $n \in \mathbb{N}$ важи $p(\lambda) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n|A|$.

Доказ: Како је слободни члан полинома $p$ уствари једнак $p(0)$ добијамо $p(0) = |0E - A| = |-A| = (-1)^n|A|$. У развијеном облику детерминанте $|\lambda E - A|$ по дефиницији, као збир $n!$ сабирака, једино сабирак $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$ може дати $\lambda^{n-1}$, па је зато коефицијент уз $\lambda^{n-1}$ управо $-tr(A)$.

Теорема 4.8 Ако су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, све сопствене вредности матрице $A$ реда $n \in \mathbb{N}$ записане онолико пута колика им је вишеструкост онда је $tr(A) = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$ и $|A| = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$.

Доказ: Из претходне теореме и Вијетових веза за полином $n$-тог степена.

Последица 4.1 Матрица је сингуларна ако и само ако јој је нула сопствена вредност.

Доказ: Ако је сингуларна њена детерминанта је нула па мора бар једна сопствена вредност бити нула да би производ сопствених вредности био нула. Обратно ако је једна сопствена вредност нула и детерминаната је нула, па је матрица сингуларна.

Теорема 4.9 Различитим карактеристичним коренима одговарају линеарно независни карактеристични вектори.

Доказ: Нека су $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ међусобно различити карактеристични корени и $x_1, \ldots, x_k$ њима редом одговарајући карактеристични вектори матрице $A$. Теорему доказујемо индукцијом по $k$. За $k = 1$ тврдња важи. Нека тврђење важи за $k$ и докажимо за $k + 1$. Претпоставимо да је $x_1, \ldots, x_{k+1}$

линеарно зависан низ. Тада постоје $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ такви да је $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1} = 0$. Сада је $A(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) = 0$ односно $\alpha_1 A x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} A x_{k+1} = 0$ па је $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0$. Са друге стране из полазне једнакости множећи је са $\lambda_{k+1}$ добијамо $\alpha_1 \lambda_{k+1} x_1 + \ldots + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} x_{k+1} = 0$. Одузимањем добијамо $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) x_1 + \ldots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) x_k = 0$. Како су по индукцијској претпоставци $x_1, \ldots, x_k$ линеарно независни то је $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \ldots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$. Бар један од $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ није нула због претпоставке о линеарној зависности $x_1, \ldots, x_{k+1}$. Нека је $\alpha_i \neq 0$. Тада $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ даје $\lambda_i = \lambda_{k+1}$, а то је у контрадикцији са претпоставком да су све сопствене вредности различите.

## 4.3 Сличност матрица

Дефиниција 4.9 Нека су $A$ и $B$ квадратне матрице реда $n \in \mathbb{N}$. Тада је $A$ слична са $B$ ако постоји регуларна матрица $P$ истог реда тако да је $P^{-1}AP = B$ и то записујемо као $A \sim^s B$.

Пример: Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ је слична са матрицом $\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ јер је

$$\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Теорема 4.10 Бинарна релација $\sim^s$ је релација еквиваленције на скупу свих квадратних матрица истог реда.

Доказ: Рефлексивност: За сваку квадратну матрицу $A$ је $A = EAE$. Симетричност: Ако је $A \sim^s B$ онда постоји регуларна матрица $P$ таква да је $B = P^{-1}AP$, али онда је $A = PBP^{-1}$, па је $B \sim^s A$, јер је $P^{-1}$ регуларна матрица са инверзном матрицом управо $P$. Транзитивност: Ако је $A \sim^s B$ и $B \sim^s C$ онда постоје регуларне матрице $P$ и $Q$ такве да је $B = P^{-1}AP$ и $C = Q^{-1}BQ$. Зато је $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}APQ$, па је $A \sim^s C$ јер је $PQ$ регуларна матрица.

Теорема 4.11 За сваке две матрице $A$ и $B$ истог рада је $A \sim^s B \Rightarrow A \sim B$.

Доказ: Директно из дефиниција еквивалентности и сличности матрица.

Теорема 4.12 Сличне матрице имају исте трагове, детерминанте и карактеристичне полиноме.

Доказ: Нека је $A \sim^s B$. Тада постоји регуларна матрица $P$ таква да је $B = P^{-1}AP$. Из особина трага знамо да је $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$. Даље, $|P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |A|$, јер је $|P^{-1}| = \frac{1}{|P|}$. Аналогно је $|\lambda E - A| = |P^{-1}(\lambda E - A)P| = |\lambda P^{-1}EP - P^{-1}AP| = |\lambda E - B|$.

Последица 4.2 Карактеристични корени матрице линеарне трансформације не зависе од базе у којој је формирана та матрица.

Доказ: Ако је $A \in End(V)$ за неки потпростор $V$ и $[A]_1$ њена матрица у првој бази, а $[A]_2$ њена матрица у другој бази, онда је $[A]_2 = T_{21}[A]_1T_{12} = T_{12}^{-1}[A]_1T_{12}$, па је $[A]_1 \sim^s [A]_2$, па примењујемо претходну теорему.

Дефиниција 4.10 Квадратну матрицу која има све нуле осим на главној дијагонали називамо дијагонална матрица и записујемо је као $D(d_1, \ldots, d_n)$, где је $n \in \mathbb{N}$ њен ред, а $d_1, \ldots, d_n$ елементи на дијагонали те матрице.

Теорема 4.13 Квадратна матрица реда $n \in \mathbb{N}$ је слична са дијагоналном матрицом ако и само ако има $n$ линеарно независних карактеристичних вектора.

Доказ: ($\Leftarrow$) Нека су $x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$ $n$ линеарно независних сопствених вектора којима одговарају редом сопствене вредности $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ квадратне матрице $A$ реда $n$. Сад је матрица $X = [x_{ij}]_{n \times n}$ регуларна. Нека је $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Сада је

$$AX = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \ldots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \ldots & \lambda_n x_n \end{bmatrix} = XD,$$

па је $X^{-1}AX = D$, па је $A \sim^s D$. ($\Rightarrow$) Обратно: из везе $X^{-1}AX = D$, где је $D = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ добијамо $AX = XD$, па су сопствени вектори матрице $A$ управо вектор колоне матрице $X$, а њихове сопствене вредности редом елементи на дијагонали матрице $D$.

Пример: Матрица из претходног примера има карактеристичне корене 1 и 2 којима одговарају редом карактеристични вектори $(5, 2)$ и $(2, 1)$.

Последица 4.3 Ако квадратна матрица има све једноструке сопствене вредности она је слична са дијагоналном матрицом.

Доказ: По ранијој теореми различитим карактристичним коренима одговарају линеарно независни карактеристични вектори којих онда има онолико колики је ред матрице па по претходној теореми она јесте слична са дијагоналном матрицом.

Глава 5

# КВАДРАТНЕ И ХЕРМИТСКЕ ФОРМЕ

## 5.1 Квадратне форме

Дефиниција 5.1 Нека $k, n \in \mathbb{N}$. Форма $k$-тог степена је пресликавање $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задато са

$$f(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} \alpha(i_1, \dots, i_k) x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k},$$

за све $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Напомена: Специјално за $k = 2$ у претходној дефиницији добијамо квадратну форму $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ дату са $f(x_1, \dots, x_n) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ за све $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Пример: $x^2 - yz + 2xz - z^2$ је квадратна форма, а $x^2 - xyz$ то није.

Дефиниција 5.2 Реална квадратна матрица $A$ назива се симетрична ако је $A' = A$.

Напомена: Приметимо да код симетричне матрице $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ важи $a_{ij} = a_{ji}$, за све $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Дефиниција 5.3 Матрица квадратне форме $\Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j$ је матрица $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, где је $a_{ij} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2}$, за све $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Теорема 5.1 Матрица квадратне форме је симетрична.

Доказ: Директном провером по дефиницији симетричности матрице.

Теорема 5.2 Ако је $A$ матрица квадратне форме $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, онда је $f(x) = x^t A x$, где је $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, за све $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Доказ: Множењем матрица.

Пример: Прикажимо квадратну форму из претходног примера у овом матричном облику. Матрица те квадратне форме је $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$. Сада је $\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z & -\frac{z}{2} & x - \frac{y}{2} - z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x^2 - yz + 2xz - z^2$.

Дефиниција 5.4 За реалне квадратне матрице $A$ и $B$ реда $n \in \mathbb{N}$ кажемо да је $A$ конгруентна са $B$ и пишемо $A \sim^c B$ ако постоји регуларна матрица $P$ истог реда таква да је $A = P^t B P$.

Теорема 5.3 Конгруентност је релација еквиваленције.

Доказ: Рефлексивност: $A = E^t A E$, па је $A \sim^c A$. Симетричност: Ако је $A \sim^c B$ онда је $A = P' B P$ за неку регуларну матрицу $P$. Одавде је $B = (P^t)^{-1} A P^{-1} = (P^{-1})^t A P^{-1}$, па је $B \sim^c A$. Транзитивност: Нека је $A \sim^c B$ и $B \sim^c C$. Тада постоје регуларне матрице $P, Q$ такве да је $A = P^t B P$ и $B = Q^t C Q$, па је $A = P^t Q^t C Q P = (QP)^t C Q P$, а $QP$ је јасно регуларна матрица па је $A \sim^c C$.

Теорема 5.4 Сваке две конгруентне матрице су еквивалентне.

Доказ: Директно из дефиниције.

Теорема 5.5 Матрица конгруентна симетричној матрици је симетрична.

Доказ: Нека је $A \sim^c B$ и нека је $B$ симетрична. Тада је $B^t = B$ и $A = P^t B P$ за неку регуларну матрицу $P$. Тада је $A^t = (P^t B P)^t = P^t B^t (P^t)^t = P^t B P = A$.

Пропозиција 5.1 Ако је симетрична матрица регуларна онда је и њена инверзна матрица симетрична.

Доказ: $(P^{-1})^t = (P^t)^{-1} = P^{-1}$.

Теорема 5.6 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $f(x_1, \ldots, x_n) = x'Ax$ квадратна форма. Тада трансформација $x = Py$, за неку регуларну матрицу $P$ реда $n$ и $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ преводи квадратну форму $f$ по променљивама $x_1, \ldots, x_n$ у квадратну форму по $y_1, \ldots, y_n$ чија је матрица $Q = P'AP$.

Доказ: Приметимо да је $x^tAx = (Py)^tAPy = y^tP^tAPy = y^tQy$.

Дефиниција 5.5 Две квадратне форме $x^tAx$ и $y^tBy$ су еквивалентне ако постоји регуларна матрица $P$ истог реда као $A$ и $B$ која трансформацијом $x = Py$ преводи прву у другу квадрартну форму.

Теорема 5.7 Две квадратне форме су еквивалентне ако и само ако су њихове матрице конгруентне.

Доказ: Нека су $f = x^tAx$ и $g = y^tBy$ две квадратне форме. Оне су еквивалентне ако и само ако постоји регуларна матрица $P$ истог реда као $A$ и $B$ таква да је $x = Py$ и $B = P^tAP$, а то је ако и само ако је $A \sim^c B$.

Пример: Посматрајмо квадратну форму $x^2 - 2xy + 2y^2$. Њена матрица је $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Посматрајмо $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, па онда $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, а онда том трансформацијом добијамо еквивалентну квадратну форму полазној са матрицом $P^tAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$. Дакле овом трансформацијом добијамо да је полазна квадратна форма еквивалентна са $u^2 + v^2$.

Дефиниција 5.6 Конгруентне трансформације су парови елементарних трансформација који се састоје од једне елементарне трансформације на врстама и исте те елементарне трансформације на колонама.

Теорема 5.8 Две квадратне матрице су конгруентне ако и само ако се конгруентним трансформацијама могу добити једна од друге.

Доказ: Ако се конгруентним трансформацијама једна матрица може добити од друге онда се она множи са десна елементарним матрицама и њима одговарајућим транспонованим елементарним матрицама са леве стране. Производи тих елементарних матрица са леве односно десне стране су онда регуларне међусобно транспоноване матрице и зато су полазне матрице конгруентне. Обратно ако су матрице $A$ и $B$ конгруентне онда постоји регуларна матрица $P$ таква да је $A = P^t BP$. Знамо да је свака регуларна матрица производ елементарних матрица. Према томе када $P$ напишемо као производ елементарних матрица, по теореми 3.28, добијамо тачно парове елементарних матрица које одговарају паровима елементарних трансформација које се примењују на $B$ да се добије $A$. Ти парови елементарних трансформација су уствари конгруентне трансформације које треба применити да се из $B$ добије $A$.

Теорема 5.9 Свака квадратна реална симетрична матрица је конгруентна са дијагоналном матрицом која на дијагонали има онолико ненула елемената колики јој је ранг.

Доказ: Нека је $A = [a_{ij}]_{n\times n} \neq 0$. Уколико је $a_{11} = 0$, а за неко $i \in \{1, \dots, n\}$ је $a_{ii} \neq 0$, онда заменимо $i$-ту и прву врсту и $i$-ту и прву колону, па добијамо матрицу $[a'_{ij}]_{n\times n}$, за коју је $a'_{11} \neq 0$. Уколико су сви елементи на дијагонали матрице $A$ једнаки нули онда постоје $a_{km} = a_{mk} \neq 0$. Заменимо $k$-ту и прву врсту и $k$-ту и прву колону. У новодобијеној матрици $[b_{ij}]_{n\times n}$ је $b_{1m} = a_{km} = a_{mk} = b_{m1}$. Сада $m$-ту врсту и $m$-ту колону додајемо првој врсти односно првој колони и добијамо на првом месту у првој врсти елемент $a_{km} + a_{mk} \neq 0$. Овим смо опет добили матрицу $[a'_{ij}]_{n\times n}$, за коју је $a'_{11} \neq 0$. Уколико је $a_{11} \neq 0$, онда ставимо $[a'_{ij}]_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$. Сада на осталим местимо у првој врсти односно колони добијамо нуле додавајући прву врсту односно колону $i$-тој претходно помножену са $-\frac{a'_{i1}}{a'_{11}}$ односно са $-\frac{a'_{1i}}{a'_{11}}$ и добијамо нуле у првој врсти и колони сем на првом месту. Сада посматрамо подматрицу добијену брисањем прве врсте и колоне и понављамо описани поступак и тако све док не добијемо нула матрицу као наредну подматрицу.

Теорема 5.10 За сваку реалну симетричну матрицу $A$ ранга $r$ постоји број $p$ тако да је $A$ конгруентна са дијагоналном матрицом која на дијагонали има $p$ јединица и $r-p$ минус јединица.

Доказ: По претходној теореми дата матрица је конгруентна са дијагоналном матрицом која на дијагонали има онолико ненула елемената колики јој је ранг јер су конгруентне матрице и еквивалентне. Тада конгруентним трансформацијама које се састоје из замене места двеју врста и одговарајућих колона мењамо редослед ненула елемената на главној дијагонали тако да најпре иду позитивни па потом негативни елементи. Нека је $p$ број позитивних, онда је $r-p$ негативних. Конгруентним трансформацијама које се састоје из множења врсте, а потом исте колоне реципрочном вредношћу корена апсолутне вредности ненула елемента, добијамо тражени облик матрице која је конгруентна са полазном.

Напомена: Приметимо да је број $p$ из претходне теореме јединствено одређен, јер две дијагоналне матрице које имају неколико јединица и минус јединица на главној дијагонали могу бити конгруентне ако и само ако имају исти број минус јединица, јер се конгруентним трансформацијама елемент може множити једино квадратом броја чиме се не мења знак полазног елемента.

Дефиниција 5.7 Број $p$ из претходне теореме назива се индекс симетричне матрице, односно индекс одговарајуће квадратне форме. Ранг квадратне форме је ранг њене матрице.

Последица 5.1 Две реалне симетричне матрице су конгруентне ако и само ако имају исти ранг и исти индекс.

Доказ: Из претходних тврдњи.

Последица 5.2 Две квадратне форме су еквивалентне ако и само ако имају исти ранг и исти индекс.

Доказ: Из претходних тврдњи.

Пример: Матрица $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ је конгруентна са $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ јер заменом прве и друге врсте па потом прве и друге колоне добијамо од прве другу матрицу.

Теорема 5.11 Свака квадратна форма ранга $r$ и индекса $p$ је еквивалентна са: $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$.

Доказ: Матрица те квадратне форме је конгруентна са матрицом ранга $r$ и индекса $p$.

Дефиниција 5.8 Квадратна форма $x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2$ има канонички облик.

Напомена: Помоћу одговарајуће трансформације се свака квадратна форма може превести у канонички облик. У пракси то радимо допуњавањем до потпуног квадрата као што се види у примеру који следи.

Пример: Дата је квадратна форма $x^2+2xy+2y^2-yz$. Приступамо допуњавању до потпуних квадрата: $x^2+2xy+2y^2-yz = x^2+2xy+y^2+y^2-yz+\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{4}z^2 = (x+y)^2+(y-\frac{z}{2})^2-(\frac{z}{2})^2$. Сада смена $u = x+y, v = y-\frac{z}{2}, w = \frac{z}{2}$ преводи дату квадратну форму у канонички облик $u^2+v^2-w^2$.

Дефиниција 5.9 Реална симетрична матрица реда $n$, ранга $r$ и индекса $p$ је:

1. позитивно дефинитна ако је $p = n$;
2. позитивно семидефинитна ако је $p = r < n$;
3. негативно дефинитна ако је $p = 0$ и $r = n$;
4. негативно семидефинитна ако је $p = 0$ и $r < n$.

Дефиниција 5.10 Квадратна форма је:

1. позитивно дефинитна ако је њена матрица позитивно дефинитна;
2. позитивно семидефинитна ако је њена матрица позитивно семидефинитна;
3. негативно дефинитна ако је њена матрица негативно дефинитна;
4. негативно семидефинитна ако је њена матрица негативно семидефинитна.

Напомена: Матрица квадратне форме и сама квадратна форма не морају испунити ниједну од наведених могућности из претходне две дефиниције и у том случају кажемо да је таква матрица, односно одговарајућа квадратна форма индефинитна. Претходни пример управо то илуструје.

Пример:
$f(x, y, z) = x^2 + y^2$ је позитивно семидефинитна квадратна форма.

Наредне две теореме дајемо без доказа.

Теорема 5.12 Реална симетрична матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n},\ n \in \mathbb{N}$, је позитивно дефинитна ако је: $a_{11} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$ и тако даље до $|A| > 0$.

Теорема 5.13 Реална симетрична матрица $A = [a_{ij}]_{n\times n},\ n \in \mathbb{N}$, је негативно дефинитна ако је: $a_{11} < 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0$ и тако даље до $(-1)^n|A| > 0$.

Теорема 5.14 Реална симетрична матрица $A$ је позитивно дефинитна ако и само ако су $A^n$ позитивно дефинитне матрице за све $n \in \mathbb{Z}$.

Доказ: ($\Leftarrow$) Тривијално. ($\Rightarrow$) Приметимо да, директно по дефинцији, је нека матрица позитивно дефинитна ако и само ако је конгруентна једничној матрици, а то је ако и само ако се може записати у облику $C^tC$ за неку регуларну матрицу $C$. Дакле ако је $A = C^tC$ онда је за неко $n \in \mathbb{N}$ уствари $A^n = C^tC \cdot \ldots \cdot C^tC$, где се у овом производу $C$ јавља $2n$ пута. Када те чиниоце групишемо као првих $n$ и других $n$ добијамо две међусобно транспоноване регуларне матрице па је $A^n$ позитивно дефинитна матрица.

## 5.2 Хермитске форме

Дефиниција 5.11 Нека $n, m \in \mathbb{N}$ и нека је $[a_{ij}]_{n\times m} \in \mathbb{C}^{n,m}$. Тада је $\overline{[a_{ij}]}_{n\times m} = [\overline{a_{ij}}]_{n\times m}$.

Теорема 5.15 Нека $m, n, p \in \mathbb{N}$ и нека су $[a_{ij}]_{m\times n}, [b_{ij}]_{m\times n} \in \mathbb{C}^{m,n}$, $[c_{ij}]_{n\times p} \in \mathbb{C}^{n,p}$ и $\alpha \in \mathbb{C}$. Тада је

1. $\overline{[a_{ij}]_{m\times n} + [b_{ij}]_{m\times n}} = \overline{[a_{ij}]}_{m\times n} + \overline{[b_{ij}]}_{m\times n}$;
2. $\overline{\alpha[a_{ij}]_{m\times n}} = \overline{\alpha}\overline{[a_{ij}]}_{m\times n}$;
3. $\overline{[a_{ij}]_{m\times n}[c_{ij}]_{n\times p}} = \overline{[a_{ij}]}_{m\times n}\overline{[c_{ij}]}_{n\times p}$;
4. $\overline{[a_{ij}]'}_{m\times n} = \overline{[a_{ij}]}'_{m\times n}$.

Доказ: Све ове особине доказују се коришћењем особина коњуговања да се добро слаже са збиром и производом комплексних бројева. Како је обично производ најкомпликованији извешћемо тај доказ, а остале остављамо за вежбу.

3. $\overline{[a_{ij}]_{m\times n}[c_{ij}]_{n\times p}} = \overline{[\Sigma_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}]}_{m\times p} = [\overline{\Sigma_{k=1}^n a_{ik}c_{kj}}]_{m\times p}$
$= [\Sigma_{k=1}^n \overline{a_{ik}c_{kj}}]_{m\times p} = [\Sigma_{k=1}^n \overline{a_{ik}} \cdot \overline{c_{kj}}]_{m\times p} = [\overline{a_{ij}}]_{m\times n}[\overline{c_{ij}}]_{n\times p}$
$= \overline{[a_{ij}]}_{m\times n}\overline{[c_{ij}]}_{n\times p}$.

Теорема 5.16 За сваку регуларну комплексну квадратну матрицу $A$ је $(\overline{A})^{-1} = \overline{A^{-1}}$.

Доказ: Из јединствености инверзне матрице: обе матрице помножене са сваке стране са $\overline{A}$ дају $E$.

Дефиниција 5.12 Квадратна комплексна матрица $A$ реда $n \in \mathbb{N}$ је хермицка ако је $\overline{A}' = A$.

Напомена: Код хермитске матрице је $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Приметимо да су елементи на главној дијагонали хермитске матрице реални бројеви.

Дефиниција 5.13 Нека $n \in \mathbb{N}$. Форма $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ дата са

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Sigma_{i=1}^n \Sigma_{j=1}^n \alpha_{ij} \overline{x_i} x_j,$$

за све $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ назива се хермитска форма.

Напомена: Матрица хермитске форме, формирана на исти начин као код реалне квадратне форме, је хермитска матрица. Тада хермитску форму записујемо у облику $f(x) = \overline{x}' A x$, за $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Уколико су коефицијенти у хермитској форми реални бројеви, онда њена рестрикција на скуп реалних бројева као домен јесте квадратна форма.

Пример: $f(x, y) = \overline{x}y + \overline{y}x - |y|^2$ је хермитска форма, а $g(x, y) = i\overline{x}y - y^2$ није.

Теорема 5.17 Вредност сваке хермитске форме је реалан број.

Доказ: Нека је $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ и нека је $f(x) = \overline{x}' A x$. Сада је $\overline{\overline{x}' A x} = x' \overline{A} \overline{x} = x' A' \overline{x} = (\overline{x}' A x)' = \overline{x}' A x$. Зато је $\overline{x}' A x \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 5.14 Квадратна комплексна матрица $A$ је хермитски конгруентна са квадратном комплексном матрицом $B$ истог реда ако постоји регуларна матрица $P$ истог тог реда таква да је $A = \overline{P}' B P$ и то записујемо са $A \sim^h B$.

Теорема 5.18 Хермитска конгруентност је релација еквиваленције на скупу свих квадратних комплексних матрица истог реда.

Доказ: Рефлексивност: $A \sim^h A$ јер је $A = \overline{E}' A E$. Симетричност: Нека је $A \sim^h B$ онда је за неку комплексну регуларну матрицу $P$ испуњено $A = \overline{P}' B P$, па је $B = (\overline{P}')^{-1} A P^{-1} =$

$(\overline{P}^{-1})' A P^{-1} = \overline{P^{-1}}' A P^{-1}$. Зато је $B \sim^h A$. Транзитивност: Ако је $A \sim^h B$ и $B \sim^h C$ онда је за неке комплексне регуларне матрице $P$ и $Q$ испуњено $A = \overline{P}' B P$ и $B = \overline{Q}' C Q$, па је $A = \overline{P}'\overline{Q}' C Q P = (\overline{Q}\overline{P})' C Q P = \overline{QP}' C Q P$ и $QP$ је регуларна комплексна матрица, па је $A \sim^h C$.

Теорема 5.19 Свака матрица која је хермитски конгруентна са неком хермитском матрицом је хермитска.

Доказ: Нека је $A \sim^h B$ онда је за неку регуларну комплексну матрицу $P$ испуњено $A = \overline{P}' B P$. Тада је $\overline{A}' = \overline{((\overline{P})' B P)'} = (P' \overline{B}\overline{P})' = (P' B' \overline{P})' = \overline{P}' B P = A$.

Напомена: Реалне симетричне матрице које су коњуговане су и хермитски коњуговане.

Теорема 5.20 Ако је $\overline{x}' A x$ хермитска форма, онда трансформација $x = Py$, где је $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ регуларна матрица, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, преводи у хермитску форму $\overline{y}' B y$, где је $B = \overline{P}' A P$.

Доказ: $\overline{x}' A x = \overline{Py}' A P y = (\overline{P}\overline{y})' A P y = \overline{y}' \overline{P}' A P y = \overline{y}' B y$, за $B = \overline{P}' A P$.

Дефиниција 5.15 Хермитска форма $f(x)$ је еквивалентна хермицкој форми $g(y)$ ако постоји регуларна матрица $P$ и трансформација $x = Py$ која преводи $f$ у $g$.

Теорема 5.21 Хермитске форме су еквивалентне ако и само ако су им матрице хермитски конгруентне.

Доказ: Последица претходних ставова.

Напомена: Аналогно квадратним формама и конгруентним трансформацијама и овде су на снази исте тврдње само уместо конгруентне користимо термин хермитски конгруентне уместо квадратне хермитске уместо реални бројеви комплексни бројеви и уместо $x' A x$ ставимо $\overline{x}' A x$. Тако добијамо да за сваку хермитску матрицу јединствено постоје бројеви $p$ и $r$, где је $r$ ранг матрице, тако да је она хермитски конгруентна са дијагоналном матрицом која на дијагонали има $p$ јединица и $r - p$ минус јединица. То је матрица хермитске форме у каноничком облику. Зато се свака хермитска форма може превести у њој еквивалентну која је у каноничком облику.

ЛИТЕРАТУРА


[1] С. Црвенковић, И. Долинка, Р. С. Мадарас, Одабране теме опште алгебре, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1998

[2] Г. Војводић, Предавања из математичке логике, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 2007

[3] М. З. Груловић, Основи теорије група, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1997

[4] Р. Дорословачки, Елементи опште и линеарне алгебре, *Stylos* Нови Сад (*Vedes* Београд), 2001

[5] Р. С. Мадарас, Од скупова до универзалних алгебри, Нови Сад, 2006

[6] Ж. Мијајловић, Алгебра 1, Милгор, Београд-Москва, 1993

[7] С. Милић, Елементи математичке логике и теорије скупова, Институт за математику Нови Сад, 1981

[8] С. Милић, Елементи алгебре, Институт за математику Нови Сад, 1984

[9] Н. Мудрински, Предавања из алгебре за информатичаре, Природно-математички факултет Нови Сад (електронска публикација), Нови Сад, 2018

[10] З. Стојаковић, И. Бошњак, Предавања из линеарне алгебре, *Symbol* Нови Сад,

[11] З. Стојаковић, Д. Херцег, Линеарна алгебра и аналитичка геометрија, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 1992

[12] Б. Шешеља, А. Тепавчевић, Алгебра 1, Универзитет у Новом Саду, Нови Сад, 2000

[13] Б. Шобот, Теоријски основи информатике 1 - са збирком задатака, Природно-математички факултет Нови Сад (електронска публикација), Нови Сад, 2017

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Небојша Мудрински је рођен 16.1.1978. године у Новом Саду, где је завршио основну школу. Потом се опредељује за математичка одељења гимназије "Јован Јовановић Змај". Гимназију завршава 1997. године и уписује Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Професор математике. Факултет је завршио 2001. године када је уписао последипломске студије на Департману за математику и информатику ПМФ-а, смер Алгебра и математичка логика. Исте године почео је да ради као асистент-приправник. Током школовања се такмичио на бројним домаћим и међународним такмичењима из математике, где је освајао награде. По завршетку гимназије му је додељена Змајева повеља као најистакнутијем ученику генерације. На факултету је више пута награђиван за успех у студирању, а на крају студија (2001. године) је проглашен за студента године Природно-математичког факултета. Исте године, Универзитет у Новом Саду му је доделио награду "Милева Марић Ајнштајн" за најбољи семинарски рад. Магистарску тезу је одбранио 2005, а докторску дисертацију 2009. године. За доцента је изабран 2010., а за ванредног професора 2015. године на Департману за математику и информатику. Држи предавања из више предмета са различитим алгебарским садржајима. Аутор је 15 научних радова, два уџбеника и једне збирке задатака.