

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада¹.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



¹ Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси creativecommons.org.rs/?page_id=74.

"Сва права задржава издавач. Забрањена је свака употреба или трансформација електронског документа осим оних који су експлицитно дозвољени Creative Commons лиценцом која је наведена на почетку публикације."

"Sva prava zadržava izdavač. Zabranjena je svaka upotreba ili transformacija elektronskog dokumenta osim onih koji su eksplicitno dozvoljeni Creative Commons licencom koja je navedena na početku publikacije."

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НОВИ САД

Љиљана Цветковић

Ернест Шанца

МАТЕМАТИКА СА СТАТИСТИКОМ

· ЗБИРКА ЗАДАТАКА ·

Нови Сад, 2025.

Садржај

A	Математика	7
1	Матрични рачун	9
1.1	Матрице и вектори	9
	Вежбе за самостални рад	21
2	Системи линеарних једначина	23
2.1	Системи линеарних једначина	23
2.1.1	Гаусов поступак елиминације	23
2.2	Матричне једначине	29
	Вежбе за самостални рад	32
3	Диференцијални рачун	35
3.1	Извод функције	35
3.2	Изводи вишег реда	41
	Вежбе за самостални рад	42
4	Интегрални рачун	45
4.1	Неодређени интеграл	45
4.2	Одређени интеграл	53
	Вежбе за самостални рад	57
5	Обичне диференцијалне једначине	59
5.1	Обична диференцијална једначина која раздваја променљиве	59
5.2	Линеарна обична диференцијална једначина	63
5.3	Бернулијева обична диференцијална једначина	66
	Вежбе за самостални рад	71

Б	Статистика	73
6	Приказивање статистичких података	75
6.1	Квантитативни подаци	75
6.1.1	Дискретног типа	75
6.1.2	Непрекидног типа	77
6.2	Категоријални подаци	79
6.2.1	Номинални	79
6.2.2	Ординални	80
	Вежбе за самостални рад	81
7	Дескриптивна статистика	85
7.1	Мере централне тенденције	85
7.2	Мере одступања	89
	Вежбе за самостални рад	92
8	Интервали поверења за средину популације	95
	Вежбе за самостални рад	105
9	t-тест за средину популације	107
	Вежбе за самостални рад	115
10	Анализа варијансе (АНОВА)	117
	Вежбе за самостални рад	128
11	Линеарна корелација	131
	Вежбе за самостални рад	140
12	Линеарна регресија	143
	Вежбе за самостални рад	153
А	z-таблица	155
Б	t-таблица	159
Ц	F-таблица, $\alpha = 0.05$	163
Д	F-таблица, $\alpha = 0.01$	165

Предговор

Поштовани читаоци,

Збирка задатака која је пред вама првенствено је намењена студентима биологије и екологије Природно-математичког факултета у Новом Саду, али могу је користити и сви који желе да утврде или прошире своје знање. Организација збирке прати наставне јединице истоименог курса *Математика са статистиком* за студенте са Департмана за биологију и екологију, као и студенте са Департмана за хемију. Теме које се обрађују мотивисане су потребом за овладавањем основним техникама матричног рачуна, способношћу решавања једноставнијих обичних диференцијалних једначина првог реда као и упознавањем са принципима статистичке обраде података и статистичког закључивања.

Осим што је извор задатака за вежбу и припрему испита, ова збирка има за циљ да послужи као добра стартна основа за разне примене математичког и статистичког моделирања у областима *биологије, екологије, заштите животне средине, хемије, медицине, фармације*, итд.

Након решених задатака, на крају сваког поглавља дати су и задаци за самостални рад, са крајњим решењима.

Уколико ова збирка допринесе бољем разумевању основних појмова и принципа математичког и статистичког закључивања, биће задовољни ...

Аутори

Део А

Математика

Матрични рачун

1.1 Матрице и вектори

 Матрица A формата $m \times n$:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- a_{ij} - елемент матрице (у пресеку i -те врсте и j -те колоне)
- a_{ii} - дијагонални елемент матрице
- ако је $m = n$, матрица се зове *квадратна*
- квадратна матрица чији су сви вандијагонални елементи једнаки 0 зове се *дијагонална* матрица
- дијагонална матрица чији су сви дијагонални елементи једнаки 1, зове се *јединична* матрица и обележава са E :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- матрица чији су сви елементи једнаки 0 зове се *нула* матрица.

- матрица која има само једну колону назива се *вектор* (или *вектор колоне*), њени елементи се зову *компоненте* вектора и уобичајено је да се компоненте нумеришу само једним индексом:

$$x = [x_i] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

- матрица која има само једну врсту назива се *вектор врста*
- ако у матрици $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ врсте и колоне замене места, добија се матрица формата $n \times m$ коју зовемо *транспонована* матрица и обележавамо са A^T

Операције са матрицама

- *Множење матрице скаларом*: Ако је α скалар, односно број, а $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ матрица, тада је

$$\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n}$$

- *Сабирање матрица*: Ако су $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ и $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ матрице истог формата, тада је њихов збир матрица

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

- *Производ матрица*: Матрице $A = [a_{ij}]_{m \times p}$ и $B = [b_{ij}]_{p \times n}$ могу се помножити и резултат је матрица $C = [c_{ij}]_{m \times n}$, чији су елементи

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

 **Вежба 1.1** Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} -7 & 19 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Израчунати: а) $A + B$ б) $A - B$ в) $A \cdot B$ г) $B \cdot A$.

Решење:

а) Према правилу за сабирање матрица имамо:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 19 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + (-7) & 2 + 19 & 3 + 0 \\ 2 + 0 & 3 + 1 & 4 + 2 \\ -1 + (-5) & 0 + 0 & 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 21 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

б) С обзиром да је $A - B = A + (-1) \cdot B$, према правилима за сабирање матрица и множење матрице скаларом, следи

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 - (-7) & 2 - 19 & 3 - 0 \\ 2 - 0 & 3 - 1 & 4 - 2 \\ -1 - (-5) & 0 - 0 & 1 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -17 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

в) Будући да је број колона матрице A једнак броју врста матрице B , производ матрица постоји и он је матрица формата 3×3 . Применом правила о множењу матрица рачунамо, елемент по елемент:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_{11} &= 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-5) = -22, \\ (A \cdot B)_{12} &= 1 \cdot 19 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 21, \\ (A \cdot B)_{13} &= 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 13, \\ (A \cdot B)_{21} &= 2 \cdot (-7) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) = -34, \\ (A \cdot B)_{22} &= 2 \cdot 19 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 41, \\ (A \cdot B)_{23} &= 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 18, \\ (A \cdot B)_{31} &= (-1) \cdot (-7) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) = 2, \\ (A \cdot B)_{32} &= (-1) \cdot 19 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -19, \\ (A \cdot B)_{33} &= (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Дакле,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -22 & 21 & 13 \\ -34 & 41 & 18 \\ 2 & -19 & 3 \end{bmatrix}.$$

г) На сличан начин израчунавамо и производ $B \cdot A$:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -7 & 19 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 43 & 55 \\ 0 & 3 & 6 \\ -8 & -10 & -12 \end{bmatrix}.$$

Напомена: Претходни пример илуструје чињеницу да производ матрица у општем случају, чак и онда када су оба производа дефинисана, није комутативна операција!

 **Вежба 1.2** Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Израчунати $A \cdot B - B \cdot A$.

Решење:

Одредићемо оба производа, а затим ћемо их одузети:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0+4+2 & -1+10+0 & 3+4-2 \\ 0-2+3 & -2-5+0 & 6-2-3 \\ 0+2+0 & 0+5+0 & 0+2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 1 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

и

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0-2+0 & 0+1+3 & 0-3+0 \\ 2+10+0 & 4-5+2 & 4+15+0 \\ 1+0-0 & 2+0-1 & 2+0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 12 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Према томе,

$$A \cdot B - B \cdot A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 5 \\ 1 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 12 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 8 \\ -11 & -8 & -18 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

 **Вежба 1.3** Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Показати да је $A \cdot B = B \cdot A$.

Решење:

Израчунаћемо оба производа након чега ћемо их упоредити. Дакле,

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 6+3+0 & 2-2+0 & -4+4+0 \\ 3+3-6 & 1-2+10 & -2+4-2 \\ -3+6-3 & -1-4+5 & 2+8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

и

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 6+1+2 & 3+1-4 & 0+2-2 \\ 6-2-4 & 3-2+8 & 0-4+4 \\ -6+5+1 & -3+5-2 & 0+10-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Заиста, матрице $A \cdot B$ и $B \cdot A$ су једнаке.

 **Вежба 1.4** Одредити производ матрица:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad u \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & \text{б)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad u \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \\ \\ \text{в)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, & \text{г)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad u \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Решење:

$$\text{a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+1 & 2+0+0 \\ 6-2+2 & 4-1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{б)} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4+3 \\ 1-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\text{в)} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) & 1 \cdot 1 & 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{г)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix} = 6.$$

Напомена: Производ вектор колоне и вектор врсте је *матрица* (резултат под в), док је производ вектор врсте и вектор колоне *број* (резултат под г).

 **Вежба 1.5** Израчунати $A^2 - 5 \cdot A - 3 \cdot E$, ако је

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решење:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 28 & 13 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-5 \cdot A = -5 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & -30 & -20 & -5 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & -30 & -5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$-3 \cdot E = -3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Одатле следи да је

$$A^2 - 5 \cdot A - 3 \cdot E = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -7 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & -5 & -3 & 0 \\ 6 & -29 & -5 & -3 \end{bmatrix}.$$

 **Вежба 1.6** Израчунати $(A - 2E)^2$ ако је $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 15 & -7 & 6 \\ 10 & -6 & 6 \end{bmatrix}$.

Решење:

Најпре ћемо срачунати матрицу $A - 2E$, а затим и њен квадрат:

$$(A - 2E)^2 = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Напомена: Матрица чији је неки степен једнак нула матрици зове се *нилпотентна* матрица. Према томе, матрица $A - 2E$ је нилпотентна матрица.

Инверзна матрица

Нека је A квадратна матрица реда n . Ако постоји матрица X , таква да је

$$A \cdot X = X \cdot A = E$$

тада се она зове *инверзна* матрица за матрицу A и обележава са A^{-1} .

- матрица која има инверзну зове се *регуларна*
- матрица која нема инверзну зове се *сингуларна*

Израчунавање инверзне матрице Гаус-Жордановом елиминацијом

🔖 Формира се проширена матрица $[A|E]$

🔖 На врстама r_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, проширене матрице врше се *елементарне трансформације* које укључују:

- множење врсте r_i бројем α различитим од нуле: αr_i
- множење врсте r_i бројем α и додавање врсти r_j : $\alpha r_i + r_j$
- замену врста R_i и R_j : $r_i \leftrightarrow r_j$

све док се на месту матрице A не појави јединична матрица E ,

👍 Тог момента на месту матрице E појавила се инверзна матрица A^{-1} , тј. проширена матрица има облик $[E|A^{-1}]$.

📌 **Вежба 1.7** *Одредити инверзну матрицу за матрицу $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.*

Решење: Проширена матрица гласи $[A|E] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right]$. Најпре množимо прву врсту исте са -2 и додамо другој:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right].$$

Сада množимо другу врсту са 2 и додајемо првој, а затим другу врсту са -1 ,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{2r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] = [E | A^{-1}].$$

Дакле,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

док једноставном провером констатујемо да важи $A \cdot A^{-1} = E$.

 **Вежба 1.8** Гаус-Жордановим поступком одредити B^{-1} за $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Решење:

Формирајмо проширену матрицу и заменимо места првој и другој врсти,

$$[B|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

након чега у тако трансформисаној проширеној матрици прву врсту помножимо са -2 и додамо другој, а затим прву врсту помножимо са -3 и додамо трећој:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-2r_1 + r_2 \\ -3r_1 + r_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right].$$

Затим, другу врсту помножимо са -1 и додамо првој врсти, а другу врсту помножимо са -5 и додамо трећој врсти:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-r_2 + r_1 \\ -5r_2 + r_3}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right].$$

Сада, трећу врсту помножимо са -1 ,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{-r_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -7 & -1 \end{array} \right],$$

након чега остаје још да помножимо трећу врсту са -1 и додамо је другој, као и да је додамо првој:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -7 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{-r_3 + r_2 \\ r_3 + r_1}} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -7 & -1 \end{array} \right] = [E \mid B^{-1}].$$

Према томе,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 5 & -7 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\textcircled{V} \textbf{Вежба 1.9} \text{ Решити једначину } XC = E, \text{ ако је } C = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решење:

Матрица X је заправо инверзна матрица за матрицу C , па ћемо је одредити Гаус-Жордановим поступком. Након што формирамо проширену матрицу, одмах ћемо заменити места првој и другој врсти, а у тако добијеној проширеној матрици трећу врсту ћемо помножити са 2:

$$[C|E] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{2r_3} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right].$$

Даље, преписујемо прву врсту, а исту množимо са 2 и додајемо другој, односно са -3 и додајемо трећој врсти:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[-3r_1 + r_3]{2r_1 + r_2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right].$$

Да бисмо избегли рачун са разломцима у наставку, помножићемо прву врсту са 2 и трећу са 6, а затим наставити "*прављење нула*" изнад и испод другог дијагоналног елемента тако што другу врсту помножимо са -1 и додамо првој, то јест са 5 и додамо трећој:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[6r_3]{2r_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -30 & -6 & 0 & -18 & 12 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -30 & -6 & 0 & -18 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow[5r_2 + r_3]{-r_2 + r_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 & 12 \end{array} \right].$$

У последњем кораку додајемо трећу врсту и првој и другој,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_3 + r_1} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 & 12 \end{array} \right]$$

и након тога још остаје да се све врсте помноже и то: прва са $\frac{1}{4}$, друга са $\frac{1}{6}$ а трећа са -1 :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \\ 0 & 6 & 0 & 6 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -8 & 12 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\substack{1/4 r_1 \\ 1/6 r_2 \\ -r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 8 & -12 \end{array} \right] = [E \mid C^{-1}],$$

Дакле,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -5 & 8 & -12 \end{bmatrix}.$$

 **Вежба 1.10** Дате су матрице

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Израчунати, а потом испитати да ли међу резултујућим матрицама има једнаких:

$$a) \quad A \cdot B^{-1} \quad б) \quad B^{-1} \cdot A \quad в) \quad A^{-1} \cdot B^{-1} \quad г) \quad B^{-1} \cdot A^{-1} \quad д) \quad (A \cdot B)^{-1} ?$$

Решење:

$$\begin{aligned} [A|E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\substack{-2r_1 + r_2 \\ 2r_1 + r_3}} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{\substack{-r_2 + r_1 \\ -r_2 + r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\sim]{r_3 + r_1} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \end{array} \right] = [E \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Према томе,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Са друге стране,

$$\begin{aligned}
[B|E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_1 + r_2 \\ r_1 + r_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_2 \\ -r_3 \\ \sim \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} -2r_2 + r_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} 7r_3 + r_1 \\ -2r_3 + r_2 \\ \sim \end{array} \\
&\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] = [E | B^{-1}].
\end{aligned}$$

Дакле,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Множењем одговарајућих матрица, добијамо следеће резултате:

а)

$$A \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 9 \\ -3 & 1 & -6 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

б)

$$B^{-1} \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -9 \\ -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

в)

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 4 & -18 \\ 3 & -1 & 4 \\ -9 & 3 & -13 \end{bmatrix},$$

г)

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -7 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 17 & -60 \\ 3 & -5 & 17 \\ -2 & 3 & -11 \end{bmatrix},$$

д) Да бисмо израчунали матрицу $(A \cdot B)^{-1}$, потребно је прво одредити матрицу $A \cdot B$, а потом наћи њој инверзну:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & -7 & 11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} [A \cdot B | E] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -7 & 11 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -7 & 11 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -r_1 + r_2 \\ 4r_1 + r_3 \\ \sim \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -5 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[2r_1]{-2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 10 & -2 & 0 & -8 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2 + r_1 \\ 3r_2 + r_3 \\ \sim \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -11 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -11 \end{array} \right] \xrightarrow[3r_3 + r_2]{11r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -22 & 34 & -120 \\ 0 & -2 & 0 & -6 & 10 & -34 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -11 \end{array} \right] \begin{array}{l} 1/2 \ r_1 \\ -1/2 \ r_2 \\ \sim \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 17 & -60 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -11 \end{array} \right] = [E \mid (A \cdot B)^{-1}]. \end{aligned}$$

Дакле,

$$(A \cdot B)^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 17 & -60 \\ 3 & -5 & 17 \\ -2 & 3 & -11 \end{bmatrix}.$$

Напомена: Приметимо да важи $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. То није случајност, наима, ова једнакост *важи у општем случају*.

**Вежбе за самостални рад**

Вежба 1.11 Ако су $x = [1 \ 2 \ 3]$ и $y = [-1 \ 1/2 \ 1]$, израчунати:

а) $xy^T y^T x$,

б) $xy^T yx^T$,

в) $y^T x x^T y$.

Решења: а) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3/2 & 3 & 9/2 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, б) 9, в) $\begin{bmatrix} 14 & -7 & -14 \\ -7 & 7/2 & 7 \\ -14 & 7 & 14 \end{bmatrix}$.



Вежба 1.12 Одредити производ матрица:

а) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$,

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Решења: а) $\begin{bmatrix} 14 & 22 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$, б) $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$.



Вежба 1.13 Израчунати $(A + 3E)^2$ ако је $A = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$.

Решење: $(A + 3E)^2 = E$



Вежба 1.14 Решити једначину $AX = E$, ако је:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, в) $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$.

Решења: а) $X = A$, б) $X = A$, в) $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$.

 **Вежба 1.15** Гаус-Жордановом елиминацијом израчунати инверзне матрице за:

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 8 \\ 5 & 7 & -14 \end{bmatrix}, \quad б) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}, \quad в) C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решења: _____

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Системи линеарних једначина

2.1 Системи линеарних једначина

Систем од n линеарних једначина са n непознатих је систем облика

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

који у матричном запису гласи

$$Ax = b, \quad A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad x = [x_i], \quad b = [b_i]$$

2.1.1 Гаусов поступак елиминације

☞ Свођење система на троугаони облик помоћу следећих трансформација:

- ☑ множење врсте бројем различитим од нуле
- ☑ множење врсте бројем и додавање другој врсти
- ☑ замена врста

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & \otimes & \otimes & \otimes \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \otimes & \otimes \\ 0 & 0 & \otimes & \otimes \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \otimes \end{bmatrix}$$

☞ Налажење решења *заменом унатраг*

 **Вежба 2.1** Гаусовом методом елиминације решити системе:

$$а) \quad \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7, \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad б) \quad \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ 4x + 9z = 6 \\ 3x + 3y + 5z = 14 \end{cases}.$$

Решење:

а) У првом кораку Гаусове елиминације, прву једначину множимо са -2 и додајемо другој и трећој. То ћемо убудуће записивати тако што ћемо испред друге и треће једначине прибележити број којим смо množили, у овом случају (-2) . Дакле,

$$\begin{aligned} (-2) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + z = 7 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Почиње други корак Гаусове елиминације. Сада другу једначину множимо са $-\frac{1}{3}$ и додајемо трећој, што опет записујемо као $(-\frac{1}{3})$ испред треће једначине. Дакле,

$$\begin{aligned} (-1/3) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \\ -y + 2z = 4 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y + 3z = 3 \\ z = 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Заменом унатраг добијамо

$$z = 3,$$

што, након уврштавања у другу једначину, даје

$$-3y + 9 = 3, \quad \text{односно} \quad y = 2,$$

а заменом тако добијених y и z у прву једначину, налазимо и

$$x + 4 - 3 = 2, \quad \text{односно} \quad x = 1.$$

Дакле, решење посматраног система гласи

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3,$$

што можемо записати и као

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

б) Трансформишимо систем у троугаони облик, као и у претходном задатку:

$$\begin{aligned} (-4) \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ 4x + 9z = 6 \\ 3x + 3y + 5z = 14 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ -36y - 31z = -10 \\ -24y - 25z = 2 \end{cases} \rightarrow \\ (-3) \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ 4x + 9z = 6 \\ 3x + 3y + 5z = 14 \end{cases} &\rightarrow (-2/3) \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ -36y - 31z = -10 \\ -24y - 25z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 9y + 10z = 4 \\ -36y - 31z = -10 \\ -\frac{13}{3}z = \frac{26}{3} \end{cases}$$

Заменом унатраг добијамо (јединствено) решење система:

$$x = 6, \quad y = 2, \quad z = -2.$$

 **Вежба 2.2** Испитати да ли следећи систем има решења:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 1 \end{cases}$$

Решење:

Гаусовим поступком добијамо:

$$\begin{array}{l} (-4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = -4 \\ -6y - 12z = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3y - 6z = -4 \\ 0 = 2 \end{cases} \\ (-7) \end{array}$$

С обзиром да се међу једначинама појавила и ова

$$0 = 2,$$

коју можемо замислити као $0 \cdot z = 2$ и која, очигледно, нема решења, то значи да ни систем нема решења, па је систем *немогућ*.

 **Вежба 2.3** Израчунати сва решења система:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases}$$

Решење: Гаусовим поступком добијамо:

$$\begin{array}{l} (-3) \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - 4z = 2 \\ 2x - 4y + 6z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 8y - 13z = -1 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ (-2) \end{array}$$

Пошто $0 = 0$ можемо тумачити као једначину $0 \cdot z = 0$, која има бесконачно много решења, овај систем је *неодређен*, тј. и он има *бесконачно много* решења. Да

бисмо пронашли сва решења, непознату z бирамо произвољно, а остале непознате изражавамо преко ње. Дакле,

$$z = t, \quad y = \frac{1}{8}(-1 + 13t), \quad x = \frac{1}{4}(3 + t).$$

За свако конкретно t добијамо по једно од безброј решења. На пример, за $t = 1$ добијамо решење: $x = 1$, $y = 1.5$, $z = 1$.

 **Вежба 2.4** *Одредити сва решења система:*

$$\begin{cases} x - 2y - z + u = -2 \\ 2x + 7y + 3z + u = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2u = 4 \\ 9x + 4y + z + 7u = 2 \end{cases}.$$

Решење:

Гаусовим поступком добијамо:

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} (-2) \\ (-3) \\ (-9) \end{matrix} \begin{cases} x - 2y - z + u = -2 \\ 2x + 7y + 3z + u = 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2u = 4 \\ 9x + 4y + z + 7u = 2 \end{cases} \rightarrow (-1) \begin{cases} x - 2y - z + u = -2 \\ 11y + 5z - u = 10 \\ 11y + 5z - u = 10 \\ 22y + 10z - 2u = 20 \end{cases} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} x - 2y - z + u = -2 \\ 11y + 5z - u = 10 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Сада две непознате, z и u , бирамо произвољно, а друге две изражавамо преко њих. Из друге једначине добијамо

$$y = \frac{1}{11}(10 - 5z + u),$$

што даље уврстимо у прву једначину и затим изразимо x . Дакле, сва решења овог система су дата са:

$$x = \frac{1}{11}(s - 9t - 2), \quad y = \frac{1}{11}(10 - 5s + t), \quad z = s, \quad u = t,$$

где су s и t произвољни реални бројеви. Овај систем је неодређен.

 **Вежба 2.5** Решити систем:

$$\begin{cases} x + y + z = -x - 2y + 7 \\ -3x + y = 4z - 10 \\ 6x + 6y - 2z = x + 2y + 5 \end{cases}.$$

Решење:

Најпре, запишимо овај систем у облику погодном за примену Гаусовог поступка елиминације (тј. све непознате пребацимо на леву страну једнакости), чиме добијамо:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -3x + y - 4z = -10 \\ 5x + 4y - 2z = 5 \end{cases}.$$

Даље поступамо као у претходним задацима:

$$\begin{aligned} (3/2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -3x + y - 4z = -10 \\ 5x + 4y - 2z = 5 \end{cases} &\rightarrow \cdot 2 \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ \frac{11}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2}y - \frac{9}{2}z = -\frac{25}{2} \end{cases} \rightarrow \\ (-5/2) \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ -3x + y - 4z = -10 \\ 5x + 4y - 2z = 5 \end{cases} &\rightarrow \cdot 2 \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ \frac{11}{2}y - \frac{5}{2}z = \frac{1}{2} \\ -\frac{7}{2}y - \frac{9}{2}z = -\frac{25}{2} \end{cases} \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 11y - 5z = 1 \\ -7y - 9z = -25 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ 11y - 5z = 1 \\ -\frac{134}{11}z = -\frac{268}{11} \end{cases}. \end{aligned}$$

Одавде заменом унатраг добијамо решења:

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 2.$$

 **Вежба 2.6** Маја је потрошила извесну суму € при куповини хаљине, ципела и ташне. Ако би хаљина била пет пута јефтинија, ципеле два пута јефтиније, а ташна 2,5 пута јефтинија од стварне цене, куповина би стајала €150. Ако би хаљина била јефтинија два пута, ципеле четири пута, а ташна три пута, тада би за такву куповину Маја потрошила такође €150. Колико је Маја платила хаљину, ако се зна да су ципеле и ташна коштали €250?

Решење: Означимо са x цену хаљине, са y цену ципела и са z цену ташне у €. Тада је:

$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2.5}z = 150 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{3}z = 150 \\ y + z = 250 \end{cases}.$$

Да бисмо олакшали поступак решавања, помножимо прву једначину са 10, а другу једначину са 12, чиме ћемо се ослободити разломака. Даље настављамо са решавањем система:

$$\begin{aligned}
 (-3) \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 1500 \\ 6x + 3y + 4z = 1800 \\ y + z = 250 \end{cases} &\rightarrow \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 1500 \\ -12y - 8z = -2700 \\ y + z = 250 \end{cases} \rightarrow \\
 &\quad (1/12) \begin{cases} 2x + 5y + 4z = 1500 \\ -12y - 8z = -2700 \\ \frac{1}{3}z = 25 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Одавде добијамо:

$$x = 162.5, \quad y = 175, \quad z = 75.$$

Дакле, Маја је хађину платила €162.5.

Вежба 2.7 (Први проблем у 8. књизи старокинеског рукописа "Jiuzhang suanshu", III век п.н.е.) Три снопа жита високог квалитета, два снопа жита средњег квалитета и један сноп жита ниског квалитета дају 39 доу (мерица). Два снопа жита високог квалитета, три снопа жита средњег квалитета и један сноп жита ниског квалитета дају 34 доу. Један сноп жита високог квалитета, два снопа жита средњег квалитета и три снопа жита ниског квалитета дају 26 доу. Колико је доу у једном снопу жита високог, средњег, односно ниског квалитета?

Решење:

Наведени проблем данас записујемо као систем:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Спровешћемо Гаусову елиминацију:

$$\begin{aligned}
 &\cdot 3 \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \rightarrow (-2) \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 6x + 9y + 3z = 102 \\ 3x + 6y + 9z = 78 \end{cases} \rightarrow \\
 &\cdot 3 \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases} \quad (-1) \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 6x + 9y + 3z = 102 \\ 3x + 6y + 9z = 78 \end{cases} \\
 \rightarrow &\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 4y + 8z = 39 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 20y + 40z = 195 \end{cases} \rightarrow \\
 &\quad (-4) \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 20y + 40z = 195 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 5y + z = 24 \\ 36z = 99 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Решење је:

$$x = \frac{37}{4}, \quad y = \frac{17}{4}, \quad z = \frac{11}{4}.$$

Напомена: Поступак решавања који се нуди у поменутој књизи, у суштини, није ништа друго до Гаусова елиминација! Принцип елиминације непознатих Кинези су, у ствари, разрадили манипулацијом рачунских штапића, али он је, очигледно, био познат 2000 година пре Гауса!

2.2 Матричне једначине

први тип: $A \cdot X = B$, ако је A регуларна матрица, има јединствено решење $X = A^{-1} \cdot B$

други тип: $X \cdot A = B$, ако је A регуларна матрица, има јединствено решење $X = B \cdot A^{-1}$

трећи тип: $A \cdot X \cdot B = C$, ако су A и B регуларне матрице, има јединствено решење $X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

 **Вежба 2.8** Решити следеће матричне једначине:

а)

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 39 \\ 11 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 74 & 67 & 16 \\ 19 & 17 & 4 \\ 11 & 11 & 3 \end{bmatrix},$$

б)

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

в)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 41 & 28 & 25 \\ 55 & 38 & 33 \end{bmatrix}.$$

Решење:

а) С обзиром да је у питању матрична једначина првог типа, рачунамо инверзну

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 39 \\ 11 & 3 & 10 \\ 7 & 2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & -15 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

и решење матричне једначине је

$$X = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & -15 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 74 & 67 & 16 \\ 19 & 17 & 4 \\ 11 & 11 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

б) Ова једначина је сада другог типа, па најпре налазимо

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

а решење једначине је

$$X = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 10 & 0 \\ -8 & 7 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

в) Обележимо матрице задате у једначини са:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 41 & 28 & 25 \\ 55 & 38 & 33 \end{bmatrix}.$$

Решавамо, дакле, једначину $A \cdot X \cdot B = C$. У питању је матрична једначина трећег типа. Уверићемо се да су матрице A и B регуларне, што ће имплицирати јединственост решења. Дакле, прво ћемо одредити матрице A^{-1} и B^{-1} , а потом и матрицу X :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & -7 \\ -5 & 3 & 6 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 21 & 15 & 12 \\ 41 & 28 & 25 \\ 55 & 38 & 33 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -4 & -7 \\ -5 & 3 & 6 \\ -4 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

 **Вежба 2.9** Решити матричну једначину $(A + 2 \cdot E) \cdot X = A - E$, где је E јединична матрица, а

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решење:

Како је

$$A + 2 \cdot E = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A - E = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

посматрана матрична једначина има следећи облик:

$$\begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

па је

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix},$$

односно,

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 10 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 \\ -6 & 4 & 6 \\ 9 & 3 & -14 \end{bmatrix}.$$

Вежбе за самостални рад

 **Вежба 2.10** Решити систем линеарних једначина:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ y + 4z = 0 \\ 5x + 6y = 12 \end{cases}.$$

Решење: $x = -36, y = 32, z = -8$.

 **Вежба 2.11** Одредити сва решења система линеарних једначина:

$$\begin{cases} w + x + 2y - 3z = -2 \\ -4w + 3x - y - 2z = 1 \\ w + 2x + 3y - 5z = -3 \end{cases}.$$

Решење: $w = t - 2, x = 2t - 1, y = 0, z = t, t \in \mathbb{R}$.

 **Вежба 2.12** Решити једначину $A \cdot X - C = B - 2 \cdot X$, при чему су:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Решење: $X = [1 \ 1 \ 1]^T$.

 **Вежба 2.13** Одредити решење једначине $X \cdot A - 2 \cdot B = 3 \cdot X + C$, где су:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 8 \\ 5 & 7 & -11 \end{bmatrix}, \quad B = [1 \ -1 \ 2], \quad C = [-1 \ 1 \ -4].$$

Решење: $X = [8 \ 9 \ 4]$.

 **Вежба 2.14** За које X је $A \cdot X \cdot B - C = F \cdot G$, ако су:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} ?$$

Решење: $X = \begin{bmatrix} 82 & -19 & -16 \\ -68 & 16 & 13 \\ 21 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$

Дифференцијални рачун

3.1 Извод функције

👍 Први извод функције $f(x)$ у тачки x дефинисан је на следећи начин:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

👍 Диференцијал функције $f(x)$ у тачки x је:

$$df(x) = f'(x)dx.$$

👉 ПРАВИЛА ДИРЕФЕНЦИЈАЛНОГ РАЧУНА:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \quad (c = \text{const})$$

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$$

ИЗВОД СЛОЖЕНЕ ФУНКЦИЈЕ:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ТАБЛИЦА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ИЗВОДА:

$f(x)$	$c = \text{const}$	x^n	e^x	$a^x, a > 0$	$\ln x, x > 0$	$\sin x$	$\cos x$
$f'(x)$	0	$n \cdot x^{n-1}$	e^x	$a^x \cdot \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$

 **Вежба 3.1** *Одредити изводе следећих функција:*

а) $y = 3\sqrt[3]{x^2},$

б) $y = (1 + 3x^2)(1 - 7x),$

в) $y = 6x^6 + 4x^4 - 5x^3 + 2,$

г) $y = (7 - 5x)(2 + 5x^3).$

Решење:

Тражене изводе функција одређујемо помоћу правила диференцијалног рачуна, као и таблице елементарних извода.

а) Будући да је $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, посматрана функција је облика $y = x^n$, па директно из таблице читамо:

$$y' = \left(3x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3 \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3 \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = 2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

б) С обзиром да је функција чији извод тражимо производ две функције, најпре ћемо применити правило за извод производа:

$$\begin{aligned} y' &= (1 + 3x^2)' \cdot (1 - 7x) + (1 + 3x^2) \cdot (1 - 7x)' = \\ &= 6x \cdot (1 - 7x) + (1 + 3x^2) \cdot (-7) = \\ &= -63x^2 + 6x - 7. \end{aligned}$$

Приметимо да је овај задатак могао да се уради и на другачији начин, тако што најпре извршимо множење чинилаца (сређивање израза), а потом применимо правила диференцирања. Резултат, наравно, остаје исти:

$$y = 1 + 3x^2 - 7x - 21x^3,$$

$$y' = 6x - 7 - 63x^2.$$

в) Извод одређујемо директном применом правила за збир (разлику) извода, као и табличних извода:

$$y' = 6 \cdot 6x^5 + 4 \cdot 4x^3 - 5 \cdot 3x^2 + 0 = 36x^5 + 16x^3 - 15x^2 = x^2(36x^3 + 16x - 15).$$

г) Аналогно примеру под б), употребом правила за извод производа, добијамо

$$y' = -5 \cdot (2 + 5x^3) + (7 - 5x) \cdot 15x^2 = -10 + 105x^2 - 100x^3.$$

 **Вежба 3.2** Израчунати извод функције, а потом одредити вредност извода у тачки x_0 :

$$а) \quad y = x - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{4x^3}, \quad x_0 = -1, \quad б) \quad y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x}, \quad x_0 = 1,$$

$$в) \quad y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x_0 = -1, \quad г) \quad y = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x_0 = -1.$$

Решење:

а)

$$y' = 1 - (-4)x^{-4-1} + \frac{1}{4}(-3)x^{-3-1} = 1 + \frac{4}{x^5} - \frac{3}{4x^4},$$

одакле је $y'(-1) = -\frac{15}{4}$.

б)

$$y' = 6\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - 4\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x}},$$

па је вредност у траженој тачки $y'(1) = 0$.

в)

$$y' = \frac{1 \cdot (x+1) - (x-1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2},$$

па, с обзиром да ова функција није дефинисана у тачки $x_0 = -1$, вредност извода у тачки $x_0 = -1$ не постоји.

г)

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2},$$

на основу чега налазимо да је $y'(-1) = -\frac{1}{2}$.

 **Вежба 3.3** Одредити изводе функција:

$$а) \quad y = 2x^3 \sin x,$$

$$б) \quad y = \operatorname{tg} x - x,$$

$$в) \quad y = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x),$$

$$г) \quad y = 2 \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}.$$

Решење:

а)

$$y' = 6x^2 \sin x + 2x^3 \cos x,$$

б) Користећи чињеницу да је $\operatorname{tg}(x)$ тригонометријска функција дефинисана као количник синусне и косинусне функције, те да је $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, имамо

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' - 1 = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} - 1 = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x. \end{aligned}$$

в)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2}(1 - (\cos x \cos x + \sin x(-\sin x))) = \\ &= \frac{1}{2}(1 - \cos^2 x + \sin^2 x) = \sin^2 x. \end{aligned}$$

г)

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \frac{(-\sin x - \cos x)(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)(-\sin x + \cos x)}{(\cos x + \sin x)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{-2 \sin x \cos x - \sin^2 x - \cos^2 x - (-2 \sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x)}{(\cos x + \sin x)^2} = \\ &= 2 \cdot \frac{-2}{(\cos x + \sin x)^2} = \frac{-4}{1 + \sin(2x)}. \end{aligned}$$

 **Вежба 3.4** Израчунати изводе функција:

$$а) \quad y = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2,$$

$$б) \quad y = (x^2 - x^{-2})^2,$$

$$в) \quad y = \frac{1}{3} (x\sqrt{x} - 1)^2,$$

$$г) \quad y = 3(1 + x^{-1}) \left(1 - \frac{1}{x} \right).$$

Решење:

а)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 \right]' = \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 \right]' = \frac{3}{2} \left[\frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2}} \right]' = \\ &= \frac{3 \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} \right) x^{\frac{2}{3}} - \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 1 \right) \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{2 x^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \cdot \frac{1 + x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = -\frac{(\sqrt[3]{x})^{-1} + 1}{\sqrt[3]{x^4}}. \end{aligned}$$

б)

$$y' = [(x^2 - x^{-2})^2]' = [x^4 - 2 + x^{-4}]' = 4x^3 - 4x^{-5}.$$

в)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{3} [(x\sqrt{x} - 1)^2]' = \frac{1}{3} \left[\left(x^{\frac{3}{2}} - 1 \right)^2 \right]' = \frac{1}{3} [x^3 - 2x^{\frac{3}{2}} + 1]' = \\ &= \frac{1}{3} (3x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3} (3x^2 - 3\sqrt{x}) = x^2 - \sqrt{x}. \end{aligned}$$

г)

$$y' = 3[(1 + x^{-1})(1 - x^{-1})]' = 3[1 - x^{-2}]' = -3 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{6}{x^3}.$$

 **Вежба 3.5** Применом правила за извод сложене функције, израчунати:

а) $y = (x^2 + 1)^7$,

б) $y = (1 - 4x)^3$,

в) $y = \sin^4 x$,

г) $y = \sin 4x$.

Решење:

а) Уколико бисмо дефинисали $t = t(x) = x^2 + 1$, тада полазна функција добија облик $y = t^7$. Применом правила за извод сложене функције, што значи да нађемо извод функције y по t , а затим резултат помножимо изводом t по променљивој x , добијамо

$$y' = 7(x^2 + 1)^6 \cdot (x^2 + 1)' = 7(x^2 + 1)^6 \cdot (2x) = 14x(x^2 + 1)^6.$$

б)

$$y' = 3(1 - 4x)^2 \cdot (1 - 4x)' = 3(1 - 4x)^2 \cdot (-4) = -12(1 - 4x)^2.$$

в)

$$y' = 4 \sin^3 x (\sin x)' = 4 \sin^3 x \cos x = 2 \sin(2x) \sin^2 x.$$

г)

$$y' = \cos(4x) \cdot (4x)' = \cos(4x) \cdot 4 = 4 \cos(4x).$$

 **Вежба 3.6** Одредити изводе следећих сложених функција:

а) $y = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$,

б) $y = \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 - x}}$,

в) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$,

г) $y = \sqrt[3]{(1 - 2x)^2}$.

Решење:

а)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sqrt{1 - x^2} - x(\sqrt{1 - x^2})'}{1 - x^2} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x)}{1 - x^2} = \\ &= \frac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{1 - x^2} = \frac{1 - x^2 + x^2}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} y' &= \left[\left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' = \frac{1}{2} \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(1 - x) - (1 + x) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{2}{(1 - x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + x} \sqrt{(1 - x)^3}}. \end{aligned}$$

в)

$$y' = \frac{1}{2} (x^2 - 3x + 5)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 3) = \frac{2x - 3}{2\sqrt{x^2 - 3x + 5}}.$$

г)

$$y' = \frac{2}{3} (1 - 2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-2) = -\frac{4}{3\sqrt[3]{1 - 2x}}.$$

 **Вежба 3.7** Одредити вредност извода следећих функција у тачки x_0 :

а) $y = e^{3x+5}, \quad x_0 = -\frac{5}{3},$

б) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x_0 = 0,$

в) $y = \frac{\ln x}{x}, \quad x_0 = 1,$

г) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x_0 = 0.$

Решење:

а)

$$y' = e^{3x+5} \cdot (3x+5)' = 3e^{3x+5},$$

одакле налазимо $y' \left(-\frac{5}{3} \right) = 3.$

б)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \\ &= \frac{(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}, \end{aligned}$$

стога је $y'(0) = 1.$

в)

$$y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

па је $y'(1) = 1.$

г)

$$y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2},$$

одакле налазимо да је $y'(0) = 2.$

3.2 Изводи вишег реда

Под претпоставком да постоји, n -ти извод ($n = 2, 3, \dots$) функције $f(x)$ у тачки x дефинисан је рекурентном релацијом:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

 **Вежба 3.8** Израчунати трећи извод функције $y = x^2 \ln x$.

Решење:

Нађимо најпре први извод, потом други извод као извод првог извода, и на крају трећи извод као извод другог извода:

$$y' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x,$$

$$y'' = (y')' = (2x \ln x + x)' = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3,$$

$$y''' = (y'')' = (2 \ln x + 3)' = \frac{2}{x}.$$

 **Вежба 3.9** Одредити четврти извод функције $y = e^{-x} \sin x$.

Решење:

Слично поступку описаном у претходном задатку, до четвртог извода долазимо овако:

$$y' = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x = e^{-x}(\cos x - \sin x),$$

$$y'' = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cos x,$$

$$y''' = 2e^{-x} \cos x + 2e^{-x} \sin x = 2e^{-x}(\cos x + \sin x),$$

$$y^{IV} = -2e^{-x}(\cos x + \sin x) + 2e^{-x}(-\sin x + \cos x) = -4e^{-x} \sin x.$$

Вежбе за самостални рад

 **Вежба 3.10** *Одредити извод функције:*

$$a) \quad y = x^3 + 2x^2 - 3x + 2,$$

$$б) \quad y = 2x^5 - 4x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3},$$

$$в) \quad y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x^2},$$

$$г) \quad y = (\sin x - \cos x)^2.$$

Решења: _____

$$a) \quad y' = 3x^2 + 4x - 3,$$

$$б) \quad y' = 10x^4 - 16x^3 + \frac{2}{x^2} - \frac{9}{x^4},$$

$$в) \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{x}},$$

$$г) \quad y' = -2 \cos 2x.$$

 **Вежба 3.11** *Израчунати диференцијал функције:*

$$a) \quad y = 2 \operatorname{tg} x - \ln x,$$

$$б) \quad y = 6e^x + \sqrt{x},$$

$$в) \quad y = (z + 2)^2,$$

$$г) \quad y = \sqrt{v^2 + 5v - 2}.$$

Решења: _____

$$a) \quad dy = \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{x} \right) dx, \quad б) \quad dy = \left(6e^x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx,$$

$$в) \quad dy = 2(z + 2)dz, \quad г) \quad dy = \frac{2v + 5}{2\sqrt{v^2 + 5v - 2}} dv.$$

 **Вежба 3.12** *Израчунати:*

$$a) \quad ((\sqrt{x} - 1) \sin x)',$$

$$б) \quad (2 \operatorname{tg} x (\sin x - \operatorname{ctg} x))',$$

$$в) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)',$$

$$г) \quad \left(\frac{x}{\ln x} \right)'.$$

Решења: _____

$$a) \quad \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + (\sqrt{x} - 1) \cos x, \quad б) \quad 2 \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{\cos x} + \cos x \right),$$

$$в) \quad -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}, \quad г) \quad \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.$$

 **Вежба 3.13** Наћи извод функције:

а) $f(x) = x^x$,

б) $g(z) = \sin(\sqrt{2}z) + \sqrt{2}\sin z$,

в) $g(x) = \frac{\sin x + e^x}{2e^x}$,

з) $h(t) = \sqrt{\cos t}$.

Решења: _____

а) $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$, б) $g'(z) = \sqrt{2}(\cos(\sqrt{2}z) + \cos z)$,

в) $g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{2e^x}$, з) $h'(t) = -\frac{\sin t}{2\sqrt{\cos t}}$.

 **Вежба 3.14** Израчунај други извод функције:

а) $y = 2e^x + 3e^{\sin x}$,

б) $y = 2x^3 + \sin(e^{2x}) + 5$,

в) $y = x^2e^x$,

з) $y = \frac{x}{\sin x}$.

Решења: _____

а) $y'' = 2e^x + 3e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)$, б) $y'' = 12x + 4e^{2x}(\cos(e^{2x}) - e^{2x}\sin(e^{2x}))$,

в) $y'' = e^x(x^2 + 4x + 2)$, з) $y'' = \frac{x(1 + \cos^2 x) - \sin 2x}{\sin^3 x}$.

Интегрални рачун

4.1 Неодређени интеграл

 Неодређени интеграл функције f се дефинише на следећи начин:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

при чему је $F(x)$ *примитивна функција* за функцију $f(x)$, тј. $F'(x) = f(x)$, а $C \in \mathbb{R}$ је произвољна реална константа. Неодређени интеграл је, дакле, *фамилија* примитивних функција.

 ПРАВИЛА:

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx, \quad (k = \text{const})$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

 МЕТОДЕ:

Смена променљивих

$$\int f(x)dx = \int f'(x(t)) \cdot x'(t)dt$$

Парцијална интеграција

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

ТАБЛИЦА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ИНТЕГРАЛА:

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x < 1$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\sin x$	$\cos x$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln x $	e^x	$\arcsin x$	$\arctg x$	$-\cos x$	$\sin x$

 **Вежба 4.1** Користећи особине и таблицу интеграла, израчунати:

а) $\int 8x^8 dx,$

б) $\int (x^2 + 2x - 2)dx,$

в) $\int \frac{dx}{x^3},$

г) $\int x\sqrt[4]{x}dx.$

Решење:

а)

$$\int 8x^8 dx = 8 \int x^8 dx = \frac{8}{9}x^9 + C.$$

б)

$$\int (x^2 + 2x - 2)dx = \int x^2 dx + 2 \int x dx - 2 \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 2x + C.$$

в)

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

г)

$$\int x\sqrt[4]{x}dx = \int x^{\frac{5}{4}} dx = \frac{x^{\frac{9}{4}}}{\frac{9}{4}} + C = \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

 **Вежба 4.2** Израчунати следеће интеграле:

а) $\int \frac{x^5 + x^2 - 9x + 5}{x^2} dx,$

б) $\int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}} dx,$

в) $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx,$

г) $\int \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} dx.$

Решење:

а)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^2 - 9x + 5}{x^2} dx &= \int \left(x^3 + 1 - \frac{9}{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^4}{4} + x - 9 \ln x + \frac{5}{x} + C. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-3)^2}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{x^2 - 6x + 9}{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int (x^{\frac{3}{2}} - 6x^{\frac{1}{2}} + 9x^{-\frac{1}{2}}) dx = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 4x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C.\end{aligned}$$

в) Послужићемо се идејом која се састоји у томе да бројиоцу додамо и од њега одузмемо исти број, и тиме створимо могућност да разломак раставимо на начин који ће произвести два таблична интеграла,

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctg x + C.$$

г)

$$\int \frac{x^2-5}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-6}{x^2+1} dx = x - 6 \arctg x + C.$$

 **Вежба 4.3** Користећи методу смене, одредити интеграле:

а) $\int (2x+3)^9 dx,$

б) $\int \sqrt[7]{3-x} dx,$

в) $\int \frac{dx}{x^2+3},$

г) $\int \frac{dx}{2+3x^2}.$

Решење:

а) Овај интеграл ћемо решити методом смене променљивих, и то тако да за смену, а затим и диференцијал, редом, бирамо

$$\begin{aligned}t &= 2x+3 \\ dt &= 2dx.\end{aligned}$$

Након решавања интеграла по новој променљивој, на крају остаје још само да "вратимо" смену. Другим речима,

$$\int (2x+3)^9 dx = \frac{1}{2} \int t^9 dt = \frac{1}{20} t^{10} + C = \frac{1}{20} (2x+3)^{10} + C.$$

б) Као и у претходном делу задатка, користићемо методу смене,

$$\begin{aligned}t &= 3-x \\ dt &= -dx\end{aligned}$$

$$\int \sqrt[7]{3-x} dx = - \int t^{\frac{1}{7}} dt = -\frac{7}{8} t^{\frac{8}{7}} + C = -\frac{7}{8} (3-x) \sqrt[7]{3-x} + C.$$

в)

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \int \frac{dx}{3 \left(\frac{1}{3}x^2 + 1 \right)} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1}$$

Смена:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{\sqrt{3}} \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{3}} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

г)

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 2} = \int \frac{dx}{2 \left(\frac{3}{2}x^2 + 1 \right)} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1}$$

Смена:

$$\begin{aligned} t &= \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} \\ dt &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{3x^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}} + C.$$

 **Вежба 4.4** *Одредити следеће интеграле:*

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}},$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x^2}},$

в) $\int \frac{x dx}{5x^2 - 2},$

г) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - 2x^2}},$

д) $\int x e^{-x^2} dx,$

е) $\int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx.$

Решење:

а)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \int \frac{dx}{3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2}}.$$

Смена:

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{3} \\ dt &= \frac{1}{3} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{3dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{3} + C.$$

б)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right)^2}}$$

Смена:

$$\begin{aligned} t &= \frac{2x}{\sqrt{5}} \\ dt &= \frac{2}{\sqrt{5}} dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}dt}{2\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} \arcsin t + C = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{5}} + C.$$

в) Смена:

$$\begin{aligned} t &= 5x^2 - 2 \\ dt &= 10x dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{5x^2 - 2} = \frac{1}{10} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10} \ln |t| + C = \frac{1}{10} \ln |5x^2 - 2| + C.$$

г) Смена:

$$\begin{aligned} t &= 1 - 2x^2 \\ dt &= -4x dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{4} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x^2} + C.$$

д) Смена:

$$\begin{aligned} t &= -x^2 \\ dt &= -2x dx \end{aligned}$$

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^t dt = -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

ђ) Смена:

$$\begin{aligned} t &= 2e^x - 1 \\ dt &= 2e^x dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{e^x}{2e^x - 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |2e^x - 1| + C.$$

 **Вежба 4.5** Методом парцијалне интеграције израчунати следеће интеграле:

а) $\int \ln x dx, \quad x > 0$

б) $\int x \ln x dx, \quad x > 0$

в) $\int x e^{-x} dx,$

г) $\int x^2 \sin x dx.$

Решење:

а)

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = x \end{array} \right.$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

б)

$$\left. \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

на основу чега је

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

в)

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = -e^{-x}. \end{array} \right.$$

Парцијалном интеграцијом добијамо:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C.$$

г)

$$\left. \begin{array}{l} u = x^2 \\ dv = \sin x dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} du = 2x dx \\ v = -\cos x. \end{array} \right.$$

Парцијалном интеграцијом добијамо:

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx.$$

Интеграл $\int x \cos x dx$ такође решавамо методом парцијалне интеграције:

$$\left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} du = dx \\ v = \sin x. \end{array} \right.$$

Дакле,

$$\begin{aligned}\int x^2 \sin x dx &= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - \int \sin x dx \right) = \\ &= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.\end{aligned}$$

 **Вежба 4.6** Израчунати интеграле:

а) $\int \frac{dx}{x^2 + 5x},$

б) $\int \frac{5x}{x^2 - 5x + 6} dx.$

Решење:

а) У питању је интеграл рационалне функције (количник два полинома), па се он решава тако што се интеграл запише као:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x} = \int \frac{dx}{x(x+5)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+5} \right) dx, \quad (4.11)$$

а затим одредимо коефицијенте A и B , за које треба да је (за свако x) испуњена једнакост

$$\frac{A(x+5) + Bx}{x(x+5)} = \frac{x(A+B) + 5A}{x(x+5)} \equiv \frac{1}{x(x+5)}.$$

Изједначавајући коефицијенте полинома у бројиоцима леве и десне стране претходне једнакости, добијамо систем две једначине са две непознате,

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 5A = 1 \end{cases},$$

одакле врло лако налазимо

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}.$$

Уврштавајући константе A и B у (4.11), решавамо интеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 5x} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+5} = \frac{1}{5} (\ln|x| - \ln|x+5|) + C = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x}{x+5} \right| + C.\end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned}\int \frac{5x}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \frac{5x dx}{(x-3)(x-2)} = \int \left(\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \right) dx, \\ \frac{A(x-2) + B(x-3)}{(x-3)(x-2)} &= \frac{x(A+B) + (-2A-3B)}{(x-3)(x-2)} \equiv \frac{5x}{(x-3)(x-2)}.\end{aligned}$$

Решавањем система

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -2A - 3B = 0 \end{cases},$$

добијамо

$$A = 15, \quad B = -10.$$

Стога је

$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int \left(\frac{15}{x-3} + \frac{10}{x-2} \right) dx = \\ &= 15 \ln|x-3| - 10 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

 **Вежба 4.7** Израчунати интеграле:

а) $\int \frac{5x-3}{(x-2)^2} dx,$

б) $\int \frac{x^4}{x^2-3} dx.$

Решење:

а)

$$\int \frac{5x-3}{(x-2)^2} dx = \int \frac{5(x-2)+7}{(x-2)^2} dx = \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{7}{(x-2)^2} \right) dx =$$

$\begin{aligned} t &= x-2 \\ dt &= dx \end{aligned}$
--

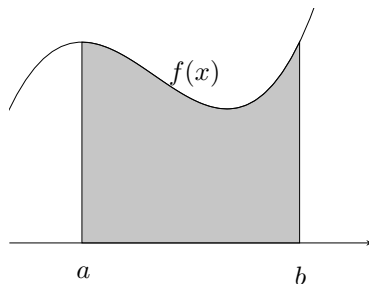
$$= 5 \int \frac{dt}{t} + 7 \int \frac{dt}{t^2} = 5 \ln|t| - \frac{7}{t} + C = 5 \ln|x-2| - \frac{7}{x-2} + C.$$

б)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4}{x^2-3} dx &= \int \frac{x^4-9+9}{x^2-3} dx = \int \frac{(x^2-3)(x^2+3)+9}{x^2-3} dx = \\ &= \int \left(x^2+3 + \frac{9}{x^2-3} \right) dx = \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{9\sqrt{3}}{6} \int \left(\frac{1}{x-\sqrt{3}} - \frac{1}{x+\sqrt{3}} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln|x-\sqrt{3}| - \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln|x+\sqrt{3}| + C = \\ &= \frac{x^3}{3} + 3x + \frac{3\sqrt{3}}{2} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C. \end{aligned}$$

4.2 Одређени интеграл

👉 Одређени интеграл од a до b функције $f(x)$, у нотацији $\int_a^b f(x)dx$ је број, који представља површину криволинијског трапеза ограниченог делом криве $f(x)$, правама $x = a$ и $x = b$ и x -осом. На слици је илустрован случај када је $f(x) \geq 0$.



Ако је $f(x) < 0$ тада је површина тог криволинијског трапеза $P = -\int_a^b f(x)dx$.

👉 ПРАВИЛА:

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

👉 ОСОБИНЕ:

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \quad \text{за} \quad f(x) > 0,$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

👉 ЊУТН-ЛАЈБНИЦОВА ФОРМУЛА

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad \left(\int f(x)dx = F(x) + C \right)$$

 **Вежба 4.8** Израчунати одређене интеграле:

$$a) \int_0^8 (1 - \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx,$$

$$b) \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx.$$

Решење:

а) Најпре налазимо неодређени интеграл:

$$\int (1 - \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx = x - \frac{2\sqrt{2}}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} + C,$$

а затим, применом Њутн-Лајбницевог формуле, која даје везу између неодређеног и одређеног интеграла, добијамо:

$$\begin{aligned} \int_0^8 (1 - \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx &= \left(x - \frac{2\sqrt{2}}{3} x\sqrt{x} + \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x} \right) \Big|_0^8 = \\ &= \left(8 - \frac{2\sqrt{2}}{3} 8\sqrt{8} + \frac{3}{4} 8\sqrt[3]{8} \right) - \left(0 - \frac{2\sqrt{2}}{3} 0\sqrt{0} + \frac{3}{4} 0\sqrt[3]{0} \right) = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1-x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} = \\ &= -\frac{1}{2} \ln|1-x| + \frac{1}{2} \ln|1+x| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C. \end{aligned}$$

Одређени интеграл је:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{2} \left(\ln 3 - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} (\ln 3 + \ln 3) = \ln 3.$$

 **Вежба 4.9** Израчунати:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx.$$

Решење:

За израчунавање неодређеног интеграла користимо методу смене, бирајући:

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

$$\int \cos x \sin^2 x dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Одређени интеграл је:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \sin^2 x dx = \left. \frac{\sin^3 x}{3} \right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}.$$

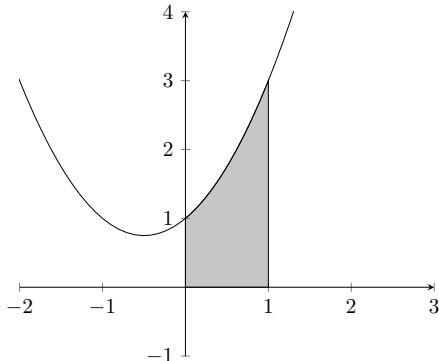
 **Вежба 4.10** *Одредити површину ограничену луком криве $y = x^2 + x + 1$ и правима $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$.*

Решење:

Дата крива је парабола која нема нула, тј. не сече x -осу. Како је уз x^2 позитиван број, то се она цела налази изнад x -осе.

Тражену површину рачунамо употребом одређеног интеграла:

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}.$$



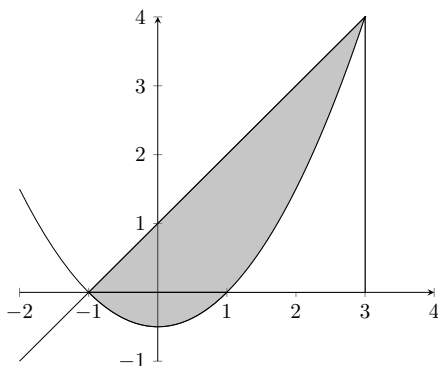
 **Вежба 4.11** Наћи површину ограничену луком криве $x^2 - 2y - 1 = 0$ и правом $y - x - 1 = 0$.

Решење:

Тражена површина се налази између криве $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ и праве $y = x + 1$. Њихове пресечне тачке добијамо из услова

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 1) \quad \text{и} \quad y = x + 1,$$

одакле следи да мора бити $x + 1 = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, тј. $x^2 - 2x - 3 = 0$. Решавањем ове квадратне једначине добијамо границе интеграције: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.



Жељена површина састоји се из два дела. Први део је изнад x -осе и добија се одузимањем површине ограничене параболом $x^2 - 1$, x -осом и правима $x = 1$ и $x = 3$ од површине троугла који је ограничен функцијом $x + 1$, x -осом и правима $x = -1$ и $x = 3$. Други део је испод x -осе и он је ограничен параболом $x^2 - 1$, x -осом и правима $x = -1$ и $x = 1$,

$$P = \int_{-1}^3 (x + 1) dx - \int_1^3 \frac{1}{2}(x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(-x^2 + 1) dx,$$

односно

$$P = \int_{-1}^3 \left((x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right) dx = \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right) \Big|_{-1}^3 = \frac{16}{3}.$$

**Вежбе за самостални рад****✎ Вежба 4.12** Израчунати:

а) $\int (2x + e^x + \sin x) dx,$

б) $\int \left(\frac{3}{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx,$

в) $\int \left(\frac{2x^2}{x^2+1} \right) dx,$

г) $\int \left(\frac{x+5}{x^2} + \sqrt{2x} \right) dx.$

Решења: _____

а) $x^2 + e^x - \cos x + C,$ б) $3 \ln |x| + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + \arctg x + C,$

в) $2(x - \arctg x) + C,$ г) $\ln |x| - \frac{5}{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + C.$

✎ Вежба 4.13 Методом смене променљиве решити следеће интеграле:

а) $\int \sin(4x - 3) dx,$

б) $\int x (2x^2 - 3)^{15} dx,$

в) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx,$

г) $\int \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$

Решења: _____

а) $-\frac{1}{4} \cos(4x - 3) + C,$ б) $\frac{(2x^2 - 3)^{16}}{64} + C,$

в) $2e^{\sqrt{x}} + C,$ г) $-\frac{1}{\arcsin x} + C.$

✎ Вежба 4.14 Методом парцијалне интеграције решити следеће интеграле:

а) $\int x^2 \ln x dx, \quad x > 0,$

б) $\int x^2 e^x dx,$

в) $\int (x-1)e^{2x-1} dx,$

г) $\int 3e^x \sin x dx.$

Решења: _____

а) $\frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C,$ б) $e^x (x^2 - 2x + 2) + C,$

в) $\frac{1}{2} e^{2x-1} (x-2) + C,$ г) $\frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C.$

 **Вежба 4.15** Израчунати:

а) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{3x+1} dx,$

б) $\int_0^1 e^x \sin(e^x) dx.$

Решења: _____

а) $\frac{\sqrt[3]{2}(2\sqrt[3]{2}-1)}{2},$ б) $\cos 1 - \cos e.$

 **Вежба 4.16** Одредити површину ограничену кривама:

а) $y = 4 - x^2$ и x -осом,

б) $y = \sin x, x = \pi,$ y -осом и x -осом,

в) $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 4x + 6.$

Решења: _____

а) $P = \frac{32}{3},$ б) $P = 2,$ $P = \frac{8}{3}.$

Обичне диференцијалне једначине

5.1 Обична диференцијална једначина која раздваја променљиве

 Општи облик: $y' = f(x) \cdot g(y)$.

 Поступак решавања:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

 **Вежба 5.1** Решити следеће диференцијалне једначине:

а) $x + yy' = 0$,

б) $y' - 2xy = 0$,

Решење:

а) Једначина $x + yy' = 0$ може се записати као $y' = \frac{-x}{y}$, па је то једначина која раздваја променљиве

$$ydy = -x dx.$$

Интеграљењем налазимо да је $\frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C$, стога је опште решење диференцијалне једначине дато са

$$\left\{ \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Најпре ћемо једначину $y' - 2xy = 0$ записати као $y' = 2xy$, одакле је

$$\frac{1}{y} dy = 2x dx.$$

До општег решења долазимо директном интеграцијом:

$$\left\{ \ln |y| = x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.2** Одредити општа решења једначина:

а) $y' \operatorname{tg} x = y,$

б) $xyy' = 1 - x^2.$

Решење:

а) Диференцијална једначина $y' \operatorname{tg} x = y$ је, такође, једначина која раздваја променљиве,

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx.$$

Отуда добијамо $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} dx$, односно $\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Сменом

$$\begin{aligned} t &= \sin x \\ dt &= \cos x dx \end{aligned}$$

налазимо да је $\ln |y| = \ln |\sin x| + C$, те је опште решење диференцијалне једначине:

$$\left\{ \ln |y| = \ln |\sin x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Једначина $xyy' = 1 - x^2$, се своди на облик

$$y dy = \frac{1 - x^2}{x} dx.$$

Опште решење полазне једначине налазимо интеграцијом:

$$\left\{ \frac{y^2}{2} = \ln |x| - \frac{x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.3** Решити:

$$а) \quad (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0, \quad б) \quad (3x^2y - x^2)y' - 2y = 0.$$

Решење:

а)

$$\frac{y}{y^2 + 1}dy = \frac{x}{x^2 - 1}dx,$$

одакле директном интеграцијом, применом смена у оба интеграла, израчунавамо опште решење

$$\left\{ y^2 + 1 = C(x^2 - 1), \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Слично као и у првом делу задатка, након алгебарских сређивања, добијамо:

$$\frac{3y - 1}{2y}dy = \frac{1}{x^2}dx,$$

одакле је јасно да је опште решење тражене диференцијалне једначине

$$\left\{ 3y - \ln |y| = -\frac{2}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.4** Решити почетни проблем (наћи партикуларно решење):

$$а) \quad (1 + y^2)dx = xydy, \quad y(2) = 1 \quad б) \quad xy' - \ln^2 x = 0, \quad y(1) = 0.$$

Решење:

а) За почетак ћемо одредити опште решење дате диференцијалне једначине, а потом, уз услов који оно треба да испуни, одредити константу C , а тиме и решење почетног проблема, односно партикуларно решење.

Диференцијалну једначину $(1 + y^2)dx = xydy$ запишимо најпре у еквивалентном облику $\frac{1}{x}dx = \frac{y}{1 + y^2}dy$. Директном интеграцијом и употребом смене

$$\begin{aligned} t &= 1 + y^2 \\ dt &= 2ydy \end{aligned}$$

добијамо да је

$$\ln |x| = \frac{1}{2} \ln |1 + y^2| + \ln |C| = \ln |1 + y^2|^{\frac{1}{2}} + \ln |C| = \ln |C(1 + y^2)^{\frac{1}{2}}| = \ln |C\sqrt{1 + y^2}|$$

па је опште решење

$$\left\{ x = C\sqrt{1 + y^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Партикуларно решење добијамо тако што израчунамо C користећи додатни услов дат у задатку. Наиме, како је $y(2) = 1$, добијамо да је

$$2 = C\sqrt{1 + 1^2},$$

то јест,

$$C = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Дакле, тражено решење почетног проблема је $x_p = \sqrt{2}\sqrt{1 + y^2}$.

б) Нађимо најпре опште решење дате једначине $xy' - \ln^2 x = 0$. Из облика

$$dy = \frac{\ln^2 x}{x} dx,$$

приступамо директној интеграцији, $\int dy = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$. Сменом

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ dt &= \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

добијамо опште решење

$$\left\{ y = \frac{\ln^3 x}{3} + C, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Будући да партикуларно решење, осим једначине, треба да задовољи и услов $y(1) = 0$, добијамо да је

$$0 = \frac{\ln^3 1}{3} + C,$$

односно

$$0 = \frac{0^3}{3} + C,$$

па је $C = 0$. Дакле, тражено партикуларно решење је $y_p = \frac{\ln^3 x}{3}$.

5.2 Линеарна обична диференцијална једначина

👍 Општи облик: $y' + y \cdot p(x) = q(x)$

👉 Поступак решавања:

$$\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= (uv)' = u'v + uv' \end{aligned}$$

$$u'v + uv' + uv p(x) = q(x)$$

$$u'v + u(v' + vp(x)) = q(x).$$

Функцију v бирамо тако да је $v' + vp(x) = 0$. На крају, уврстимо израчунато v у $u'v = q(x)$, те добијамо једначину која раздваја променљиве из које налазимо скуп функција u .

Опште решење линеарне диференцијалне једначине је $y = uv$.

📎 **Вежба 5.5** Наћи опште решење диференцијалне једначине:

a) $y = x(y' - x \cos x),$

b) $y' - \frac{3}{x}y = 1 + \ln x.$

Решење:

а) Најпре ћемо дату једначину записати у облику $y' + y \cdot p(x) = q(x)$:

$$y' - \frac{1}{x} \cdot y = x \cos x.$$

Уводимо смену

$$\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= u'v + uv' \end{aligned}$$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x \cos x$$

$$u'v + u \underbrace{\left(v' - \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = x \cos x. \quad (5.6)$$

Решавањем диференцијалне једначине $v' = \frac{1}{x}v$ добијамо

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{1}{x} dx,$$

односно

$$\ln |v| = \ln |x|, \quad (5.7)$$

Будући да је довољно бирати само једну функцију v за које је испуњено (5.7), определићемо се за најједноставнију варијанту,

$$v = x.$$

Даље, тражимо функцију u , тако што уврстимо функцију v у (5.6), што производи

$$u'x = x \cos x, \quad \text{односно} \quad u' = \cos x,$$

што је, опет једначина која раздваја променљиве, па је

$$u = \sin x + C.$$

Дакле, опште решење полазне диференцијалне једначине је:

$$\left\{ y = (\sin x + C)x, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Користимо смену

$$\begin{array}{|l} y = uv \\ y' = u'v + uv' \end{array}$$

$$u'v + uv' - \frac{3}{x}uv = 1 + \ln x$$

$$u'v + \underbrace{u \left(v' - \frac{3}{x}v \right)}_{=0} = 1 + \ln x. \quad (5.9)$$

Прво решавамо диференцијалну једначину $v' = \frac{3}{x}v$, односно $\frac{dv}{v} = \frac{3}{x}dx$:

$$\ln |v| = 3 \ln |x| = \ln |x^3|$$

и бирамо

$$v = x^3.$$

Уврштавањем ове функције v у (5.9), тражимо функцију u из једначине

$$u'x^3 = 1 + \ln x, \quad \text{односно} \quad u' = \frac{1 + \ln x}{x^3}.$$

$$\int du = \int \frac{1 + \ln x}{x^3} dx,$$

Парцијалном интеграцијом, бирајући

$$\left. \begin{array}{l} s = 1 + \ln x \\ dt = x^{-3} dx \end{array} \right\} \text{тада} \left\{ \begin{array}{l} ds = x^{-1} dx \\ t = -\frac{1}{2x^2} \end{array} \right.$$

налазимо да је

$$u = -\frac{1 + \ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x^{-2}}{-2} \right) + C.$$

Према томе, опште решење посматране диференцијалне једначине гласи

$$\left\{ y = \left(-\frac{1 + \ln x}{2x^2} - \frac{x^{-2}}{4} + C \right) x^3, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.6** Одредити решење проблема датог са:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1.$$

Решење:

Тражимо, најпре, опште решење диференцијалне једначине $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$. Уз смену

$$\begin{aligned} & \boxed{\begin{aligned} y &= uv \\ y' &= u'v + uv' \end{aligned}} \\ & u'v + uv' - uv \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \\ & u'v + u \underbrace{(v' - v \operatorname{tg} x)}_{=0} = \frac{1}{\cos x}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Функцију v налазимо из услова $v' = v \operatorname{tg} x = v \frac{\sin x}{\cos x}$,

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Сменом

$$\boxed{\begin{aligned} t &= \cos x \\ dt &= -\sin x dx \end{aligned}}$$

добивамо

$$\ln |v| = (-1) \ln |t| = \ln |t|^{-1}, \quad \text{и бирамо} \quad v = t^{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}.$$

Даље, одређујемо функцију u , уврштавањем v у (5.11):

$$u'v = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{односно} \quad u' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}, \quad \text{односно} \quad u' = 1.$$

Дакле, $du = dx$, па је $u = x + C$.

Стога је опште решење посматране диференцијалне једначине:

$$\left\{ y = \frac{x + C}{\cos x}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

На основу почетног услова $y(0) = 1$, рачунамо вредност константе C . Како је

$$1 = \frac{0 + C}{\cos 0} = \frac{C}{1},$$

то је $C = 1$, а тражено партикуларно решење је

$$y_p = \frac{x + 1}{\cos x}.$$

 **Вежба 5.7** Решити почетни проблем:

$$y' - y \cos x = \sin x \cos x, \quad y(0) = 0.$$

Решење:

Најпре ћемо одредити опште решење дате диференцијалне једначине. Наиме, она је линеарна, па сменом $y = uv$ најпре добијамо да је

$$v = e^{\sin x},$$

а потом

$$u = -\sin x e^{-\sin x} - e^{-\sin x} + C,$$

односно, скуп свих функција које задовољавају посматрану једначину гласи

$$\left\{ y = C e^{\sin x} - \sin x - 1, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Почетни услов $y(0) = 0$ биће задовољен ако бирамо $C = 1$, стога је решење почетног проблема

$$y_p = e^{\sin x} - \sin x - 1.$$

5.3 Бернулијева обична диференцијална једначина

 Општи облик: $y' + y \cdot p(x) = y^n \cdot q(x), \quad n \in \mathbb{R}.$

 Поступак решавања: сменом

$$\begin{aligned} z &= y^{-(n-1)} \\ z' &= -(n-1)y^{-n}y' \end{aligned}$$

Након што линеарну једначину решимо по z , "враћањем" смене налазимо и решење y Бернулијеве обичне диференцијалне једначине.

 **Вежба 5.8** Одредити опште решење следећих диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad y' - y \frac{3x^2}{x^3 + 4} + y^2 \frac{\cos x}{x^3 + 4} &= 0, & \text{б)} \quad y' + 2yx - \frac{x}{y} &= 0. \end{aligned}$$

Решење:

а) Ради прегледности, записаћемо ову Бернулијеву диференцијалну једначину ($n = 2$) у еквивалентном облику, делећи једначину са y^2 ,

$$y' y^{-2} - y^{-1} \frac{3x^2}{x^3 + 4} = -\frac{\cos x}{x^3 + 4},$$

а потом бирамо смену

$$\begin{aligned} z &= y^{-1} \\ z' &= -y^{-2}y' \end{aligned}$$

Добијамо линеарну диференцијалну једначину по z , која гласи

$$z' + \frac{3x^2}{x^3 + 4}z = \frac{\cos x}{x^3 + 4}.$$

Њу решавамо на раније описан начин:

$$\begin{aligned} z &= uv \\ z' &= u'v + uv' \end{aligned}$$

$$u'v + \underbrace{u \left(v' + v \frac{3x^2}{x^3 + 4} \right)}_{=0} = \frac{\cos x}{x^3 + 4}$$

$$v' = -v \frac{3x^2}{x^3 + 4}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{3x^2}{x^3 + 4} dx$$

смена

$$\begin{aligned} t &= x^3 + 4 \\ dt &= 3x^2 dx \end{aligned}$$

даје

$$\ln |v| = -\ln |t|, \quad \text{односно} \quad v = t^{-1} = (x^3 + 4)^{-1}.$$

Функцију u одређујемо из

$$u' \frac{1}{x^3 + 4} = \frac{\cos x}{x^3 + 4}, \quad \text{то јест} \quad u' = \cos x.$$

$$\int du = \int \cos x dx,$$

$$u = \sin x + C.$$

Дакле, опште решење линеарне диференцијалне једначине је

$$z = uv = \frac{\sin x + C}{x^3 + 4},$$

а "враћањем" смене налазимо опште решење Бернулијеве диференцијалне једначине:

$$\left\{ y = \frac{x^3 + 4}{\sin x + C}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Ово је Бернулијева диференцијална једначина ($n = -1$), па ћемо целу једначину поделити са y^{-1} , односно помножити са y :

$$y'y + 2xy^2 = x.$$

За смену бирамо

$$\begin{aligned} z &= y^2 \\ z' &= 2yy' \end{aligned}$$

и добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$z' + 4xz = 2x.$$

Њу решавамо на уобичајен начин:

$$\begin{aligned} z &= uv \\ z' &= u'v + uv' \end{aligned}$$

$$u'v + uv' + 4xuv = 2x$$

$$u'v + u \underbrace{(v' + 4xv)}_{=0} = 2x$$

$$v' = -4xv$$

$$v = e^{-2x^2}$$

$$u' = 2xe^{2x^2}, \quad \text{односно} \quad du = 2xe^{2x^2} dx.$$

$$\int du = \int 2xe^{2x^2} dx,$$

смена

$$\begin{aligned} t &= 2x^2 \\ dt &= 4xdx \end{aligned}$$

$$u = \frac{1}{2}e^{2x^2} + C.$$

Опште решење линеарне диференцијалне једначине је:

$$z = uv = \left(\frac{1}{2}e^{2x^2} + C \right) e^{-2x^2}, C \in \mathbb{R},$$

а "враћањем" смене налазимо и опште решење Бернулијево диференцијалне једначине:

$$\left\{ y^2 = \left(\frac{1}{2}e^{2x^2} + C \right) e^{-2x^2}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.9** Решити следеће диференцијалне једначине:

а) $xy' + y = y^2 \ln x,$

б) $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0.$

Решење:

а) Након дељења целе једначине са x , јасно је да је она Бернулијева. Након множења са y^{-2} и избором смене $z = y^{-1}$ једначина постаје линеарна,

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{x} \ln x,$$

чије је опште решење

$$\left\{ z = \ln x + Cx + 1, \quad C \in \mathbb{R} \right\},$$

на основу чега је тражено опште решење Бернулијево једначине

$$\left\{ y = \frac{1}{\ln x + Cx + 1}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

б) Аналогно поступку из првог дела задатка, да бисмо ”ослободили” извод y' и препознали облик Бернулијево једначине, потребно је да се цела подели са x . Потом, множећи је са $y^{-\frac{1}{2}}$ и узимајући за смену $z = y^{\frac{1}{2}}$, добијамо линеарну диференцијалну једначину

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}x.$$

Решење ове једначине је

$$\left\{ z = \left(\frac{1}{2} \ln x + C \right) x^2, \quad C \in \mathbb{R} \right\},$$

а ”враћањем смене” налазимо и решење полазне једначине

$$\left\{ y = \left(\frac{1}{2} \ln x + C \right)^2 x^4, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

 **Вежба 5.10** Решити почетни проблем:

$$xy' - 4y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(-1) = 0.$$

Решење:

Најпре ћемо одредити опште решење ове диференцијалне једначине. Запишимо је у облику

$$y' - y \frac{4}{x} = y^{\frac{1}{2}}.$$

Ако целу једначину поделимо са $y^{\frac{1}{2}}$ и изаберемо смену

$$\begin{aligned} z &= y^{\frac{1}{2}} \\ z' &= \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' \end{aligned}$$

добијамо линеарну диференцијалну једначину по z ,

$$z' - \frac{2}{x}z = \frac{1}{2}.$$

Решавањем те једначине помоћу

$$\begin{array}{l} z = uv \\ z' = u'v + uv' \end{array}$$

следи

$$\begin{array}{l} v = x^2, \\ u = -\frac{1}{2x} + C, \end{array}$$

односно

$$z = uv = \left(-\frac{1}{2x} + C\right)x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

”Враћањем” смене налазимо и опште решење полазне Бернулијеве диференцијалне једначине:

$$\left\{ y = \left(-\frac{1}{2x} + C\right)^2 x^4, \quad C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Сада, на основу услова да је $y(-1) = 0$, имамо

$$0 = \left(-\frac{1}{2 \cdot (-1)} + C\right)^2 (-1)^4 = \left(\frac{1}{2} + C\right)^2,$$

па налазимо да је $C + \frac{1}{2} = 0$, односно $C = -\frac{1}{2}$. Стога је тражено партикуларно решење

$$y_p = \left(-\frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right)^2 x^4.$$

**Вежбе за самостални рад****Вежба 5.11** *Одредити општа решења следећих диференцијалних једначина:*

а) $y' = e^{x-y},$

б) $ydx = x \ln y dy,$

в) $x^2 dy = (y + 2)dx,$

г) $e^{x+y} dx + e^{x-y} dy = 0.$

Решења: _____

а) $y = \ln |e^x + C|,$ б) $(\ln y)^2 = \ln x^2 + C,$

в) $\ln |y + 2| = -\frac{1}{x} + C,$ г) $y = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{2x + C} \right|.$

Вежба 5.12 *Одредити општа решења следећих диференцијалних једначина:*

а) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2},$

б) $4y + 2y'x = \cos x,$

в) $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x,$

г) $y' + \frac{y}{x \ln x} = \frac{1}{x}.$

Решења: _____

а) $y = \left(\frac{2}{3} x^3 + C \right) e^{-x^2},$ б) $y = \frac{x \sin x + \cos x + C}{2x^2},$

в) $y = C e^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x + 1,$ г) $y = \frac{\ln x}{2} + \frac{C}{\ln x}.$

Вежба 5.13 *Решити диференцијалне једначине:*

а) $y' - xy = -xy^3,$

б) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0,$

в) $3x^2 y' - 2xy = y^4,$

г) $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$

Решења: _____

а) $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{C e^{-x^2} + 1}},$ б) $y = \frac{1}{(\ln |x+1| + C)(x+1)},$

в) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{C}{x^2} - \frac{1}{x}}},$ г) $y = \frac{1}{(x+C) \cos x}.$

 **Вежба 5.14** Решити диференцијалне једначине:

а) $y' + \frac{y}{x} = 3xy^2,$

б) $y' = (y - 1) \operatorname{ctg} x,$

в) $y' = e^y \sin x,$

з) $\sqrt{1 - y^2} dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$

Решења: _____

а) $y = \frac{1}{(C - 3x)x},$ б) $\ln |y - 1| = \ln |\sin x| + C,$

в) $y = \ln \left| \frac{1}{\cos x + C} \right|,$ з) $y = \sin(C - \arcsin x).$

 **Вежба 5.15** Израчунати партикуларна решења следећих једначина:

а) $(1 + y^2)y' + 2x = 0, y(3) = 0,$

б) $(x^2 - 1)y' + 2xy - 4x = 0, y(2) = 2,$

в) $xy' - y = 1, y(1) = 9,$

з) $xy' + y = \frac{e^x}{y}, y(1) = 2.$

Решења: _____

а) $y_p + \frac{y_p^3}{3} = -x^2 + 9,$ б) $y_p = 2,$

в) $y_p = 10x - 1,$ з) $y_p = \sqrt{\frac{2xe^x - 2e^x + 4}{x^2}}.$

Део Б

Статистика

Приказивање статистичких података

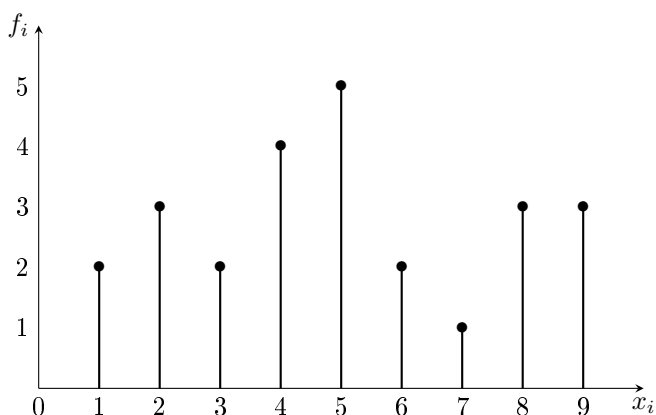
6.1 Квантитативни подаци

6.1.1 Дискретног типа

Вежба 6.1 У 25 случајно одабраних улица у граду избројано је редом 1, 2, 3, 5, 4, 9, 4, 9, 4, 9, 5, 4, 3, 1, 2, 5, 6, 2, 7, 8, 8, 5, 6, 5, 8 кафића. Ове податке приказати табеларно и графички.

Решење: Обележје које посматрамо је број кафића у улици у граду. У табели наводимо, у првој колони, његове варијетете, поређане у растућем редоследу, а у другој колони број појављивања (фреквенције) сваког од варијетета у датом узорку.

x_i	f_i
1	2
2	3
3	2
4	4
5	5
6	2
7	1
8	3
9	3
Σ	25

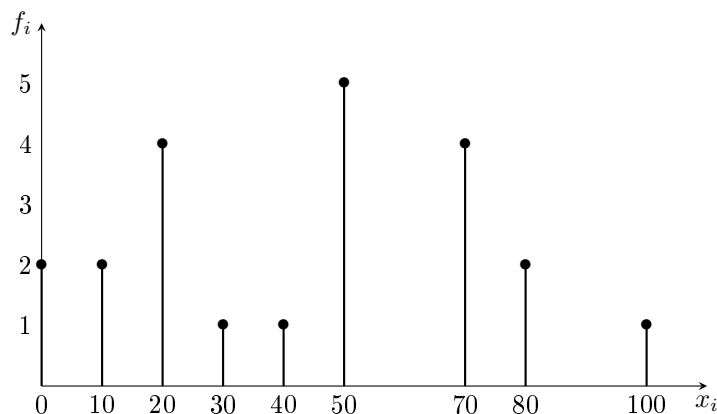


С обзиром да је посматрано обележје дискретног типа, графичка репрезентација података је дата скупом тачака и вертикалних линија до сваке од њих.

Вежба 6.2 Студенти који су полагали испит из статистике, у септембарском испитном року, освојили су следеће поене: 70, 80, 70, 50, 40, 20, 50, 100, 10, 20, 70, 0, 0, 70, 10, 30, 20, 20, 50, 50, 50, 80. Ове податке приказати табеларно и графички.

Решење:

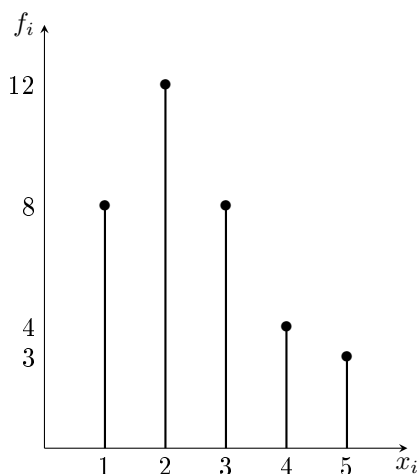
x_i	f_i
0	2
10	2
20	4
30	1
40	1
50	5
70	4
80	2
100	1
Σ	22



Вежба 6.3 У оквиру истраживања животног циклуса једне врсте сисара испитиван је број младунаца из једног легла. На узорку од 35 легала забележен је следећи број младунаца по леглу: 1, 1, 2, 4, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 3, 1, 5, 4, 3, 3, 2, 1. Податке приказати графички и табелом са релативним фреквенцијама.

Решење:

x_i	f_i	p_i
1	8	23%
2	12	34%
3	8	23%
4	4	11%
5	3	9%
Σ	35	100%



Релативне фреквенције представљају однос сваке од фреквенција спрам величине узорка (процентуални удео сваког варијетета). Рачунају се по следећој формули и

исказују у процентима

$$p_i = \frac{f_i}{n}, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

при чему је k број варијетета.

 **Вежба 6.4** Након што је на теренском раду прикупио 17 узорака црвене детелине, млади биолог одлучио је да за потребе даље анализе изврши пребројавање цветова у оквиру цвасти и, при томе, регистровао следеће бројеве: 55, 63, 65, 52, 68, 80, 50, 53, 57, 72, 70, 59, 62, 64, 67, 74, 62. Податке груписати у 6 једнаких интервала и приказати их табеларно.

Решење:

интервал	[50, 55)	[55, 60)	[60, 65)	[65, 70)	[70, 75)	[75, 80]
број цвасти (f_i)	3	3	4	3	3	1

6.1.2 Непрекидног типа

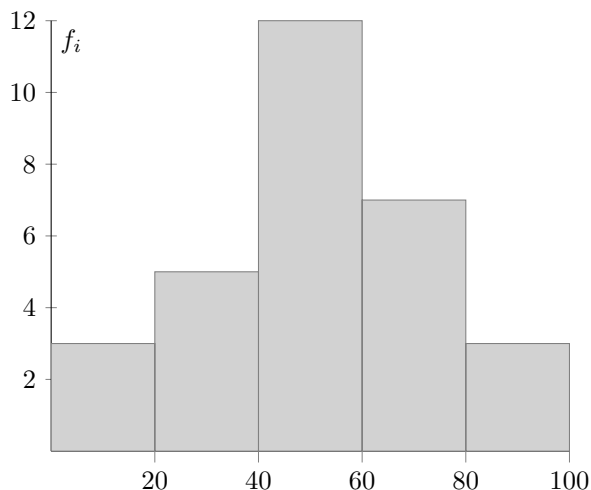
 **Вежба 6.5** У оквиру истраживања животног стандарда становника једног града, регистрован је приход у 30 случајно изабраних домаћинстава. Добијени су следећи подаци (у динарима):

12111, 13211, 15008, 23330, 54002, 81900, 76901, 51222, 45332, 78652, 91999, 98233, 53988, 65444, 45873, 42390, 76449, 76122, 34233, 76338, 34765, 43573, 37854, 74282, 29112, 47876, 54343, 59867, 54334, 45432.

Податке најпре груписати у 5 једнаких интервала у распону од 0 до 100, изражено у хиљадама динара, а затим их приказати табеларно и графички.

Решење:

Интервал	f_i
[0 , 20)	3
[20 , 40)	5
[40 , 60)	12
[60 , 80)	7
[80 , 100]	3
Σ	30



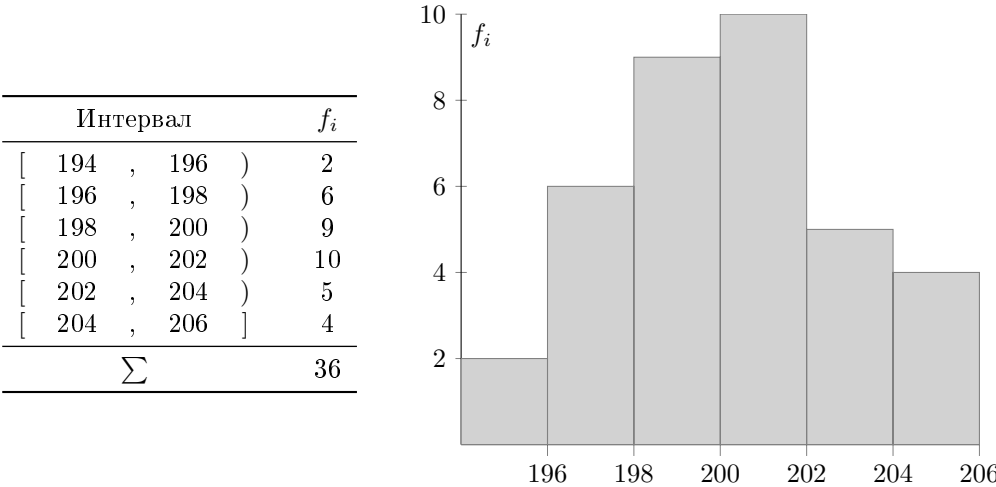
Будући да су сада подаци непрекидног типа, график је представљен унијом правоугаоника, при чему је сваки од њих ширине као и припадајући интервал, док је висина одређена величином фреквенције. Овај тип графика познат је под називом *хистограм*.

Вежба 6.6 Ради контроле квалитета витаминског напитка пакованог у флашице од 100 мл, мерена је количина Ц витамина у 36 случајно изабраних напитака. Добијени су следећи резултати изражени у мг:

197, 195, 194, 196, 196, 198, 197, 199, 201, 200, 201, 204, 206, 205, 203, 202, 202, 201, 201, 203, 196, 199, 197, 198, 200, 198, 199, 199, 198, 200, 202, 205, 200, 199, 200, 201.

Податке најпре груписати у 6 једнаких интервала, а затим их приказати табеларно и графички.

Решење:



Вежба 6.7 Зоолог је, изучавајући јединке жирафа на поднебљу афричког континента, документовао податке о висини (у см) новорођених јединки поменутих врста на једном локалитету у протеклих 5 година:

178, 182, 159, 151, 168, 178, 187, 185, 169, 180, 181, 175, 184, 190, 158, 182, 150, 188, 183, 170, 165, 166, 177, 184, 162, 183, 167, 158, 162, 160, 157, 163, 170, 184, 159, 162. Дате податке најпре груписати у 4 једнака интервала, а затим их приказати табеларно.

Решење:

висина жирафе (интервал)	[150, 160)	[160, 170)	[170, 180)	[180, 190]
број јединки (f_i)	7	10	6	13

6.2 Категоријални подаци

6.2.1 Номинални

 **Вежба 6.8** У једном расаднику ботаничар је одлучио да изврши анализу расположивости популарног цвета Божићна звезда (*Poinsettia*). На располагању има 17 расада у три различите боје: црвена (*C*), роза (*R*) и бела (*B*). Након што је обишао расадник, ботаничар је редом забележио свако појављивање на следећи начин:

$R, C, C, B, R, R, B, C, C, R, C, C, C, B, B, R, C.$

Ове податке приказати најпре табеларно са релативним фреквенцијама, а потом и графички.

Решење:



У овом случају, подаци су дати у виду неуређених категорија, па смо их приказали питичастим графиком.

 **Вежба 6.9** Региструјући боју аутомобила током 24 часа приликом проласка наплатне рампе на аутопуту, при чему су боје следеће: црна (*C*), бела (*B*), црвена (*R*), сребрна (*S*), плава (*P*), регистрован је следећи случајни узорак:

$C, B, B, S, P, C, C, S, R, S, R, B, C, S, P, B, S, S, C, C, R, C, R, P.$

Прикупљене податке приказати табеларно са релативним фреквенцијама.

Решење:

Посматрано обележје је боја аутомобила и оно је квалитативног типа, прецизније, номинално. Табеларни приказ података са релативним фреквенцијама је у наставку.

x_i	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>P</i>	Σ
f_i	7	4	4	6	3	24
p_i	29%	17%	17%	25%	12%	100%

6.2.2 Ординални

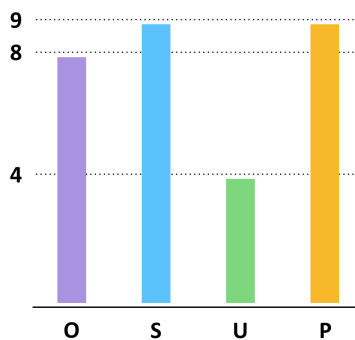
Вежба 6.10 Поводом дана вода, група еколога је одлучила да испита њен квалитет на једном поднебљу, мерећи присуство биоиндикатора на 30 контролних тачака на следећи начин: P (присуство), U (умерено присуство), S (слабо присуство), O (одсуство). Резултати су следећи:

$P, P, U, S, U, P, O, O, S, U, O, P, S, P, S, U, O, O, S, S, P, O, S, O, S, P, P, O, S, P$.

Добијене податке приказати најпре табеларно, а затим и графички.

Решење:

x_i	f_i
O	8
S	9
U	4
P	9
Σ	30



С обзиром да је у питању ординално обележје, могуће је успоставити поредак између варијетета, те смо податке приказали *стубичастим графиком*.



Вежбе за самостални рад

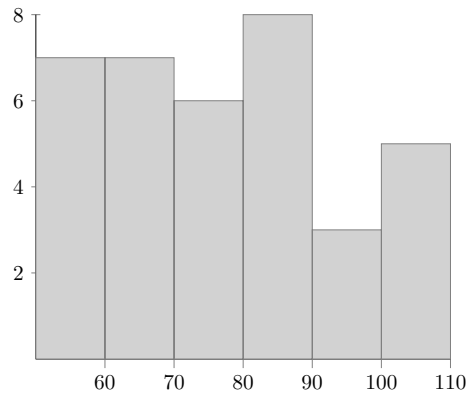
Вежба 6.11 Студенти биологије су посејали зрна пасуља у засебне пластичне посуде и поставили их под извор светлости. Након 14 дана, извршили су мерење висине (у mm) израслих биљака:

75, 101, 83, 98, 57, 103, 92, 87, 50, 66, 67, 110, 105, 86, 88, 59, 62, 81, 94, 54, 102, 89, 57, 61, 73, 72, 79, 88, 89, 67, 76, 55, 59, 65, 68, 71.

Податке груписати у 6 једнаких интервала, а затим приказати табелом и графиком.

Решење:

Интервал	x_i	f_i
[50 , 60)	55	7
[60 , 70)	65	7
[70 , 80)	75	6
[80 , 90)	85	8
[90 , 100)	95	3
[100 , 110]	105	5
Σ		36



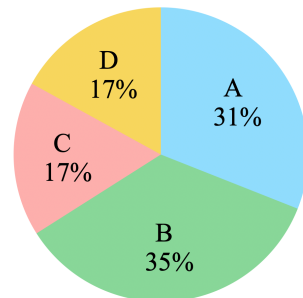
Вежба 6.12 У предизећу које се бави транспортним услугама, на случајан начин анкетирани су запослени и том приликом дали су одговор на питање коју возачку категорију имају и најчешће користе. Одговори су следећи:

A, D, C, B, B, A, D, C, A, A, D, B, B, C, B, A, A, B, B, C, D, A, B, A, C, D, B, A, B.

Ове податке приказати табелом са релативним фреквенцијама и графички.

Решење:

x_i	f_i	p_i
A	9	31%
B	10	35%
C	5	17%
D	5	17%
Σ	29	



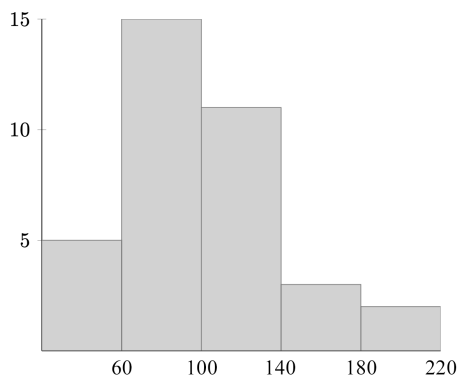
Вежба 6.13 На редовном контролном прегледу радника једног предузећа, лаборант је прикупио серум 36 особа мушког пола и за потребе анализе посматрао нивое креатин-фосфокиназе у крви. Тим путем, добијене су следеће вредности:

121, 82, 100, 151, 68, 58, 95, 145, 64, 201, 101, 163, 84, 57, 139, 60, 78, 94, 119, 104, 110, 113, 118, 203, 62, 83, 67, 93, 92, 110, 25, 123, 70, 48, 95, 42.

Податке најпре груписати у 5 једнаких интервала у распону од 20 до 220, а потом их приказати табеларно и графички.

Решење:

Интервал	x_i	f_i
[20 , 60)	40	5
[60 , 100)	80	15
[100 , 140)	120	11
[140 , 180)	160	3
[180 , 220]	200	2
Σ		36



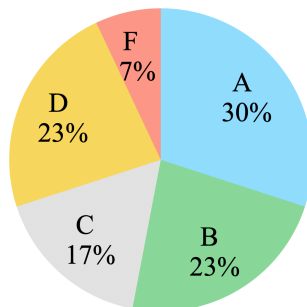
Вежба 6.14 Успех који ученик може остварити у току школске године може примити следеће вредности: недовољан (F), довољан (D), добар (C), врло добар (B) и одличан (A). На крају полугодишта, разредни старешина је, за потребе анализе успешности својих ученика, прикупио следеће податке:

A, F, D, C, B, A, A, D, C, C, B, A, B, A, F, D, B, B, D, B, D, C, C, A, A, A, B, D, A, D.

Дате податке приказати табелом са релативним фреквенцијама и графички.

Решење:

x_i	f_i	p_i
A	9	30%
B	7	23%
C	5	17%
D	7	23%
F	2	7%
Σ	30	



 **Вежба 6.15** За потребе анализе потрошње горива на 100 km једне категорије путничких аутомобила у условима возње на отвореном путу, редакција ауто часописа извршила је мерења потрошње горива на 100 km, и добила следеће вредности:

6.2, 4, 7.8, 9, 8.9, 5.4, 5.2, 7.1, 8.7, 6.5, 5.9, 4.8, 4.2, 8.3, 8.2, 7.5, 4.4, 5.6, 8.8. Податке груписати у 5 једнаких интервала од 4 до 10, а затим и табелом са релативним фреквенцијама.

Решење:	Интервал		x_i	f_i	p_i
	[	4 , 5.2)	4.6	4	21%
	[	5.2 , 6.4)	5.8	5	26%
	[	6.4 , 7.6)	7	3	16%
	[	7.6 , 8.8)	8.2	4	21%
	[	8.8 , 10]	9.4	3	16%
Σ			19		

Дескриптивна статистика

7.1 Мере централне тенденције

Средина (средња вредност, аритметичка средина, просек) узорка

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i f_i}{n} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_k f_k}{n},$$

- варијетети : x_i , $i = 1, 2, \dots, k$
- њихове фреквенције : f_i , $i = 1, 2, \dots, k$
- величина (обим) узорка : $n = f_1 + f_2 + \cdots + f_k$

Медијана је вредност која се налази тачно на средини, када се варијетети поређају у растућем редоследу и сваки наведе онолико пута колика му је фреквенција.

Мод је варијетет који има највећу фреквенцију.

 **Вежба 7.1** У оквиру истраживања животног циклуса једне врсте сисара испитивао се број младунаца из једног легла. Прикупљени подаци су:

број младунаца	1	2	3	4	5
број легала	145	240	194	126	95

Одредити мод, медијану и аритметичку средину броја младунаца по леглу.

Решење:

Обележје је број младунаца из једног легла, а његови варијетети су 1, 2, 3, 4 и 5.

Њих смештамо у прву колону помоћне табеле (лево), у којој вршимо сва неопходна израчунавања, пре употребе формула. Последњу врсту третирамо као збирну, и у њој рачунамо суму сваке колоне, осим последње. Након комплетирања помоћне табеле, прелазимо на израчунавања помоћу формула.

x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i										
1	145	145	145	<table><tr><th colspan="2">МЦТ</th></tr><tr><td>мод</td><td>2</td></tr><tr><td>мед</td><td>3</td></tr><tr><td>$\bar{x}$</td><td>2.7325</td></tr></table>		МЦТ		мод	2	мед	3	$\bar{x}$	2.7325
МЦТ													
мод	2												
мед	3												
$\bar{x}$	2.7325												
2	240	480	385										
3	194	582	579										
4	126	504	705										
5	95	475	800										
Σ	800	2186											

Обим узорка добијамо сабирањем фреквенција и он износи 800. Највећа фреквенција износи 240 и она одговара варијетету 2, стога је мод посматраног обележја 2. Поступак за одређивање медијане је следећи. Најпре ћемо, у помоћној табели, у последњој колони срачунати *кумулятивне* фреквенције (F_i) и констатовати да је обим узорка (800) паран број. То значи да су средње позиције у растућем варијационом низу позиције 400. и 401. Преостаје још да прочитамо вредности варијетета на овим позицијама користећи податке о кумулативним фреквенцијама. Кумулативне фреквенције говоре следеће:

- од првог до 145. места у варијационом низу налази се вредност 1,
- од 146. до 385. места у варијационом низу налази се вредност 2,
- од 386. до 579. места у варијационом низу налази се вредност 3,
- ... и тако даље.

Дакле, на 400. и 401. позицији налази се вредност 3. Медијана је њихова аритметичка средина, што износи 3. За крај, употребом формуле за средину, налазимо да она износи $\bar{x} = \frac{2186}{800} = 2.7325$.

 **Вежба 7.2** Ради испитивања броја изостанака са наставе у току једног дана у школи, изабран је узорак од 100 ученика и добијени су подаци:

број изостанака	0	1	2	3	4	5	6
број ученика	30	20	7	15	18	6	4

Одредити мод, медијану и просечан број изостанака.

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i	МЦТ	
0	30	0	30	мод	0
1	20	20	50	мед	1.5
2	7	14	57	$\bar{x}$	2.05
3	15	45	72		
4	18	72	90		
5	6	30	96		
6	4	24	100		
Σ	100	205			

На основу помоћне табеле, добијамо да је мод 0, медијана 1.5, а просечна вредност броја изостанака $\bar{x} = \frac{205}{100} = 2.05$.

 **Вежба 7.3** Фабрика пакује шећер у коцкама у кутије тежине пола килограма. Да би се проверила тежина кутија, узима се узорак од 50 кутија. Након што је измерена тежина сваке кутије, подаци су приказани у виду следеће табеле:

тежина у грамима	[496, 498)	[498, 500)	[500, 502)	[502, 504]
број кутија	8	25	12	5

Одредити средину за дато обележје на основу овог узорка.

Решење:

Приметимо да су у овом случају вредности обележја представљене интервално, па их тако уносимо у помоћну табелу, с тим да колону x_i рачунамо као средине тих интервала. Фреквенције препишемо. Остатак процедуре остаје непромењен.

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i	середина	
[496 , 498)	497	8	3976	8	$\bar{x}$	499.56
[498 , 500)	499	25	12475	33		
[500 , 502)	501	12	6012	45		
[502 , 504]	503	5	2515	50		
Σ		50	24978			

Просечна тежина кутије шећера коју производи посматрана фабрика је $\bar{x} = \frac{24978}{50} = 499.56 \text{ g}$.

 **Вежба 7.4** У табели су дати подаци о броју станара по стану у једном блоку зграда:

број станова	5	1	3	6	4	2	7
број станара	1	7	5	4	3	6	2

Одредити мере централне тенденције за број станара по стану у том блоку зграда.

Решење:

Пре свега, приметимо да могући бројеви станара у стану представљају варијетете, док су фреквенције дате бројем станова у којима толики број станара живи.

x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i		
1	5	5	5		
2	7	14	12		
3	4	12	16		
4	6	24	22		
5	3	15	25		
6	2	12	27		
7	1	7	28		
Σ	28	89			

МЦТ	
мод	2
мед	3
$\bar{x}$	3.1786

Закључујемо да је, у посматраном блоку зграда, највише станова у којима живе две особе, док се у око 50% укупног броја станова налази највише 3 станара. Просечан број станара у стану износи 3 (заокружена вредност од 3.1786).

 **Вежба 7.5** Након регистравања броја ауто-кућа у 60 земаља, добијени подаци су сређени у виду табеле:

број ауто-кућа	[0, 20)	[20, 40)	[40, 60)	[60, 80]
број земаља	18	12	19	11

Израчунати просечан број ауто-кућа по земљи.

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	F_i		
[0 , 20)	10	18	180	18		
[20 , 40)	30	12	360	30		
[40 , 60)	50	19	950	49		
[60 , 80]	70	11	770	60		
Σ		60	2260			

средина	
$\bar{x}$	37.6667

Просечан број ауто кућа по земљи, на основу посматраног узорка, је 38.

7.2 Мере одступања

Варијанса (дисперзија):
$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 f_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i^2 f_i}{n} - \bar{x}^2$$

Стандардна девијација s :
$$s = \sqrt{s^2}$$

Коефицијент варијације:
$$V = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

 **Вежба 7.6** У оквиру истраживања животног циклуса једне врсте сисара испитивао се број младунаца из једног легла. Прикупљени подаци су:

број младунаца	1	2	3	4	5
број легала	145	240	194	126	95

Одредити мере одступања посматраног обележја.

Решење:

Конструкција помоћне табеле слична је ранијој процедури, само што не формирамо више кумулативне фреквенције F_i , а додајемо нову колону $x_i^2 f_i$.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$										
1	145	145	145	<table><tr><th colspan="2">МО</th></tr><tr><td>s^2</td><td>1.5859</td></tr><tr><td>s</td><td>1.2593</td></tr><tr><td>V</td><td>46.09%</td></tr></table>		МО		s^2	1.5859	s	1.2593	V	46.09%
МО													
s^2	1.5859												
s	1.2593												
V	46.09%												
2	240	480	960										
3	194	582	1746										
4	126	504	2016										
5	95	475	2375										
Σ	800	2186	7242										

У овом примеру приказујемо детаљно поступак израчунавања:

$$s^2 = \frac{7242}{800} - 2.7325^2 = 1.5859$$

$$s = \sqrt{1.5859} = 1.2593$$

$$V = \frac{1.2593}{2.7325} \cdot 100\% = 46.09\%$$

Дакле, варијанса односно средње квадратно одступање је 1.5859, стандардно одступање износи 1.2593, док је процентуално одступање од средине 46.09%.

 **Вежба 7.7** Ради испитивања броја изостанака са наставе у току једног дана у школи, изабран је узорак од 100 ученика и добијени су подаци:

број изостанака	0	1	2	3	4	5	6
број уџеника	30	20	7	15	18	6	4

Одредити мере одступања.

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
0	30	0	0		
1	20	20	20		
2	7	14	28		
3	15	45	135		
4	18	72	288		
5	6	30	150		
6	4	24	144		
Σ	100	205	765		

МО	
s^2	3.4475
s	1.8567
V	90.57%

Средње квадратно одступање од просечне вредности броја изостанака у току посматраног дана је 3.4475, док је стандардна девијација 1.8567. Коефицијент варијације је 90.57%.

 **Вежба 7.8** Фабрика пакује шећер у коцкама у кутије тежине пола килограма. Да би се проверила тежина кутија, узима се узорак од 50 кутија. Након што је измерена тежина сваке кутије, подаци су приказани у виду следеће табеле:

тежина у грамима	[496, 498)	[498, 500)	[500, 502)	[502, 504]
број кутија	8	25	12	5

Израчунати мере одступања тежине кутије. Да ли фабрика поштује стандард дозвољеног одступања од просечне тежине до 1% ?

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
[496 , 498)	497	8	3976	1976072		
[498 , 500)	499	25	12475	6225025		
[500 , 502)	501	12	6012	3012012		
[502 , 504]	503	5	2515	1265045		
Σ		50	24978	12478154		

МО	
s^2	2.8864
s	1.6989
V	0.34%

Варијанса обележја износи 2.8864, стандардна девијација је 1.6989, док је просечно одступање од средње вредности 0.34%. На основу овог узорка закључујемо да фабрика *поштује* стандард дозвољеног одступања од просечне тежине до 1%.

 **Вежба 7.9** У табели су дати подаци о броју станара по стану у једном блоку зграда:

број станова	5	1	3	6	4	2	7
број станара	1	7	5	4	3	6	2

Одредити мере одступања за број станара по стану у том блоку зграда.

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
1	5	5	5		
2	7	14	28		
3	4	12	36		
4	6	24	96		
5	3	15	75		
6	2	12	72		
7	1	7	49		
Σ	28	89	361		

МО	
s^2	2.7895
s	1.6702
V	52.55%

Варијанса, односно средње квадратно одступање од средине узорка износи 2.7895, док је стандардно одступање 1.6702. Процентуално одступање од средине је 52.55%.

 **Вежба 7.10** Након регистрација броја ауто-кућа у 60 земаља, добијени подаци су сређени у виду табеле:

број ауто-кућа	[0, 20)	[20, 40)	[40, 60)	[60, 80]
број земаља	18	12	19	11

Израчунати мере одступања за број ауто-кућа у једној земљи.

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
[0 , 20)	10	18	180	1800		
[20 , 40)	30	12	360	10800		
[40 , 60)	50	19	950	47500		
[60 , 80]	70	11	770	53900		
Σ		60	2260	114000		

МО	
s^2	481.2222
s	21.9368
V	58.24%

На основу датог узорка налазимо да је варијанса 481.2222, стандардна девијација 21.9368, док је процентуално одступање од просека 58.24%.

Вежбе за самостални рад

 **Вежба 7.11** Студенти биологије су посејали зрна пасуља у засебне пластичне посуде и поставили их под извор светлости. Након 14 дана, извршили су мерење висине (у *mm*) израслих биљака: 75, 101, 83, 98, 57, 103, 92, 87, 50, 66, 67, 110, 105, 86, 88, 59, 62, 81, 94, 54, 102, 89, 57, 61, 73, 72, 79, 88, 89, 67, 76, 55, 59, 65, 68, 71.

Податке груписати у 6 једнаких интервала, а затим одредити МЦТ и МО.

Решење:	МЦТ		МО	
	<i>мод</i>	85	s^2	272.8395
	<i>мед</i>	75	S	16.5179
	$\bar{x}$	77.2222	V	21.39%

 **Вежба 7.12** Одредити средину и мере одступања количине C витамина у *mg*, које је на узорку од 35 случајно изабраних бочица измерио контролор квалитета:

кол. C	[194, 196)	[196, 198)	[198, 200)	[200, 202)	[202, 204)	[204, 206]
бр. боч.	2	6	9	10	4	4

Решење:	МО	
	<i>средина</i>	s^2
	$\bar{x}$	S
	200.1429	1.36%

 **Вежба 7.13** Зоолог је, изучавајући јединке жирафа на поднебљу афричког континента, документовао податке о висини (у *cm*) новорођених јединки ове врсте на једном локалитету у протеклих 5 година:

висина жирафе	[150, 160)	[160, 170)	[170, 180)	[180, 190]
број јединки	7	10	7	14

Одредити средину и мере одступања.

Решење:	МО	
	<i>средина</i>	s^2
	$\bar{x}$	S
	172.3684	6.61%

 **Вежба 7.14** Истраживач који проучава понашање мишева спровео је експеримент, у којем је мерио време (у секундама) потребно да би миш пронашао храну у лавиринту. Време је мерио на узорку од 20 јединки, а резултати експеримента су:

31, 33, 46, 23, 20, 28, 29, 33, 27, 34, 35, 28, 32, 50, 41, 31, 48, 22, 30, 39.

Добијене податке најпре груписати у 5 једнаких интервала, а потом одредити мере централне тенденције и мере одступања овог обележја.

Решење:	МЦТ		МО	
	мод	29	s^2	51.15
	мед	32	S	7.5598
	$\bar{x}$	33.5	V	22.57%

 **Вежба 7.15** За потребе анализе потрошње горива на 100 km једне категорије путничких аутомобила у условима возње на отвореном путу, редакција ауто часописа извршила је мерења потрошње горива на 100 km, и добила следеће вредности:

6.2, 4, 7.8, 9, 8.9, 5.4, 5.2, 7.1, 8.7, 6.5, 5.9, 4.8, 4.2, 8.3, 8.2, 7.5, 4.4, 5.6, 8.8.

Податке груписати у 5 једнаких интервала од 4 до 10, а потом одредити мере централне тенденције, као и мере одступања.

Решење:	МЦТ		МО	
	мод	5.8	s^2	2.7683
	мед	7	S	1.6638
	$\bar{x}$	6.8105	V	24.43%

Интервали поверења за средину популације

Величина популације (N) није позната

1. Дати или претходно срачунати подаци:

обим узорка: n средина узорка: $\bar{x}$ стандардна девијација узорка: s

ниво поверења: $1 - \alpha$

2. Рачунање корекције ε :

случај	ε
σ познато	$z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
σ непознато и $n > 30$	$z_{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$
σ непознато и $n \leq 30$	$t_{n-1, \alpha} \frac{s}{\sqrt{n-1}}$

- стандардна девијација целе популације: σ
- број који се одређује из z -таблице: $z_{\frac{1-\alpha}{2}}$
- број који се одређује из t -таблице: $t_{n-1, \alpha}$

3. Интервал поверења за средину је: $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$

Величина популације (N) је позната

- ако је $\frac{n}{N} < 0.04 = 4\%$ користи се претходно наведени поступак
- ако је $\frac{n}{N} \geq 0.04 = 4\%$ додатно се рачуна *корективни фактор*

$$\kappa = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Интервал поверења за средину: $(\bar{x} - \kappa\varepsilon, \bar{x} + \kappa\varepsilon)$

 **Вежба 8.1** У оквиру истраживања животног циклуса једне врсте сисара испитивао се број младунаца из једног легла. Прикупљени подаци о 800 случајно изабраних легала сврстани су у табелу:

број младунаца	1	2	3	4	5
број легала	145	240	194	126	95

- (а) Одредити интервал поверења за средњу вредност на нивоу поверења 95%, ако величина популације није позната.
- (б) На нивоу поверења од 95% проценити укупан број младунаца, ако је посматрани узорак узет на територији региона на којој је процењено да постоји две хиљаде легала ове врсте сисара. Да ли сте примењивали корективни фактор и зашто?

Решење:

Најпре ћемо приступити рачунању неопходних статистика на основу расположивих података.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$			
1	145	145	145	узорак n 800 $\bar{x}$ 2.7325 s^2 1.5859 s 1.2593 ниво поверења $1 - \alpha$ 0.95		
2	240	480	960			
3	194	582	1746			
4	126	504	2016			
5	95	475	2375			
Σ	800	2186	7242			

- (а) С обзиром да величина популације није позната, интервал поверења је облика $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$.

рачунање корекције		интервал поверења	
$z_{0.475}$	1.96	$\bar{x} - \varepsilon$	2.6452
ε	0.0873	$\bar{x} + \varepsilon$	2.8198

Закључак: Ако бисмо експеримент, односно пребројавање младунаца у леглима, понављали "безброј" (велики број) пута, сваки пут узимајући узорке обима 800, у 95% случајева би тачна вредност средине популације, која је непознати параметар, била нека вредност из интервала (2.6452, 2.8198). У сваком појединачном експерименту (непозната) тачна вредност средине популације може, а не мора припадати срачунатом интервалу поверења.

(б)

популација		n/N 40%			
N	2000				
рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
$z_{0.475}$	1.96	$\bar{x} - \kappa\varepsilon$	2.6648	од	5329
ε	0.0873	$\bar{x} + \kappa\varepsilon$	2.8	до	5600
κ	0.7748				

У случају када је величина популације позната, најпре треба утврдити да ли се корективни фактор примењује или не. Будући да је $800/2000 = 0.4 = 40\% > 4\%$, неопходно је укључити га у израчунавање.

Интервал поверења за средину популације је (2.6648, 2.8), што значи да, ако бисмо експеримент, односно пребројавање младунаца у леглима, понављали "безброј" (велики број) пута, сваки пут узимајући узорке обима 800, у 95% случајева би тачна вредност средине популације, која је непознати параметар, била нека вредност из интервала (2.6648, 2.8).

Да бисмо проценили *укупан број* младунаца на територији региона на којој има 2000 легала, потребно је границе интервала поверења за просечну вредност броја младунаца помножити са величином популације, односно са 2000. Дакле, закључујемо да се укупан број младунаца на посматраној територији креће између $2.6648 \cdot 2000 = 5329$ и $2.8 \cdot 2000 = 5600$.


Вежба 8.2

Према подацима Завода за статистику, део увоза Републике Србије од јануара до октобра једне године, на случајном узорку, изгледао је:

вредност у хиљадама \$	број увозника
[0, 30)	100
[30, 60)	400
[60, 90)	150
[90, 120]	350

Са сигурношћу од 99%, проценити укупну вредност увоза у овом периоду, ако се зна да је број активних увозника био двадесет хиљада.

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
[0 , 30)	15	100	1500	22500	n	1000
[30 , 60)	45	400	18000	810000	$\bar{x}$	67.5
[60 , 90)	75	150	11250	843750	s^2	978.75
[90 , 120]	105	350	36750	3858750	s	31.285
Σ		1000	67500	5535000		

популација	ниво поверења	n/N	5%
N 20000	$1 - \alpha$ 0.99		

рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
$z_{0.495}$	2.58	$\bar{x} - \kappa\varepsilon$	65.0109	од	1300217.61
ε	2.5537	$\bar{x} + \kappa\varepsilon$	69.9891	до	1399782.39
κ	0.9747				

 **Вежба 8.3** На једној студијској групи од 2000 студената њих 756 прима стипендије. Од 30 случајно изабраних студената, 19 студената је у току семестра примило стипендију (у хиљадама динара) и то:

стипендија	број студената
[2, 4)	5
[4, 6)	5
[6, 8)	4
[8, 10)	3
[10, 12]	2

Одредити интервал поверења за просечну стипендију на посматраној студијској групи, на нивоу поверења 0.9. У којим границама ће се кретати укупна вредност исплаћених стипендија овој студијској групи са истим нивоом поверења?

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
[2 , 4)	3	5	15	45	n	19
[4 , 6)	5	5	25	125	$\bar{x}$	6.1579
[6 , 8)	7	4	28	196	s^2	6.8698
[8 , 10)	9	3	27	243	s	2.6210
[10 , 12]	11	2	22	242		
Σ		19	117	851		

популација		ниво поверења		n/N 3%	
N	756	$1 - \alpha$	0.9		
рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
$t_{18,0.1}$	1.7341	$\bar{x} - \varepsilon$	5.0866	од	3845.48
ε	1.0713	$\bar{x} + \varepsilon$	7.2292	до	5465.26

 **Вежба 8.4** Фабрика продаје свој производ преко мреже од 1000 продавница. Ради контроле продаје, изабране су 64 продавнице и регистрована је месечна продаја (изражена у 10000 РСД). Подаци су приказани у табели:

месечна продаја	2	3	4	5	6	7
број продавница	5	15	24	11	6	3

Познато је да расподела броја продатих производа у поменутој мрежи продавница има средње квадратно одступање 0.9. Одредити интервал поверења за просечан број продатих производа, на нивоу поверења 0.95. У којим границама ће се кретати укупан број продатих производа, на истом нивоу поверења?

Решење:
Приметимо да је, за разлику од претходних примера, варијанса популације позната. Због тога, интервал поверења за средину популације налазимо овако:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
2	5	10	20	n	64
3	15	45	135	$\bar{x}$	4.1094
4	24	96	384	s^2	1.5037
5	11	55	275	s	1.2262
6	6	36	216		
7	3	21	147		
Σ	64	263	1177		
популација		ниво поверења		n/N 6.4%	
N	1000	$1 - \alpha$	0.95		
σ^2	0.90				
σ	0.9487				
рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
$z_{0.475}$	1.96	$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	3.8844	од	3884.4
ε	0.2324	$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	4.3344	до	4334.4
κ	0.9680				

 **Вежба 8.5** Аналитичар компаније *SkyLine* добио је извештај о случајевима изгубљених пртљага у последњих десет година. У табели су дати подаци о месечном броју изгубљених пртљага за 20 случајно изабраних месеци.

број изгубљених пртљага	5	4	3	2	1
број месеци	1	3	5	6	5

- (а) У којим се границама, на нивоу поверења 90%, креће укупан број изгубљених пртљага у протеклих десет година?
- (б) У којим се границама, на нивоу поверења 95%, креће укупан број изгубљених пртљага у протеклих десет година?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак		популација	
1	5	5	5	n	20	N	120
2	6	12	24	$\bar{x}$	2.45	n/N	17%
3	5	15	45	s^2	1.3475		
4	3	12	48	s	1.1608		
5	1	5	25				
Σ	20	49	147				

(а)

ниво поверења		интервал поверења		укупно	
$1 - \alpha$	0.9	$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	2.0279	од	243
рачунање корекције		$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	2.8721	до	345
$t_{19,0.1}$	1.729				
ε	0.4604				
κ	0.9167				

(б)

ниво поверења		интервал поверења		укупно	
$1 - \alpha$	0.95	$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	1.9391	од	233
рачунање корекције		$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	2.9609	до	355
$t_{19,0.05}$	2.093				
ε	0.5574				
κ	0.9167				

 **Вежба 8.6** *Анализира се промет некретнина у првом кварталу 2024. године у агенцији која запошљава 200 агената продаје. У табели су дати подаци о броју продатих станова преко те агенције за случајно изабране дане у том периоду:*

број продатих станова	5	7	6	4	3	2	1
број дана	1	2	4	3	5	6	7

У којим се границама, на нивоу поверења 0.95, креће просечна дневна продаја станова преко те агенције у првом кварталу 2024? Шта можемо рећи о укупном броју продатих станова преко ове агенције у посматраном периоду, на нивоу поверења 0.99?

Решење:
Приметимо да је у овом задатку обележје број продатих станова на дневном нивоу.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
1	7	7	7		
2	6	12	24		
3	5	15	45		
4	3	12	48		
5	1	5	25		
6	4	24	144		
7	2	14	98		
Σ	28	89	391		

узорак		популација	
n	28	N	90
$\bar{x}$	3.1786	n/N	31%
s^2	3.8610		
s	1.9649		

ниво поверења					
$1 - \alpha$	0.95	интервал поверења		укупно	
рачунање корекције		$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	2.5310	од	227
$t_{27,0.05}$	2.0518	$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	3.8262	до	345
ε	0.7759				
κ	0.8346				

ниво поверења					
$1 - \alpha$	0.99	интервал поверења		укупно	
рачунање корекције		$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	2.3041	од	207
$t_{27,0.01}$	2.7707	$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	4.0531	до	365
ε	1.0477				
κ	0.8346				

 **Вежба 8.7** Резултати анализе броја сунчаних дана у фебруару 2025. на узорку од 25 градова једног региона су:

број сунчаних дана	[3 , 8)	[8 , 13)	[13 , 18)	[18 , 23)	[23 , 28]
број градова	2	7	10	4	2

У којим се границама (уз вероватноћу од 0.95) кретао просечан број сунчаних дана у целом региону? Ако претпоставимо да је клима таква да су сви месеци слични фебруару, колико се очекује сунчаних дана у току 2025. године у овом региону?

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
[3 , 8)	5.5	2	11	60.5	n	25
[8 , 13)	10.5	7	73.5	771.75	$\bar{x}$	14.9000
[13 , 18)	15.5	10	155	2402.5	s^2	26.6400
[18 , 23)	20.5	4	82	1681	s	5.1614
[23 , 28]	25.5	2	51	1300.5		
Σ		25	372.5	6216.25		

ниво поверења		интервал поверења		годишње	
$1 - \alpha$	0.95	$\bar{x} - \varepsilon$	12.7255	од	153
рачунање корекције		$\bar{x} + \varepsilon$	17.0745	до	205
$t_{24,0.05}$	2.0639				
ε	2.1745				

 **Вежба 8.8** Резултати испитивања месечне потрошње хлеба у kg на узорку од 200 домаћинстава из једног града, у којем је регистровано 5000 домаћинстава, су дати у следећој табели:

потрошња хлеба	2	3	4	5	6
број домаћинстава	10	30	60	70	30

У којим се границама, са сигурношћу од 90%, креће очекивана потрошња хлеба у том граду?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$				
2	10	20	40	узорак		популација	
3	30	90	270	n	200	N	5000
4	60	240	960	$\bar{x}$	4.4		
5	70	350	1750	s^2	1.14	n/N	4.00%
6	30	180	1080	s	1.0677		
Σ	200	880	4100				

		рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
ниво поверења		$z_{0.45}$	1.64	$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	4.2780	од	21390
$1 - \alpha$	0.90	ε	0.1245	$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	4.5220	до	22610
		κ	0.9799				

 **Вежба 8.9** У једном приградском насељу на случајан начин анкетирано је неколико домаћинстава и евидентирано колико дневно троше млека (у l). Подаци су следећи:

број домаћинстава	5	15	20	11	9
потрошња млека	6	3	2	1	4

У којим се границама, на нивоу поверења 0.95, може очекивати просечна дневна потрошња млека једног домаћинства? Ако у том насељу има 900 домаћинстава, у којим се границама креће укупна просечна дневна потрошња млека?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$				
6	5	30	180	узорак		популација	
3	15	45	135	n	60	N	900
2	20	40	80	$\bar{x}$	2.7		
1	11	11	11	s^2	1.8767	n/N	6.67%
4	9	36	144	s	1.3699		
Σ	60	162	550				

		рачунање корекције		интервал поверења		укупно	
ниво поверења		$z_{0.475}$	1.96	$\bar{x} - \kappa \varepsilon$	2.3621	од	2126
$1 - \alpha$	0.95	ε	0.3496	$\bar{x} + \kappa \varepsilon$	3.0379	до	2734
		κ	0.9666				

 **Вежба 8.10** Одсек за контролу квалитета анализира просечан век трајања сијалице компаније *G Electric*. Након мерења које је извршено на узорку обима 100, добијена је средина века трајања од 930 радних сати. Израчунати 99% интервал поверења просечног века трајања сијалице, ако се зна да је коефицијент варијације 2%.

Решење:

узорак				рачунање корекције		интервал поверења	
n	100	ниво поверења		$z_{0.495}$	2.5758	$\bar{x} - \varepsilon$	925.1848
$\bar{x}$	930	$1 - \alpha$	0.99	ε	4.8152	$\bar{x} + \varepsilon$	934.8152
V	2%						
s	18.6						



Вежбе за самостални рад

Вежба 8.11 У табели су дати подаци о броју деце која су се родила у претходних 5 година, у неколико случајно одабраних породица:

број породица	5	17	10	2	1
број деце	1	2	3	4	5

У којим се границама, на нивоу поверења 0.95, може очекивати просечан број новорођене деце у породици у последњих 5 година? Ако имамо податак да у том региону живи 500 породица, у којим се границама креће укупан број деце рођене у последњих 5 година у том региону?

Решење: $\bar{x} = 2.3429$,
 $\varepsilon = 0.3$, $\kappa = 0.9653$,
 $(\bar{x} - \kappa\varepsilon, \bar{x} + \kappa\varepsilon) = (2.0532, 2.6325)$,
 процена од 1027 до 1316.

Вежба 8.12 У једном граду анкетирана је група тинејџера уз питање колико новца троше на забаву недељно:

издаци (у стотинама)	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50]
број тинејџера	5	10	10	20	5

У којим се границама, на нивоу поверења 0.95, креће просечан износ новца који тинејџер потроши на забаву током једне недеље?

Решење: $\bar{x} = 27$,
 $\varepsilon = 3.2653$,
 $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) = (23.7347, 30.2653)$.

Вежба 8.13 У једном кварту испитиван је број возила по домаћинству, а прикупљени подаци су:

број возила	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5]
број домаћинстава	5	17	10	2	1

У којим се границама, на нивоу поверења 0.99, може очекивати просечан број возила у једном домаћинству? Ако се зна да у том кварту има 600 домаћинстава, у којим се границама креће укупан број возила?

Решење: $\bar{x} = 1.8429$,
 $\varepsilon = 0.3943$, $\kappa = 0.9712$,
 $(\bar{x} - \kappa\varepsilon, \bar{x} + \kappa\varepsilon) = (1.4599, 2.2258)$,
 процена од 876 до 1335.

 **Вежба 8.14** У табели су дати подаци о броју букета који су продати у једној цвећари 8. марта током сат времена:

букета	11	7	5	1	3
купаца	2	2	5	8	5

У којим се границама, на нивоу поверења 0.95, може очекивати просечан број букета који су продати у тој цвећари 8. марта током сат времена? Ако се зна да је ова цвећара имала 1200 купаца на овај дан, у којим се границама кретао укупан број продатих букета, на истом нивоу поверења?

Решење: $\bar{x} = 3.8182$,
 $\varepsilon = 1.3589$,
 $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) = (2.4593, 5.1771)$,
процена од 2951 до 6213.

 **Вежба 8.15** На узорку од 17 АА батерија у играчкама анализиран је и измерен радни век батерија. Узорачка средина трајања батерије је 3.58 сати, док је узорачка стандардна девијација 1.85. Одредити 99% интервал поверења очекиваног радног века батерије.

Решење: $\varepsilon = 1.3509$,
 $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon) = (2.2291, 4.9309)$.

t -тест за средину популације

Циљ: Упоредити средину узорка и средину целе популације

Услов: Популација мора имати непрекидну расподелу, ако је $n < 30$

Статистика:
$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s}$$

обим узорка: n средина узорка: $\bar{x}$ стандардна девијација узорка: s

грешка теста (ниво значајности): α

Двострани тест

Нулта хипотеза $H_0 : \mu = \mu_0$

Алтернативна хипотеза
 $H_A : \mu$ се значајно разликује од μ_0

Критична вредност из таблице:
 $t_{n-1,\alpha}$

Закључак H_0 се:

- одбацује ако $|t| > t_{n-1,\alpha}$,
- не одбацује ако $|t| \leq t_{n-1,\alpha}$.

Једнострани тест

Нулта хипотеза $H_0 : \mu \leq (\geq) \mu_0$

Алтернативна хипотеза
 $H_A : \mu$ је значајно веће од μ_0
 (μ је значајно мање од μ_0)

Критична вредност из таблице:
 $t_{n-1,2\alpha}$

Закључак H_0 се:

- одбацује ако $t > t_{n-1,2\alpha}$
 ($t < -t_{n-1,2\alpha}$),
- не одбацује ако $t \leq t_{n-1,2\alpha}$
 ($t \geq -t_{n-1,2\alpha}$).

 **Вежба 9.1** Аналитичар службе за квалитет производње фабрике плочица *Tile Expert* треба да достави извештај, на основу којег ће се доносити одлуке. Он је прикупио информације о одступањима од декларисаних мера (у милиметрима) за 170 случајно изабраних плочица из производње ове фабрике у претходном кварталу. Прикупљени подаци су дати у табели:

одступање (mm)	0	10	20	30	40
број плочица	30	60	50	20	10

Управни одбор компаније *Tile Expert*, усагласио се да, уколико у претходном кварталу у просеку нема одступања од декларисаних мера, са могућношћу грешке до 10%, компанија неће уводити рестриктивне мере запосленима. Који су резултати извештаја и какве су одлуке спроведене?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
0	30	0	0	узорак	
10	60	600	6000	n	170
20	50	1000	20000	$\bar{x}$	15.2941
30	20	600	18000	s^2	119.0311
40	10	400	16000	s	10.9101
Σ	170	2600	60000		

Просечно одступање од декларисаних димензија на овом узорку је 15.2941 милиметра. Питање је, међутим, да ли са могућношћу грешке до 10% (тј. са нивоом значајности 0.1) можемо одбацити хипотезу да нема одступања у мерама. Дакле, као нулту хипотезу формулишемо:

H_0 : одступање је нула милиметра,

а као алтернативну:

H_A : одступање се значајно разликује од нула милиметра.

Тест статистику t рачунамо на следећи начин:

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu_0)\sqrt{n}}{s} = \frac{(15.2941 - 0)\sqrt{170}}{10.9101} = 18.2776.$$

Затим је поредимо са критичном вредношћу из таблице. Скраћено, то ћемо, убудуће, записивати овако:

H_0 :	$\mu = 0$	середина популације	ниво значајности
H_A :	$\mu \neq 0$	μ_0 0	α 0.1
		тест статистика	критична вредност
		t 18.2776	$t_{169,0.1}$ 1.6539

Закључак: Будући да је $|t| = 18.2776 > 1.6539 = t_{169,0.1}$, то се H_0 одбацује у корист алтернативне хипотезе на основу датог узорка. То значи да је у претходном кварталу одступање значајно различито од нула милиметра, те закључујемо да ће компанија одлучити да уведе рестриктивне мере према запосленима.

 **Вежба 9.2** Ради контроле квалитета напитка мерена је количина C витамина у 100 g напитка. Резултати су приказани у следећој табели:

C витамин у mg	[196, 198)	[198, 200)	[200, 202)	[202, 204)	[204, 206]
број мерења	2	5	7	4	2

Да ли, са сигурношћу од 90%, можемо тврдити да је просечна количина C витамина присутног у 100 g напитка 200 mg?

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
[196 , 198)	197	2	394	77618	n	20
[198 , 200)	199	5	995	198005	$\bar{x}$	200.90
[200 , 202)	201	7	1407	282807	s^2	4.99
[202 , 204)	203	4	812	164836	s	2.2338
[204 , 206]	205	2	410	84050		
Σ		20	4018	807316		

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_A : \mu \neq 200$$

средина популације

$$\mu_0 = 200$$

ниво значајности

$$\alpha = 0.1$$

тест статистика	критична вредност
t 1.8018	$t_{19,0.1}$ 1.7291

Закључак: Будући да је $|t| = 1.8018 > 1.7291 = t_{19,0.1}$, закључујемо да се на основу датог узорка H_0 одбацује што значи да, са сигурношћу од 90%, можемо тврдити да у 100 g просечног напитка количина C витамина статистички значајно одступа од предвиђене вредности од 200 mg.

 **Вежба 9.3** У табели су дати подаци о броју станара у неколико случајно изабраних станова у једном блоку зграда:

број станара	1	7	5	4	3	6	2
број станова	5	1	3	6	4	2	7

Да ли, на нивоу значајности 0.01, можемо тврдити да у посматраном блоку зграда у просеку живи 4 станара по стану?

Обележје је број станара, док су фреквенције варијетета број станова.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
1	5	5	5	узорак	
2	7	14	28		
3	4	12	36		
4	6	24	96		
5	3	15	75		
6	2	12	72	n	28
7	1	7	49	$\bar{x}$	3.1786
				s^2	2.7895
				s	1.6702
Σ	28	89	361		

$H_0 : \mu = 4$	середина популације	ниво значајности
$H_A : \mu \neq 4$	μ_0 4	α 0.01

тест статистика	критична вредност
t -2.6025	$t_{27,0.01}$ 2.7707

Закључак: Будући да је $|t| = 2.6025 < 2.7707 = t_{27,0.01}$, на основу датог узорка закључујемо да немамо довољно доказа против H_0 , што значи да, са сигурношћу од 99%, можемо тврдити да је очекивано да у посматраном блоку зграда у просеку живи 4 станара по стану.

 **Вежба 9.4** Фабрика пакује шећер у коцкама у кутије тежине пола килограма. Да би се проверило да ли је тежина кутија иста, узима се узорак од 21 кутије. Пошто је измерена тежина сваке кутије (у g), подаци су груписани у виду следеће табеле:

тежина	[496, 498)	[498, 500)	[500, 502)	[502, 504]
број кутија	3	8	5	5

Да ли, на основу овог узорка, можемо тврдити да фабрика шећера поштује стандард да је, са могућношћу грешке до 1%, просечна произведена кутија шећера тежине пола килограма?

Решење:

интервал	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
[496 , 498)	497	3	1491	741027	узорак	
[498 , 500)	499	8	3992	1992008		
[500 , 502)	501	5	2505	1255005		
[502 , 504]	503	5	2515	1265045		
Σ		21	10503	5253085		
					n	21
					$\bar{x}$	500.1429
					s^2	4.0272
					s	2.0068

$H_0 :$	$\mu = 500$	середина популације		ниво значајности	
$H_A :$	$\mu \neq 500$	μ_0	500	α	0.01

тест статистика		критична вредност	
t	0.3262	$t_{20,0.01}$	2.8453

Закључак: Како је $|t| = 0.3262 < 2.8453 = t_{20,0.01}$, на основу датог узорка немамо довољно доказа против H_0 , што значи да, са сигурношћу од 99%, можемо тврдити да фабрика поштује стандард.

 **Вежба 9.5** У оквиру анкете о квалитету наставног процеса, у којој је учествовало неколико случајно изабраних студената, забележен је број професора код којих ти студенти одлазе на консултације:

број студената	1	2	3	4	5	6
број професора	1	4	6	5	2	3

Да ли, на основу овог узорка, можемо тврдити, са могућношћу грешке до 8%, да студент просечно посећује консултације код 3 професора?

Решење:

Обележје је број професора, а број студената су фреквенције одговарајућих варијетета.

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
1	1	1	1	узорак	
2	5	10	20		
3	6	18	54	n	21
4	2	8	32	$\bar{x}$	3.5714
5	4	20	100	s^2	2.2449
6	3	18	108	s	1.4983
Σ	21	75	315		

$H_0 :$	$\mu = 3$	середина популације		ниво значајности	
$H_A :$	$\mu \neq 3$	μ_0	3	α	0.08

тест статистика		критична вредност	
t	1.7477	$t_{20,0.08}$	1.8443

Закључак: С обзиром да је $|t| = 1.7477 < 1.8443 = t_{20,0.08}$, закључујемо да немамо довољно доказа против H_0 , што имплицира да, са сигурношћу од 92%, можемо тврдити да студент у просеку посећује консултације код 3 професора.

 **Вежба 9.6** У оквиру анкете о квалитету наставног процеса, у којој је учествовало неколико случајно изабраних професора, забележен је број студената који су долазили на консултације у току наставе:

број студената	1	2	3	4	5	6
број професора	1	4	6	5	2	3

а) Да ли, на основу овог узорка, можемо тврдити, са могућношћу грешке до 5%, да консултације професора у просеку посећује 3 студента?

б) Да ли, на основу овог узорка, можемо тврдити, са могућношћу грешке до 5%, да консултације професора у просеку посећује више од 3 студента?

Решење:

Сада је обележје *број студената*, а *број професора* су фреквенције одговарајућих варијетета.

(а)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
1	1	1	1	узорак n 21 $\bar{x}$ 3.5714 s^2 1.9592 s 1.3997	
2	4	8	16		
3	6	18	54		
4	5	20	80		
5	2	10	50		
6	3	18	108		
Σ	21	75	309		

$H_0 :$	$\mu = 3$	середина популације	ниво значајности
$H_A :$	$\mu \neq 3$	μ_0 3	α 0.05

тест статистика	критична вредност
t 1.8708	$t_{20,0.05}$ 2.086

Закључак: Како је $|t| = 1.8708 < 2.086 = t_{20,0.05}$, немамо довољно доказа за одбацивање H_0 , што значи да, са сигурношћу од 95%, можемо тврдити да број студената који посећују консултације у просеку износи 3.

(б) Да бисмо одговорили на ово питање, користићемо *једностран* тест. Помоћна табела остаје иста, а остатак израчунавања сада изгледа овако:

$H_0 :$	$\mu \leq 3$	середина популације	ниво значајности
$H_A :$	$\mu > 3$	μ_0 3	α 0.05

тест статистика	критична вредност
t 1.8708	$t_{20,0.1}$ 1.7247

Закључак: Будући да није $t = 1.8708 > 1.7247 = t_{20,0.1}$, то се H_0 одбацује у корист H_A . То значи да, са сигурношћу од 95%, можемо тврдити да консултације професора у просеку посећује најмање 3 студента.

 **Вежба 9.7** Аналитичар за квалитет услуга на аеродрому Heathrow је прикупио информације о броју изгубљених пртљага на неколико случајно изабраних летова са овог аеродрома у претходном кварталу:

број изгубљених пртљага	0	1	2	3	4
број летова	3	6	5	2	1

Управни одбор компаније ВАА усагласио се да уколико у претходном кварталу у просеку нема изгубљених пртљага по лету, са могућношћу грешке до 5%, компанија неће уводити рестриктивне мере запосленима аеродрома. Који су резултати извештаја и какве су одлуке спроведене?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$	узорак	
0	3	0	0	n	17
1	6	6	6	$\bar{x}$	1.5294
2	5	10	20	s^2	1.1903
3	2	6	18	s	1.0910
4	1	4	16		
Σ	17	26	60		

У задатку се ради о једностраном тесту, где је $H_0 : \mu \leq 0$. Знајући да просечан број изгубљених пртљага не може бити негативан, то је $H_0 : \mu = 0$.

$H_0 : \mu = 0$	середина популације	ниво значајности
$H_A : \mu > 0$	μ_0 0	α 0.05
тест статистика		критична вредност
t	5.7799	$t_{16,0.1}$ 1.7459

Закључак: Како је $t = 5.7799 > 1.7459 = t_{16,0.1}$, то се H_0 одбацује у корист алтернативне хипотезе, што значи да је у претходном кварталу, на нивоу значајности до 5%, број изгубљених пртљага статистички значајно већи од 0, те закључујемо да ће компанија увести рестриктивне мере према запосленима.

 **Вежба 9.8** Лаборант једне клинике испитивао је број леукоцита у серуму 10 болесника (изражен у $10^9/l$) и добио следеће податке: 9.8, 13.5, 10, 11.8, 14.1, 12.6, 13.8, 8.5, 9.5, 11.2. Да ли, на основу датог узорка, са могућношћу грешке до 5% постоје докази да је број присутних леукоцита код оболеле особе у просеку $9.1 \cdot 10^9/l$?

Решење:

На основу података можемо срачунати узорачке статистике. У питању је двострани тест.

		$H_0 : \mu = 9.1$				
узорак		$H_A : \mu \neq 9.1$			тест статистика	
n	10	середина популације			t	3.9902
$\bar{x}$	11.48	μ_0	9.1		критична вредност	
s^2	3.5576	ниво значајности				
s	1.8862	α		0.05		$t_{9,0.05}$ 2.2622

Закључак: Будући да је $|t| = 3.9902 > 2.2622 = t_{9,0.05}$, на основу датог узорка и са сигурношћу од 95% закључујемо да се H_0 одбацује, што значи да је број леукоцита код оболеле особе у просеку статистички значајно различит од $9.1 \cdot 10^9/l$.

 **Вежба 9.9** Приликом анализе ефикасности рада случајно је изабран узорак од 26 радника једне фабрике патика и сваком од њих је измерено време (у секундама) за које уштирају пертле:

број секунди	25	26	28	29	33	38
број радника	4	4	6	5	4	3

Да ли са нивоом значајности 0.05 можемо тврдити да је очекивано време штирања пертли 30 секунди?

Решење:

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$		
25	4	100	2500	узорак	
26	4	104	2704	n	26
28	6	168	4704	$\bar{x}$	29.3462
29	5	145	4205	s^2	15.7648
33	4	132	4356	s	3.9705
38	3	114	4332		
Σ	26	763	22801		

$H_0 : \mu = 30$	середина популације	ниво значајности
$H_A : \mu \neq 30$	μ_0 30	α 0.05
тест статистика		критична вредност
t	-0.8397	$t_{25,0.05}$ 2.0595

Закључак: На основу датог узорка, како је $|t| = 0.8397 < 2.0595 = t_{25,0.05}$, немамо довољно доказа за одбацавање H_0 , што значи да, са сигурношћу од 95%, можемо тврдити да је очекивано време штирања пертли 30 секунди.



Вежбе за самостални рад

Вежба 9.10 Тренер мале лиге у бејзболу жели да сазна да ли освајање поена његовог тима одговара националном учинку осталих тимова. На националном нивоу, просечан број освојених поена по утакмици износи 5.7. Тренер је, на случајан начин, одабрао 5 утакмица у којима је његов тим остварио следеће поене:

5, 9, 4, 11, 8.

Да ли се резултат његовог тима значајно разликује од резултата на националном нивоу, на нивоу значајности до 5%?

Решење: $H_0 : \mu = 5.7$, $H_A : \mu \neq 5.7$
 $|t| = 1.4752 < 2.7764 = t_{4,0.05}$, H_0 се не одбацује.

Вежба 9.11 Управа једне школе је заинтересована да сазна да ли је дошло до промена читачких способности ученика у односу на исто обележење пре 30 година, када је просек поена на стандардизованом тесту био 78 поена. Резултати садашњег тестирања су:

63, 58, 76, 95, 84, 68, 90, 45, 75, 38, 52, 90, 100, 45, 76, 80, 45, 68, 64, 50, 59, 63, 75, 72, 68, 92, 64, 35, 87, 86.

Да ли се, са сигурношћу од 95%, може извести закључак да су се читачке способности за последњих 30 година: а) промениле, б) смањиле, ц) повећале?

	$H_0 : \mu = 78$	$H_0 : \mu \geq 78$	$H_0 : \mu \leq 78$
	$H_A : \mu \neq 78$	$H_A : \mu < 78$	$H_A : \mu > 78$
Решење:	$t = -2.9157$	$t = -2.9157$	$t = -2.9157$
	$t_{29,0.05} = 2.0452$	$t_{29,0.1} = 1.6991$	$t_{29,0.1} = 1.6991$
	$ t > t_{29,0.05}$	$t < -t_{29,0.1}$	није $t > t_{29,0.1}$
	H_0 се одбацује.	H_0 се одбацује.	H_0 се не одбацује.

Вежба 9.12 Истраживачка група при биолошком институту жели да провери ефикасност препарата на сузбијање алфида на биљкама, за који се зна да је просечна вредност концентрације након третмана 52. Новим истраживањем обухваћене су 24 биљке, на којима су измерене следеће концентрације алфида:

45, 58, 72, 52, 56, 49, 48, 67, 71, 52, 62, 56, 38, 39, 54, 52, 61, 42, 45, 46, 51, 34, 58, 68.

Испитати да ли су резултати новог истраживања у складу са закључцима до којих је дошла претходна истраживачка група, са сигурношћу од 99%?

Решење: $H_0 : \mu = 52$, $H_A : \mu \neq 52$
 $|t| = 0.566 < 2.8073 = t_{23,0.01}$, H_0 се не одбацује.

 **Вежба 9.13** Професор жели да сазна да ли група који слуша увод у статистику има добро признање из математике и упореди га са просеком од 70 поена. Резултати које су одабрани студенти остварили на пробном тесту су следећи:

62, 92, 75, 68, 83, 95.

Да ли професор, са сигурношћу од 90%, може очекивати да ће средња вредност успеха преосталих студената на тесту бити 70 поена?

Решење: $H_0 : \mu = 70$, $H_A : \mu \neq 70$
 $|t| = 1.8681 < 2.015 = t_{5,0.1}$, H_0 се не одбацује.

 **Вежба 9.14** У једној теретани у граду на случајан начин анкетирано је неколико вежбача и забележено је колико минута трче за време тренинга. Подаци су следећи:

број цигарета	[3, 6)	[6, 9)	[9, 12)	[12, 15)	[15, 18]
број пушача	2	7	5	8	5

Да ли, са сигурношћу од 99%, можемо тврдити да просечан вежбач у овом граду проведе на траци 12 минута?

Решење: $H_0 : \mu = 12$, $H_A : \mu \neq 12$
 $|t| = 1.0128 < 2.7787 = t_{26,0.01}$, H_0 се не одбацује.

Анализа варијансе (АНОВА)

Циљ: Упоредити *средине* обележја t узорака из t популација

Услови: Популације морају имати *непрекидну* расподелу, варијансе у свим популацијама морају бити *једнаке*, узорци се бирају *независно* један од другог.

Статистика:

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе између и унутар	F -статистика
између узорака	Q_i	$m - 1$	$Q_i / (m - 1)$	$\frac{Q_i / (m - 1)}{Q_u / (m(n - 1))}$
унутар узорака	Q_u	$m(n - 1)$	$Q_u / (m(n - 1))$	
укупно	Q			

- ниво значајности: α број узорака: m обим сваког узорка: n
- сума квадрата одступања од средина унутар узорка: Q_u
- сума квадрата одступања од укупне средине: Q
- $Q_i = Q - Q_u$

Нулта хипотеза $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$

Алтернативна хипотеза H_A : Бар две од средина се значајно разликују.

Критична вредност из таблице: $F_{m-1, m(n-1), \alpha}$

Закључак:

- $F > F_{m-1, m(n-1), \alpha} \implies H_0$ се одбацује
- $F \leq F_{m-1, m(n-1), \alpha} \implies$ немамо довољно доказа за одбацивање H_0

квадрати одступања унутар узорка									збир
Y1	1	4	0	4	0	0	16	9	34
Y2	1	1	1	0	0	9	4	4	20
Y3	1.8906	0.3906	13.141	5.6406	1.8906	5.6406	2.6406	2.6406	33.875
Q_u									87.875

m	3
n	8
ниво значајности	0.05
критична вредност $F_{2,21,0.05}$	3.4668

Коначно, рачунамо АНОВА табелу:

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	30.0833	2	15.0417	3.5946
унутар узорака	87.8750	21	4.1845	
укупно	117.9583			

Закључак: С обзиром да је $F = 3.5946 > 3.4668 = F_{2,21,0.05}$, на основу датог узорка закључујемо да се, на нивоу значајности до 5%, H_0 одбацује у корист H_A , односно да можемо тврдити да промене у јачини звука утичу на просечан број тачних одговора.

 **Вежба 10.2** Радник фабрике која пакује кавијар у теглице је, ради контроле квалитета, на случајан начин изабрао по 6 теглица кавијара са сваког од 5 постројења за паковање. Нето садржај кавијара је дат у следећој табели:

постројење	садржај теглице у грамима					
1	103	101	99	98	97	105
2	101	100	103	99	102	101
3	102	99	98	100	100	101
4	100	102	103	101	100	100
5	101	97	98	99	99	100

Да ли се, на нивоу значајности до 5%, на основу овог узорка, може тврдити да сва постројења производе теглице кавијара исте просечне масе?

Решење:

Фактор утицаја је врста постројења на којем се врши паковање кавијара у теглице, а обележје на које утиче је количина садржаја (изражена у грамима) која се том приликом напуни. Нулта хипотеза гласи

H_0 : Избор постројења не утиче на просечну масу теглице,

док је алтернативна

H_A : Избор постројења утиче на просечну масу теглице.

средине узорака							збир	средина
Y1	103	101	99	98	97	105	603	100.5
Y2	101	100	103	99	102	101	606	101
Y3	102	99	98	100	100	101	600	100
Y4	100	102	103	101	100	100	606	101
Y5	101	97	98	99	99	100	594	99
укупна средина							100.3	

квадрати одступања од укупне средине							збир
Y1	7.29	0.49	1.69	5.29	10.89	22.09	47.74
Y2	0.49	0.09	7.29	1.69	2.89	0.49	12.94
Y3	2.89	1.69	5.29	0.09	0.09	0.49	10.54
Y4	0.09	2.89	7.29	0.49	0.09	0.09	10.94
Y5	0.49	10.89	5.29	1.69	1.69	0.09	20.14
Q							102.3

квадрати одступања унутар узорка							збир
Y1	6.25	0.25	2.25	6.25	12.25	20.25	47.5
Y2	0	1	4	4	1	0	10
Y3	4	1	4	0	0	1	10
Y4	1	1	4	0	1	1	8
Y5	4	4	1	0	0	1	10
Q_u							85.5

m	5
n	6
ниво значајности	0.05
критична вредност $F_{4,25,0.05}$	2.7587

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	16.8	4	4.2	1.2281
унутар узорака	85.5	25	3.42	
укупно	102.3			

квадрати одступања унутар узорка						збир
Y1	9	25	1	64	49	148
Y2	16	25	16	9	64	130
Y3	49	0	4	49	4	106
Y4	25	9	25	169	0	228
Q_u						612

m	4
n	5
ниво значајности	0.01
критична вредност $F_{3,16,0.01}$	5.2922

m	4
n	5
ниво значајности	0.05
критична вредност $F_{3,16,0.05}$	3.2389

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	410	3	136.67	3.5730
унутар узорака	612	16	38.25	
укупно	1022			

Закључак: Пошто је $F = 3.5730 < 5.2922 = F_{3,16,0.01}$, на основу датог узорка и на нивоу значајности до 1%, не можемо закључити да тип обуке утиче на просечну ефикасност радника у обављању радних задатака. Међутим, ако дозволимо могућност грешке до 5%, будући да је $F = 3.5730 > 3.2389 = F_{3,16,0.05}$, тада можемо закључити да тип обуке утиче на просечну ефикасност (одбацујемо нулту хипотезу).

 **Вежба 10.4** Да би се испитао утицај хране на пораст масе пилића (у %), узете су три хранљиве смесе: А, Б и Ц. Пилићи су подељени у три групе и током месец дана храњени су одговарајућом смесом. Подаци добијени након истека месец дана дати су у табели.

Врста хране	А	Б	Ц
пораст масе пилића	13.7	12.2	13.9
	14.2	13.2	14.3
	14.1	12.1	13.6
	13.5	12.8	14.1
	13.2	13.2	13.4

Да ли се, на нивоу значајности до 0.01, може тврдити да избор врста хране утиче на просечан пораст масе пилића?

Решење:

Фактор утицаја је *врста хране*, а обележје на које утиче је *пораст масе пилића*. На основу тога, могуће је формулисати две хипотезе, нулту

H_0 : врста хране не утиче на просечан пораст масе пилића,

и њој супротстављену алтернативну

H_A : врста хране утиче на просечан пораст масе пилића.

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	4.0693	2	2.0347	10.4164
унутар узорака	2.344	12	0.1953	
укупно	6.4133			

Закључак: Будући да је $F = 10.4164 > 6.9266 = F_{2,12,0.01}$, на основу датог узорка закључујемо да се, на нивоу значајности до 1%, H_0 одбацује у корист H_A , односно да можемо тврдити да врста хране утиче на просечан пораст масе пилића.

📌 **Вежба 10.5** На 15 случајно изабраних кандидата спроведено је истраживање о утицају кардио вежби на потрошњу калорија. Кандидати су подељени у три једнаке групе: они који трче, они који пливају и они који возе бицикл. Добијени резултати су приказани у табели.

Тип вежбања	потрошене калорије након 1h				
трчање	800	850	750	820	900
пливање	720	800	820	740	830
бицикл	850	870	900	920	890

Да ли се, на нивоу значајности до 5%, може тврдити да промене у начину вежбања значајно утичу на губитак калорија?

Решење:

Фактор утицаја је *тип вежбања*, а обележје на које утиче су *потрошене калорије*. Хипотезе су

H_0 : тип вежбања не утиче на просечно потрошене калорије,

односно

H_A : тип вежбања утиче на просечно потрошене калорије.

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	27373.33	2	13686.6667	6.5382
унутар узорака	25120	12	2093.33	
укупно	52493.33			

Закључак: Како је $F = 6.5382 > 3.8853 = F_{2,12,0.05}$, на основу датог узорка закључујемо да се, на нивоу значајности до 5%, H_0 одбацује у корист H_A , односно да тип вежбања значајно утиче на просечно потрошене калорије.

 **Вежба 10.6** У оквиру истраживања утицаја бактерије на разградњу токсичног отпада који садржи хлор, посматран је утицај температуре на процес екстракције хлора у *in vitro* условима. Експеримент је спроведен по 10 пута на температурама од 15, 20 и 25 °C и забележен је проценат екстрахованог хлора.

t у °C	количина екстрахованог хлора у %									
15	45	35	41	33	32	43	44	45	43	46
20	56	57	45	43	51	55	54	48	51	49
25	31	34	41	37	32	31	28	27	31	33

Утврдити да ли, са дозвољеном грешком до 1%, можемо тврдити да се процес екстракције хлора одвија различито на различитим температурама?

Решење:

Фактор утицаја је *температура*, а обележје на које утиче је *количина екстрахованог хлора*. Хипотезе су

H_0 : температура не утиче на просечну количину екстрахованог хлора,

односно

H_A : температура утиче на просечну количину екстрахованог хлора.

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	1699.4667	2	849.73	37.8907
унутар узорака	605.5	27	22.4259	
укупно	2304.9667			

Закључак: Према томе, како је $F = 37.8907 > 5.4881 = F_{2,27,0.01}$, на основу датог узорка закључујемо да се, на нивоу значајности до 1%, H_0 одбацује у корист H_A , односно да можемо тврдити да температура утиче на просечну количину екстрахованог хлора.

 **Вежба 10.7** Испитује се примена посебне методе стицања вештина на групи мушких особа старости 30-35 година. Испитаници су подељени према нивоу образовања. Након спроведеног тестирања вештина, забележен је проценат успешности за сваког испитаника.

ниво образовања	успешност на тестирању у %							
средње	75	62	77	58	78	55	45	80
више	95	86	77	65	66	68	70	56
високо	75	65	55	80	82	65	45	65

Утврдити да ли, са дозвољеном грешком до 1%, можемо тврдити да поменути метода рада даје различите резултате у зависности од нивоа образовања испитаника?

Решење:

Имајући у виду да је фактор утицаја *ниво образовања*, а да је обележје на које утиче *успешност на тестирању*, формулишемо следеће претпоставке

H_0 : ниво образовања не утиче на просечну успешност на тестирању,

односно

H_A : ниво образовања утиче на просечну успешност на тестирању.

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	225.5833	2	112.7917	0.6999
унутар узорака	3384.375	21	161.1607	
укупно	3609.9583			

Закључак: Како је $F = 0.6999 < 5.7804 = F_{2,21,0.01}$, на основу датог узорка закључујемо да, на нивоу значајности до 1%, немамо довољно доказа против H_0 , те да можемо тврдити да ниво образовања не утиче на просечну успешност на тестирању.

 **Вежба 10.8** Спроводи се истраживање са циљем да се испита да ли постоје разлике у просечном дневном уносу Ca код одраслих особа различитих стања костију. Испитаници од 60 година старости, изабрани на случајан начин помоћу болничког регистра, позвани су да приступе истраживању и подељени су у 3 категорије, и то оне који имају кости нормалне густине (НГК), оне који имају остеопенију (ОА) и оне којима је констатована остеопороза (ОС). За сваког испитаника понаособ регистрован је дневни унос Ca , путем хране и суплемената, а подаци су представљени табелом у наставку.

стање костију	НГК	ОА	ОС
дневни унос Ca	1200	1000	890
	1000	1100	650
	980	700	1100
	900	800	900
	750	500	400

Да ли се, на нивоу значајности до 0.05, може тврдити да стање костију утиче на количину дневног уноса поменутог минерала?

Решење:

Како је фактор утицаја стање костију, а обележје на које утиче дневни унос Ca , формулишемо хипотезе

H_0 : стање костију не утиче на просечан дневни унос Ca ,

и

H_A : стање костију утиче на просечан дневни унос Ca .

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	90040	2	45020	0.8644
унутар узорака	625000	12	52083.33	
укупно	715040			

Закључак: Будући да је $F = 0.8644 < 3.8853 = F_{2,12,0.05}$, на основу датог узорка закључујемо да се, на нивоу значајности до 5%, H_0 не одбацује у корист H_A , односно да можемо рећи да стање костију не утиче на просечан дневни унос Ca .

 **Вежба 10.9** Испитује се примена посебне методе образовања одраслих у области нових "зелених" технологија у дрвној индустрији. Испитаници су подељени према старости у три групе. Након спроведеног тестирања, забележен је проценат успешности за сваког испитаника.

старосна група	успешност на тестирању у %							
група 30-35	75	62	77	58	89	60	45	80
група 35-40	90	86	43	53	66	42	70	55
група 40-45	70	67	45	88	92	65	45	78

Да ли, са дозвољеном грешком до 5%, можемо закључити да поменута метода образовања даје једнаке резултате без обзира на године испитаника?

Решење:

Фактор утицаја је *старосна група*, а обележје на које утиче је *успешност на тестирању*. Хипотезе су

H_0 : старосна група не утиче на просечну успешност на тестирању,

односно

H_A : старосна група утиче на просечну успешност на тестирању.

извор варијабилитета	сума квадрата	степени слободе	варијансе	F -статистика
између узорака	155.0833	2	77.5417	0.2756
унутар узорака	5907.875	21	281.3274	
укупно	6062.9583			

Закључак: Како је $F = 0.2756 < 3.4668 = F_{2,21,0.05}$, на основу датог узорка закључујемо да, на нивоу значајности до 5%, немамо довољно доказа против H_0 , то јест да можемо тврдити да старосна група не утиче на просечну успешност на тестирању.

Вежбе за самостални рад

 **Вежба 10.10** Графички дизајнер жели да покрене онлајн продају својих производа и пласман на глобалном нивоу, при чему на располагању има три компаније (A, B и C) које се баве штампом и дистрибуцијом производа наручиоцима. У намери да изабере најповољнију опцију за сарадњу, он је током пробног периода прикупио податке о износу транспортних трошкова за случајно изабране поруџбине у чијој су реализацији учествовале све три штампарије. Подаци су приказани следећом табелом:

фирма	трошкови штампе и транспорта									
A	92.7	52.5	60.2	86.9	80.7	52.8	85.8	54.3	79.2	49.3
B	69.6	84.4	92.5	56.1	85.3	61.8	75.7	92.2	91.4	46.2
C	58.9	67.6	63.5	70.2	66.7	93.5	85.9	97.9	74.3	56.6

Да ли, на нивоу значајности од 1%, постоје статистички значајне разлике у очекиваном просечном трошку у зависности од изабране компаније?

Решење: H_0 : избор фирме не утиче на очекиван просечан трошак,
 H_A : избор фирме утиче на очекиван просечан трошак,
 $F = 0.3747 < 5.4881 = F_{2,27,0.01}$,
 закључак: H_0 се не одбацује.

 **Вежба 10.11** Аналитичар заштите животне средине жели да испита да ли постоје статистички значајне разлике у киселости кише на три локалитета: A, B и C. На случајан начин, изабрао је податке о мерењима киселости падавина на сваком од локалитета за 10 дана:

локалитет	регистрована дневна киселост падавина									
A	5.1	5.3	4.9	5.3	4.8	5.2	5.9	4.6	4.9	5.5
B	4.8	4.1	4.4	4.7	4.9	4.1	5.1	5.2	4.6	5.2
C	5.5	6.3	5.6	5.2	5.4	5.3	4.9	5.2	4.8	5.4

Да ли, на нивоу значајности од 5%, постоје статистички значајне разлике у очекиваној просечној киселости падавина спрам посматраних локалитета?

Решење: H_0 : избор локалитета не утиче на очекивану просечну киселост,
 H_A : избор локалитета утиче на очекивану просечну киселост,
 $F = 6.8171 > 3.3541 = F_{2,27,0.05}$,
 закључак: H_0 се одбацује.

 **Вежба 10.12** Познато је да врста употребљене прехране земљишта у првој фази вегетације може имати значајан утицај на правилан и квалитетан раст у процесу узгоја садница, са циљем постизања што већег очекиваног крајњег приноса. На 40 случајно изабраних регистрованих пољопривредних газдинстава која својом производњом обухватају и узгој јабука, спроведено је истраживање о утицају избора врсте прехране земљишта (A, B, C и D) на крајњи очекивани принос ове културе, изражен у десетинама тона. Подаци су:

прехрана	принос у десетинама тона									
A	17.2	13.2	12.5	10.6	12.9	20.5	21.2	19.9	20.5	17.3
B	13.3	12.5	10.8	11.4	15.5	19.8	23.5	22.9	18.9	22.2
C	10.7	11.8	10.1	11.9	10.3	17.4	15.9	19.2	16.9	13.2
D	13.1	12.6	9.8	11.5	12.4	17.5	18.2	16.6	12.9	11.5

Да ли, на нивоу значајности од 1%, постоје статистички значајне разлике у очекиваном просечном приносу јабука у зависности од врсте изабраног суплемента?

Решење: H_0 : избор прехране не утиче на очекивани просечни принос,
 H_A : избор прехране утиче на очекивани просечни принос,
 $F = 2.2656 < 4.3771 = F_{3,36,0.01}$,
 закључак: H_0 се не одбацује.

 **Вежба 10.13** Прикупљени су подаци на узорку од 40 локалитета водотока реке, од извора до ушћа. На сваком од њих регистрована је позиција у току (I, II, III и IV) и измерена је биолошка потражња кисеоника (количина раствореног кисеоника) у процентима. Прикупљени подаци су:

позиција	биолошка потражња кисеоника у %									
I	12.2	10.3	10.5	11	8	10.2	11.1	7	7.2	10
II	11.5	12.2	12.4	12.3	11.7	10.3	10.2	10.3	10.6	10.3
III	9	9.1	6.3	5.2	4.1	6.2	7.2	8.1	9	8.2
IV	13	11.5	9.8	11.5	12.4	9.6	10.1	9.8	12.2	9.9

Утврдити да ли, на нивоу значајности од 10%, постоје статистички значајне разлике у просечној очекиваној биолошкој потражњи кисеоника у зависности од позиције у водотоку?

Решење: H_0 : позиција не утиче на просечну потражњу кисеоника,
 H_A : позиција утиче на просечну потражњу кисеоника,
 $F = 15.2589 > 2.2426 = F_{3,36,0.1}$,
 закључак: H_0 се одбацује.

 **Вежба 10.14** Врши се лабораторијско испитивање утицаја врсте третмана на концентрацију азот-моноксида (NO) у серуму. Прикупљени подаци на бази мерења ефеката четири врсте лека презентовани су табелом у наставку:

лек	концентрација азот-моноксида у серуму									
<i>I</i>	66	50	85	70	40	48	89	66	54	63
<i>II</i>	77	56	89	32	41	55	104	87	26	52
<i>III</i>	80	14	71	55	89	41	83	9	102	66
<i>IV</i>	22	38	44	48	31	69	42	84	102	13

Да ли, на нивоу значајности од 5%, постоје статистички значајне разлике у просечној очекиваној концентрацији азот-моноксида (NO) у зависности од врсте лека?

Решење: H_0 : избор лека не утиче на просечну концентрацију NO ,
 H_A : избор лека утиче на просечну концентрацију NO ,
 $F = 0.6119 < 2.8663 = F_{3,36,0.05}$,
 закључак: H_0 се не одбацује.

Линеарна корелација

Пирсонов коефицијент линеарне корелације: $r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

- величина узорка: n
- вредности првог обележја (X): x_i
- вредности другог обележја (Y): y_i
- средина првог обележја (X): $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
- средина другог обележја (Y): $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$
- варијанса првог обележја (X): $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$
- варијанса другог обележја (Y): $s_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 - \bar{y}^2$
- коваријанса: $s_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}$

ИНТЕРВАЛ КОЈЕМ ПРИПАДА ВРЕДНОСТ $ r $	ИНТЕРПРЕТАЦИЈА
[0.00, 0.40)	<i>слаба</i> корелација
[0.40, 0.75)	<i>умерена</i> корелација
[0.75, 0.85)	<i>добра</i> корелација
[0.85, 1.00]	<i>одлична</i> корелација

коефицијент детерминације: r_{xy}^2

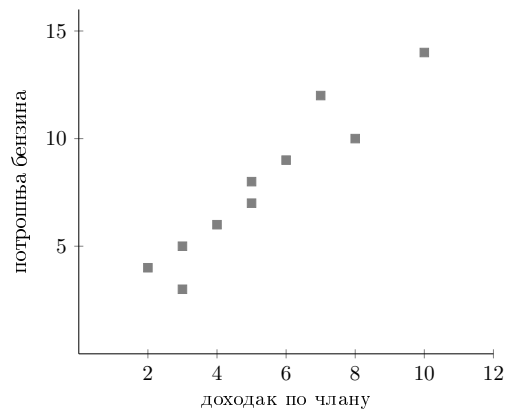
 **Вежба 11.1** Прикупљени подаци о просечном доходу по члану домаћинства (у десетинама хиљада РСД) и потрошњи бензина (у десетинама литара), за неколико случајно изабраних домаћинстава у једном граду, дати су у следећој табели:

доходак по члану	2	3	3	4	5	5	6	7	8	10
потрошња бензина	4	3	5	6	7	8	9	12	10	14

Приказати податке у виду дијаграма расипања, а затим одредити коефицијент корелације и коефицијент детерминације.

Решење:

Означимо са X доходак по члану, а са Y потрошњу бензина. Најпре ћемо податке представити графички, у форми *дијаграма расипања*, а затим на основу табеле за помоћна израчунавања одредити статистике за оба обележја, као и коваријансу, коефицијент корелације и коефицијент детерминације.



i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	2	4	4	16	8
2	3	3	9	9	9
3	3	5	9	25	15
4	4	6	16	36	24
5	5	7	25	49	35
6	5	8	25	64	40
7	6	9	36	81	54
8	7	12	49	144	84
9	8	10	64	100	80
10	10	14	100	196	140
Σ	53	78	337	720	489

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	5.3	$\bar{y}$	7.8
s_x^2	5.61	s_y^2	11.16
s_x	2.3685	s_y	3.3407

коваријанса	
s_{xy}	7.56
коефицијент корелације	
r_{xy}	0.9555
коефицијент детерминације	
r_{xy}^2	91.29%

Закључак: С обзиром да је коефицијент корелације позитиван, закључујемо да је линеарна веза између дохотка и потрошње бензина *директна*, што значи да повећање дохотка имплицира и повећану потрошњу бензина. Додатно, с обзиром да је коефицијент корелације 0.9555, закључујемо да је та повезаност *одлична*.

Коефицијент детерминације износи 91.29%, што значи да се 91.29% варијација једне променљиве објашњава, односно приписује варијацијама друге променљиве.

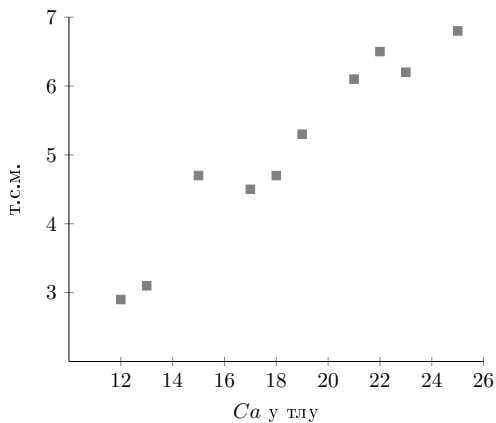
Вежба 11.2 Верујући да постоји веза између тежине суве материје (т.с.м.) парадајза (у грамама) и количине калцијума (у mg/cm^3) у земљишту узгоја, истраживач је одлучио да испита постојање везе на основу следећих података:

Са у тлу	12	13	15	17	18	19	21	22	23	25
т.с.м.	2.9	3.1	4.7	4.5	4.7	5.3	6.1	6.5	6.2	6.8

Нацртати дијаграм расипања и испитати корелацију између садржаја Са у тлу и тежине суве материје у плоду парадајза.

Решење:

Означимо са X количину Са у тлу, а са Y тежину суве материје. Као и у претходном примеру, најпре ћемо податке приказати графички, а потом приступити израчунавањима.



i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	12	2.9	144	8.41	34.8
2	13	3.1	169	9.61	40.3
3	15	4.7	225	22.09	70.5
4	17	4.5	289	20.25	76.5
5	18	4.7	324	22.09	84.6
6	19	5.3	361	28.09	100.7
7	21	6.1	441	37.21	128.1
8	22	6.5	484	42.25	143
9	23	6.2	529	38.44	142.6
10	25	6.8	625	46.24	170
Σ	185	50.8	3591	274.68	991.1

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	18.5	$\bar{y}$	5.08
s_x^2	16.85	s_y^2	1.6616
s_x	4.1049	s_y	1.2890

коваријанса	
s_{xy}	5.13
коефицијент корелације	
r_{xy}	0.9695
коефицијент детерминације	
r_{xy}^2	94%

Закључак: Линеарна повезаност између количине калцијума и тежине суве материје парадајза је *директна* и *одлична*, будући да је коефицијент корелације 0.9695. Коефицијент детерминације је 94%.

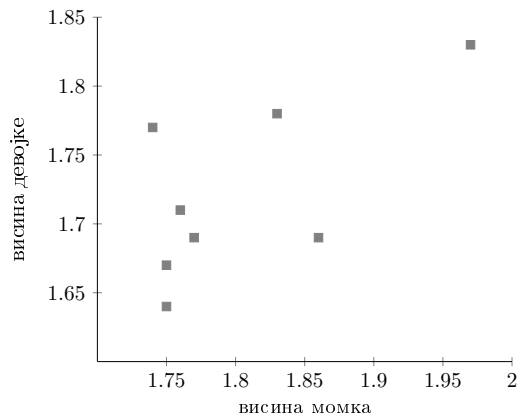
 **Вежба 11.3** Уредник популарног женског часописа жели да објави чланак о томе колико је девојкама важна висина партнера. Резултати анкете у којој је учествовало неколико случајно изабраних парова су следећи:

висина момка (m)	1.76	1.75	1.74	1.86	1.77	1.83	1.97	1.75
висина девојке (m)	1.71	1.67	1.77	1.69	1.69	1.78	1.83	1.64

Нацртати дијаграм расипања, одредити коефицијент корелације између висине момка и висине девојке и коефицијент детерминације.

Решење:

Означимо са X висину момка, а са Y висину девојке. Пратећи исте кораке као и у претходним задацима, цртамо график расипања и рачунамо:



i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1.76	1.71	3.1	2.92	3.01
2	1.75	1.67	3.06	2.79	2.92
3	1.74	1.77	3.03	3.13	3.08
4	1.86	1.69	3.46	2.86	3.14
5	1.77	1.69	3.13	2.86	2.99
6	1.83	1.78	3.35	3.17	3.26
7	1.97	1.83	3.88	3.35	3.6
8	1.75	1.64	3.06	2.69	2.87
Σ	14.43	13.78	26.07	23.77	24.88

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	1.8038	$\bar{y}$	1.7225
s_x^2	0.0055	s_y^2	0.0036
s_x	0.0745	s_y	0.0602

коваријанса	
s_{xy}	0.0029
коефицијент корелације	
r_{xy}	0.6535
коефицијент детерминације	
r_{xy}^2	42.7%

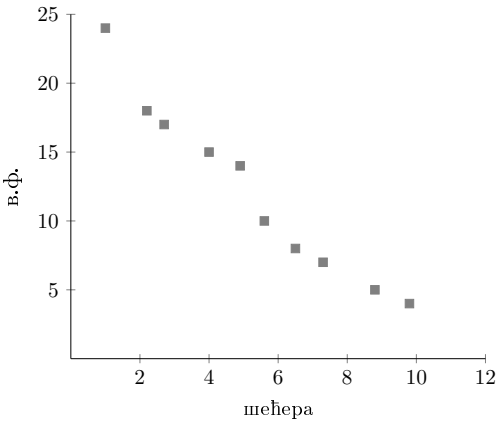
Закључак: На основу прикупљених података можемо закључити да је линеарна веза између висине момка и висине девојке *директна*, али да је *умерена*, о чему сведочи Пирсонов коефицијент од 0.6535. Коефицијент детерминације износи 42.7%.

 **Вежба 11.4** При производњи мултивитаминског сока претпоставља се да време ферментације (в.ф. у данима) зависи од количине додатог шећера (y kg). На случајном узорку добијени су подаци:

шећера	1.0	2.2	2.7	4.0	4.9	5.6	6.5	7.3	8.8	9.8
в.ф.	24	18	17	15	14	10	8	7	5	4

Нацртати дијаграм расипања и испитати корелацију између количине додатог шећера и брзине ферментације.

Решење:
Означимо са X количину додатог шећера, а са Y време ферментације.



i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	24	1	576	24
2	2.2	18	4.84	324	39.6
3	2.7	17	7.29	289	45.9
4	4	15	16	225	60
5	4.9	14	24.01	196	68.6
6	5.6	10	31.36	100	56
7	6.5	8	42.25	64	52
8	7.3	7	53.29	49	51.1
9	8.8	5	77.44	25	44
10	9.8	4	96.04	16	39.2
Σ	52.8	122	353.52	1864	480.4

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	5.28	$\bar{y}$	12.2
s_x^2	7.4736	s_y^2	37.56
s_x	2.7338	s_y	6.1286

коваријанса	
s_{xy}	-16.376
коэффициент корелације	
r_{xy}	-0.9774
коэффициент детерминације	
r_{xy}^2	95.53%

Закључак: Будући да је коефицијент корелације негативан, линеарна веза између количине додатог шећера и времена ферментације је *обрнута*, што значи да већа количина шећера подразумева краће време ферментације. Апсолутна вредност коефицијента корелације, која износи 0.9774, говори да је линеарна корелација ова два обележја *одлична*.

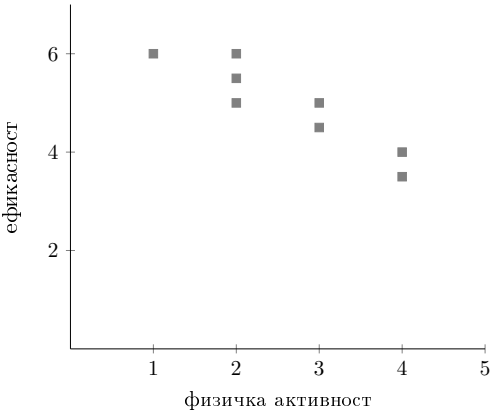
 **Вежба 11.5** Уредник популарног мушког портала припрема чланак о утицају нивоа физичких активности на радну способност. За један од показатеља изабрана је корелација између броја сати физичког вежбања дневно и ефикасности на послу, израженој кроз време у сатима потребним да се обаве радни задаци. Подаци прикупљени на случајном узорку од испитаника старости између 30 и 35 година дати су у табели:

физичка активност	1	2	2	3	3	2	4	4
ефикасност	6	5.5	5	5	4.5	6	4	3.5

Нацртати дијаграм расипања, одредити коефицијент корелације између броја сати физичког вежбања и ефикасности на послу, као и коефицијент детерминације.

Решење:

Означимо са X физичку активност, а са Y ефикасност.



i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	6	1	36	6
2	2	5.5	4	30.25	11
3	2	5	4	25	10
4	3	5	9	25	15
5	3	4.5	9	20.25	13.5
6	2	6	4	36	12
7	4	4	16	16	16
8	4	3.5	16	12.25	14
Σ	21	39.5	63	200.75	97.5

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	2.6250	$\bar{y}$	4.9375
s_x^2	0.9844	s_y^2	0.7148
s_x	0.9922	s_y	0.8455

коваријанса	
s_{xy}	-0.7734
коефицијент корелације	
r_{xy}	-0.9220
коефицијент детерминације	
r_{xy}^2	85.01%

Закључак: Коефицијент корелације између броја сати активно проведених и ефикасности у обављању радних задатака износи -0.922, што се тумачи да особама које више времена проведу вежбајући треба мање времена за комплетирање радних обавеза, односно да вежбање има *позитиван* утицај на ефикасност. Апсолутна вредност коефицијента корелације је 0.922 и она сугерише да је линеарна веза између поменутих два обележја *одлична*.

 **Вежба 11.6** У једном предузећу, током 6 месеци, испитује се повезаност између броја кишних дана у месецу и броја изостанака са посла током тог месеца. Прикупљени подаци су:

број кишних дана	16	11	10	8	7	2
број изостанака	17	13	13	11	10	5

Испитати линеарну корелацију између броја кишних дана у месецу и броја изостанака са посла.

Решење:

Означимо са X број кишних дана, а са Y број изостанака са посла. Помоћна табела и пратећи рачун изгледају овако:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$	статистике за X	статистике за Y
1	16	17	256	289	272	$\bar{x}$	9
2	11	13	121	169	143	s_x^2	18
3	10	13	100	169	130	s_x	4.2426
4	8	11	64	121	88	коваријанса	коеф. корелације
5	7	10	49	100	70	s_{xy}	15.3333
6	2	5	4	25	10	r_{xy}	0.9929
Σ	54	69	594	873	713		

Закључак: Дакле, коефицијент корелације је 0.9929, што говори у прилог томе да је веза између броја изостанака са посла и броја кишних дана *директна*, те да је линеарна корелација *одлична*.

 **Вежба 11.7** Редакција спортског часописа објављује чланак о томе колико конзумирање засићених масти утиче на кондицију. За потребе ове анализе испитује се корелација између дневне количине унетих засићених масти у грамима и времена потребног испитанику да спринтом истрчи 100 метара у секундама. Резултати мерења су:

засићених масти (g)	50	55	60	65	70	75	80
време (s)	12.5	12.9	13	14	14.8	15	15

На бази ових података, испитати постојање линеарне корелације између количине дневно унетих засићених масти са једне и времена истрчавања са друге стране и тумачити тако добијени нумерички индикатор.

Решење:

Ако означимо са X количину засићених масти у грамима, а са Y време у секундама, тада рачунамо:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$		
1	50	12.5	2500	156.3	625	статистике за X	
2	55	12.9	3025	166.4	709.5	статистике за Y	
3	60	13	3600	169	780	$\bar{x}$	65
4	65	14	4225	196	910	s_x^2	100
5	70	14.8	4900	219	1036	s_y^2	13.8857
6	75	15	5625	225	1125	s_x	10
7	80	15	6400	225	1200	s_y	1.0006
Σ						коваријанса	
						коэф. корелације	
						s_{xy}	9.6429
						r_{xy}	0.9637

Закључак: Будући да је коефицијент корелације 0.9637, то значи да је линеарна веза између количине унетих засићених масти и времена које је неопходно да особа истрчи 100 *m* директна и одлична.

☞ **Вежба 11.8** Кошаркашка асоцијација врши статистичко истраживање и том приликом је прикупљен прост случајан узорак од 10 играча кошаркашког тима, чије су висине (y *cm*) и телесне масе (x *kg*) следеће:

висина	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
маса	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Испитати постојање линеарне повезаности између ових обележја, као и коефицијент детерминације.

Решење:

Нека је са X означена висина а са Y маса играча.

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$		
1	186	85	34596	7225	15810	статистике за X	
2	189	85	35721	7225	16065	статистике за Y	
3	190	86	36100	7396	16340	$\bar{x}$	195
4	192	90	36864	8100	17280	s_x^2	36.8
5	193	87	37249	7569	16791	s_y^2	43.09
6	193	91	37249	8281	17563	s_x	6.0663
7	198	93	39204	8649	18414	s_y	6.5643
8	201	103	40401	10609	20703	коваријанса	
9	203	100	41209	10000	20300	коэф. корелације	
10	205	101	42025	10201	20705	коефицијент детерминације	
Σ						s_{xy}	37.6
						r_{xy}^2	89.16%

Закључак: Будући да је коефицијент корелације 0.9442, можемо закључити да је линеарна веза између висине и телесне масе играча директна, те да је по јачини одлична. Коефицијент детерминације је 89.16%.

 **Вежба 11.9** Истраживач је, услед пораста броја Интернет провајдера, одлучио да испита да ли постоји веза између месечне цене услуге провајдера (у стотинама РСД), и степена задовољства купаца пруженом услугом (на скали од 1 до 10, при чему 1 представља тотално незадовољство, а 10 апсолутно задовољство клијента). Подаци су прикупљени и представљени у табели:

цена	11	18	17	15	9	5	12	19	22	25
задовољство	6	9	10	7	9	6	5	8	8	10

Одредити нумерички индикатор линеарне повезаности између цене услуге и задовољства корисника и тумачити добијени резултат.

Решење:

Означимо са X цену услуге провајдера, а са Y задовољство корисника пруженом услугом. Тражени нумерички индикатор линеарне повезаности је Пирсонов коефицијент, и до њега долазимо следећим путем:

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	11	6	121	36	66
2	18	9	324	81	162
3	17	10	289	100	170
4	15	7	225	49	105
5	9	9	81	81	81
6	5	6	25	36	30
7	12	5	144	25	60
8	19	8	361	64	152
9	22	8	484	64	176
10	25	10	625	100	250
Σ	153	78	2679	636	1252

статистике за X		статистике за Y	
$\bar{x}$	15.3	$\bar{y}$	7.8
s_x^2	33.81	s_y^2	2.76
s_x	5.8146	s_y	1.6613
коваријанса		коеф. корелације	
s_{xy}	5.86	r_{xy}	0.6066

Закључак: На основу датог узорка, Пирсонов коефицијент 0.6066 говори у прилог чињеници да је повезаност између цене услуге и задовољства корисника истом *директна* и *умерена*.

Вежбе за самостални рад

 **Вежба 11.10** У склопу евалуације рада и способности запослених, сваки од 6 службеника одрадио је тест способности, са намером да се, на основу резултата теста, утврди веза између успеха на тесту и остварене продаје у првом наредном месецу ангажмана (у стотинама еура). Подаци су обједињени и дати табеларно:

успех на тесту	25	42	33	54	29	36
остварена продаја	42	72	50	90	45	48

Израчунати коефицијент корелације и дати тумачење истог. Одредити и коефицијент детерминације.

Решење: $r_{xy} = 0.965$, корелација је директна и одлична, $r_{xy}^2 = 93.12\%$.

 **Вежба 11.11** Подаци о висинама (у см) бамбусових биљака које су расле током летњег периода на локалитетима са одређеним бројем сунчаних дана (осунчаност) су:

висина	49	45	46	48	45	44	43	49	51	53
осунчаност	17	15	12	22	10	8	10	19	15	21

Испитати линеарну корелацију и описати је. Који је проценат промена у висини објашњен променама у броју сунчаних дана током посматраног периода?

Решење: $r_{xy} = 0.7722$, корелација је директна и добра, $r_{xy}^2 = 59.63\%$.

 **Вежба 11.12** Спроводи се истраживање са циљем испитивања везе између броја недеља које је новорођенче провело у гестационом периоду (време прове-дено у мајчиној утроби) и телесне масе (у kg) након порођаја. Случајно изабрани подаци приказани су табелом у наставку:

гестациони период (недеља)	34	29	40	36	37	41	38
телесна маса (kg)	1.9	1.4	2.8	3.1	2.7	3.6	2.7

Да ли постоји линеарна повезаност између гестационог периода и телесне масе на рођењу, и ако да, описати каква је?

Решење: $r_{xy} = 0.8936$, линеарна повезаност је директна и одлична.

 **Вежба 11.13** Месечне добити успешне програмерске компаније (у милионима РСД) и улагања у рекламу те компаније (у стотинама хиљада РСД) дати су у табели:

добити	12	12.9	13.6	14	20	29	33	26	49.2	50
реклама	2	3.2	3	4	5	4.8	6.3	6	9.1	10

Испитати линеарну корелацију и одредити коефицијент детерминације.

Решење: $r_{xy} = 0.9676$, корелација је директна и одлична, $r_{xy}^2 = 93.62\%$.

 **Вежба 11.14** Лаборант спроводи истраживање са циљем испитивања везе између индекса телесне масе (BMI) са једне и укупног холестерола (TC у mg/dl) са друге стране. Случајно изабрани подаци приказани су табелом у наставку:

BMI	21	22	23	25	27	31	32
TC	160	190	165	200	220	210	260

Израчунати Пирсонов коефицијент и објаснити добијени резултат са аспекта природе и интензитета линеарне повезаности посматраних обележја.

Решење: $r_{xy} = 0.8714$, линеарна повезаност је директна и одлична.

Линеарна регресија

Прва регресиона права:

$$\hat{y} = ax + b, \quad a = \frac{s_{xy}}{s_x^2}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

Друга регресиона права:

$$\hat{x} = cy + d, \quad c = \frac{s_{xy}}{s_y^2}, \quad d = \bar{x} - c\bar{y}$$

 **Вежба 12.1** Прикупљени подаци о просечном доходу по члану домаћинства (у десетинама хиљада РСД) и потрошњи бензина (у десетинама литара), за неколико случајно изабраних домаћинстава у једном граду, дати су у следећој табели:

доходак по члану	2	3	3	4	5	5	6	7	8	10
потрошња бензина	4	3	5	6	7	8	9	12	10	14

Одредити прву регресиону праву и приказати је на дијаграму расипања. Затим, одредити очекивану потрошњу бензина домаћинства чији чланови у просеку примају 55000 РСД.

Решење:

Означимо са X доходак по члану, а са Y потрошњу бензина. Помоћна табела је дата у решењу Вежбе 11.1, стога наводимо само израчунате статистике:

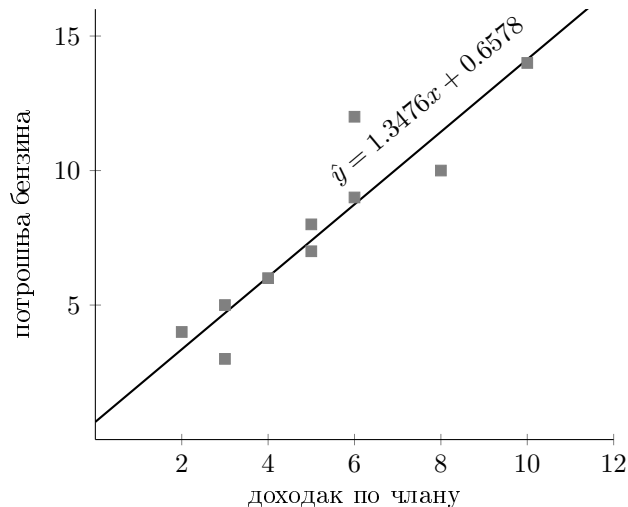
статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	5.3	$\bar{y}$	7.8	коваријанса	кофицијент корелације
s_x^2	5.61	s_y^2	11.16	s_{xy}	7.56
s_x	2.3685	s_y	3.3407	r_{xy}	0.9555

Даље, рачунамо коефицијенте прве регресионе праве:

коефицијенти прве рег. праве	
a	1.3476
b	0.6578

Дакле, једначина прве регресионе праве је

$$\hat{y} = 1.3476x + 0.6578.$$



Да бисмо прогнозирали очекивану потрошњу бензина домаћинства чији чланови у просеку примају 55000 РСД, користићемо управо прву регресиону праву, и то тако што ћемо за вредност дохотка по члану узети $x = 5.5$:

прогноза	
x	5.5
$\hat{y}$	8.0695

Закључак: Према томе, на основу расположивих података, можемо закључити да је очекивано да домаћинство које има просечни месечни приход од 55000 РСД по члану троши око 81 литар бензина.

 **Вежба 12.2** Верујући да постоји веза између тежине суве материје (т.с.м.) парадајза (у грамима) и количине калцијума (у mg/cm^3) у земљишту узгоја, истраживач је одлучио да везу опише математичким моделом, на основу следећих података:

<i>Са у тлу</i>	12	13	15	17	18	19	21	22	23	25
<i>т.с.м.</i>	2.9	3.1	4.7	4.5	4.7	5.3	6.1	6.5	6.2	6.8

Одредити неопходну количину калцијума у земљишту која би обезбедила принос плода парадајза чија би очекивана тежина суве материје била 5 грама.

Решење:
 Означимо са X количину *Са у тлу*, а са Y тежину суве материје. С обзиром да нас интересује процена за X при датој вредности за Y , користимо другу регресиону праву. Срачунате статистике за ова обележја преузећемо из Вежбе 11.2.

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	18.5	$\bar{y}$	5.08	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	16.85	s_y^2	1.6616	s_{xy}	5.13
s_x	4.1049	s_y	1.2890	r_{xy}	0.9695

На основу ових података добијамо тражене коефицијенте друге регресионе праве:

коефицијенти друге рег. праве	
c	3.0874
d	2.8161

а њена једначина гласи

$$\hat{x} = 3.0874y + 2.8161.$$

Одатле, узимајући за $y = 5$ и уврштавајући ову вредност у једначину друге регресионе праве, добијамо процену неопходног садржаја калцијума у тлу:

прогноза	
y	5
$\hat{x}$	18.2530

Закључак: Земљишту је прехраном неопходно обезбедити $18,25 \text{ } mg/cm^3$ калцијума како би било могуће постићи очекивану тежину суве материје плода парадајза од 5 грама.

 **Вежба 12.3** Уредник популарног женског часописа жели да објави чланак о томе колико је девојкама важна висина партнера. Резултати анкете у којој је учествовало неколико случајно изабраних парова су следећи:

висина момка (m)	1.76	1.75	1.74	1.86	1.77	1.83	1.97	1.75
висина девојке (m)	1.71	1.67	1.77	1.69	1.69	1.78	1.83	1.64

Какве је резултате о пожељној висини момка за девојку високу 175 cm објавио овај часопис?

Решење:

Нека је са X означена висина момка, а са Y висина девојке. С обзиром на постављено питање, закључујемо да треба одредити једначину друге регресионе праве. Вежба 11.3. даје нам срачунате статистике ових обележја, на основу којих можемо израчунати и потребне регресионе коефицијенте.

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	1.8038	$\bar{y}$	1.7225	коваријанса	коефицијент корелације
s_x^2	0.0055	s_y^2	0.0036	s_{xy}	0.0029
s_x	0.0745	s_y	0.0602	r_{xy}	0.6535

коефицијенти друге рег. праве	
c	0.8092
d	0.4100

Једначина друге регресионе праве гласи

$$\hat{x} = 0.8092y + 0.41.$$

Да бисмо проценили пожељну висину момка чија је девојка висока 175 cm , уврстићемо у једначину регресионе праве вредност $y = 1.75$.

прогноза	
y	1.75
$\hat{x}$	1.8260

Закључак: Истраживање популарног часописа дошло је до закључка да очекивана пожељна висина момка, чија је девојка висока 175 cm износи 183 cm .

 **Вежба 12.4** При производњи мултивитаминског сока претпоставља се да време ферментације (в.ф. у данима) зависи од количине додатог шећера (у kg). На случајном узорку добијени су подаци:

шећера	1.0	2.2	2.7	4.0	4.9	5.6	6.5	7.3	8.8	9.8
в.ф.	24	18	17	15	14	10	8	7	5	4

Одредити прву регресиону праву и приказати је на дијаграму расипања. Које је очекивано време ферментације сока у који је додато 5 kg шећера?

Решење:
Нека је X количина додатог шећера, а Y време ферментације. Позивајући се на израчунате вредности појединачних, али и заједничких статистика датих обележја (види Вежбу 11.4.), имамо:

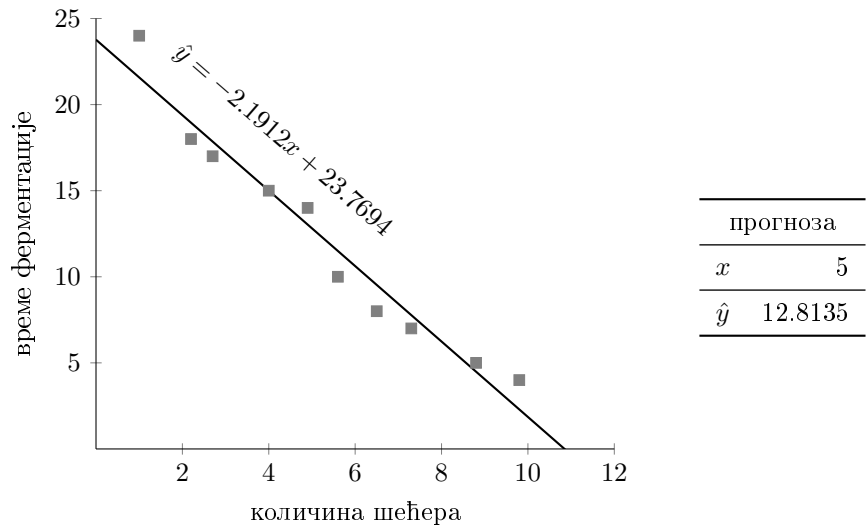
статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	5.28	$\bar{y}$	12.2	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	7.4736	s_y^2	37.56	s_{xy}	-16.376
s_x	2.7338	s_y	6.1286	r_{xy}	-0.9774

коэффициенти прве рег. праве	
a	-2.1912
b	23.7694

Једначина прве регресионе праве гласи

$$\hat{y} = -2.1912x + 23.7694.$$

На графику је приказано колико добро ова регресиона права фитује дате податке.



Да бисмо дали очекивано време ферментације у случају употребе 5 kg шећера, уврстићемо у једначину регресионе праве вредност $x = 5$.

Закључак: На основу датог узорка констатујемо да је очекивано време ферментације сока у који је додато 5 kg шећера приближно 13 дана.

 **Вежба 12.5** Уредник популарног мушког портала припрема чланак о утицају нивоа физичких активности на радну способност. За један од показатеља изабрана је корелација између броја сати физичког вежбања дневно и ефикасности на послу, израженој кроз време у сатима потребним да се обаве радни задаци. Подаци прикупљени на случајном узорку од испитаника старости између 30 и 35 година дати су у табели:

физичка активност	1	2	2	3	3	2	4	4
ефикасност	6	5.5	5	5	4.5	6	4	3.5

Какве је резултате објавио часопис о томе колика је очекивана ефикасност мушкарца који не ради физичке вежбе и о томе колико треба вежбати да би очекивана ефикасност износила 2 сата?

Решење:

Нека је X време које испитаник проведе бавећи се физичком активношћу, а Y његова ефикасност у обављању радних задатака. Позивамо се на резултате Вежбе 11.5.

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	2.6250	$\bar{y}$	4.9375	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	0.9844	s_y^2	0.7148	s_{xy}	-0.7734
s_x	0.9922	s_y	0.8455	r_{xy}	-0.922

коэффициенти прве рег. праве		прогноза	
a	-0.7857	x	0
b	7.0000	$\hat{y}$	7.0000

Закључак: На основу прикупљених података може се закључити да је очекивано потребно време за обављање радних задатака мушкарца који не вежба 7 сати.

коэффициенти друге рег. праве		прогноза	
c	-1.0820	y	2
d	7.9672	$\hat{x}$	5.8033

Закључак: Дати узорак сугерише да је неопходно провести око шест сати бавећи се физичком активношћу како би време за обављање радних задатака било 2 сата.

Вежба 12.6 У једном предузећу, током 6 месеци, испитује се повезаност између броја кишних дана у месецу и броја изостанака са посла током тог месеца. Прикупљени подаци су:

број кишних дана	16	11	10	8	7	2
број изостанака	17	13	13	11	10	5

На основу овог узорка, одредити очекивани број изостанака са посла ако је читав месец сунчан, а затим представити податке дијаграмом расипања и уцртати регресиону праву на исти.

Решење:

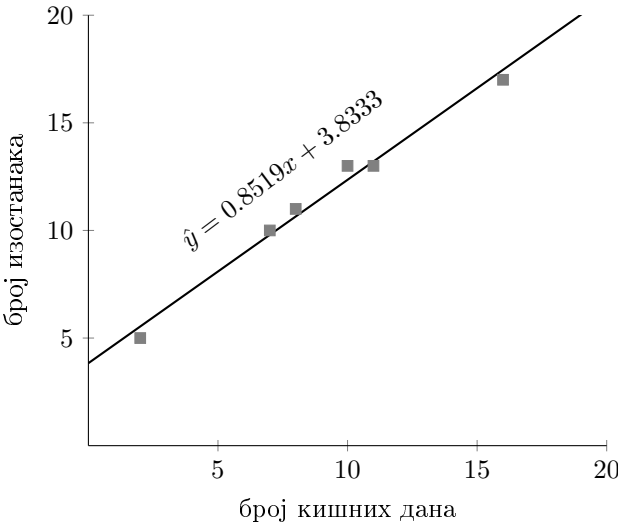
Означимо са X број кишних дана, а са Y број изостанака са посла у току једног месеца. На основу резултата из Вежбе 11.6, имамо:

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	9	$\bar{y}$	11.5	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	18	s_y^2	13.25	s_{xy}	15.3333
s_x	4.2426	s_y	3.6401	r_{xy}	0.9929

Под претпоставком да је читав месец сунчан, то значи да је број кишних дана $x = 0$. За прогнозу тада користимо прву регресиону праву:

коэффициенти прве рег. праве	прогноза
a	0.8519 x 0
b	3.8333 $\hat{y}$ 3.8333

Закључак: Током месеца у којем нема кишних дана очекивани број изостанака са посла је приближно 4.



 **Вежба 12.7** Редакција спортског часописа објављује чланак о томе колико конзумирање засићених масти утиче на кондицију. За потребе ове анализе испитује се корелација између дневне количине унетих засићених масти у грамима и времена потребног испитанику да истрчи 100 метара у секундама:

засићених масти	50	55	60	65	70	75	80
време	12.5	12.9	13	14	14.8	15	15

На основу овог узорка помоћу линеарне регресије одредити очекивано пролазно време испитаника, ако је дневна количина унетих засићених масти 100 грама. Колико је потребно да испитаник дневно унесе засићених масти како би очекивано време трчања било 10 секунди?

Решење:
Ако означимо са X количину засићених масти у грамима, а са Y време у секундама, тада из Вежбе 11.7 читамо следеће статистике:

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	65	$\bar{y}$	13.8857	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	100	s_y^2	1.0012	s_{xy}	9.6429
s_x	10	s_y	1.0006	r_{xy}	0.9637

коэффициенти прве рег. праве		прогноза	
a	0.0964	x	100
b	7.6179	$\hat{y}$	17.2607

Закључак: Ако је дневна количина унетих засићених масти 100 грама, тада се може очекивати пролазно време испитаника око 17 секунди.

коэффициенти друге рег. праве		прогноза	
c	9.6311	y	10
d	-68.7342	$\hat{x}$	27.5764

Закључак: Очекивано је да испитаник дневно унесе око 27 грама засићених масти како би дистанцу од 100 метара истрачао за 10 секунди.

 **Вежба 12.8** Кошаркашка асоцијација врши статистичко истраживање и том приликом је прикупљен прост случајан узорак од 10 играча кошаркашког тима, чије су висине (y *ст*) и телесне масе (y *kg*) следеће:

висина	186	189	190	192	193	193	198	201	203	205
маса	85	85	86	90	87	91	93	103	100	101

Дати прогнозу очекиване масе играча који је висок 208 *ст*.

Решење:

Ако са X означимо висину а са Y телесну масу играча, онда на основу рачуна из Вежбе 11.8 имамо:

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	195	$\bar{y}$	92.1	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	36.8	s_y^2	43.09	s_{xy}	37.6
s_x	6.0663	s_y	6.5643	r_{xy}	0.9442

Будући да се у задатку тражи прогноза очекиване масе спрам задате висине, потребно је да одредимо једначину прве регресионе праве:

коэффициенти прве рег. праве		прогноза	
a	1.0217	x	208
b	-107.1391	$\hat{y}$	105.3826

Закључак: На основу датих података модел линеарне регресије прогнозира очекивану телесну масу од 105 kg за играча чија је висина 208 cm.

 **Вежба 12.9** Истраживач је, услед пораста броја Интернет провајдера, одлучио да испита да ли постоји веза између месечне цене услуге провајдера (у стотинама РСД), и степена задовољства купаца пруженом услугом (на скали од 1 до 10, при чему 1 представља тотално незадовољство, а 10 апсолутно задовољство клијента). Подаци су прикупљени и представљени у табели:

цена	11	18	17	15	9	5	12	19	22	25
задовољство	6	8	10	4	9	6	3	5	2	10

а) Која је процена очекиваног задовољства клијента чији месечни издаци за поменућу услугу износе 1350 РСД?

б) Одредити процену очекиване цене услуге месечне накнаде клијента чије је задовољство дато са 7.5.

Решење:

Нека је X цена услуге, а Y задовољство корисника услугом. Статистике за ова обележја смо срачунали у Вежби 11.9:

статистике за X		статистике за Y			
$\bar{x}$	15.3	$\bar{y}$	7.8	коваријанса	коэффициент корелације
s_x^2	33.81	s_y^2	2.76	s_{xy}	5.86
s_x	5.8146	s_y	1.6613	r_{xy}	0.6066

коэффициенти прве рег. праве		прогноза	
a	0.1733	x	13.5
b	5.1482	$\hat{y}$	7.488

Закључак: Процена очекиваног задовољства клијента чији месечни издаци за интернет услугу износе 1350 РСД је 7.5.

коэффициенти друге рег. праве		прогноза	
c	2.1232	y	7.5
d	-1.2609	$\hat{x}$	14.663

Закључак: Очекивана цена услуге месечне накнаде клијента који је услугу провајдера оценио са 7.5 износи 1466 РСД.



Вежбе за самостални рад

Вежба 12.10 У склопу евалуације рада и способности запослених, сваки од 6 службеника одрадио је тест способности, са намером да се, на основу резултата теста, утврди веза између успеха на тесту и остварене продаје у првом наредном месецу ангажмана (у стотинама еура). Подаци су обједињени и дати табеларно:

успех на тесту	25	42	33	54	29	36
остварена продаја	42	72	50	90	45	48

Одредити једначину регресионе праве и дати прогнозу очекиване продаје службеника који је на тесту освојио 47 поена.

Решење: $\hat{y} = 1.7702x - 6.7802$, $\hat{y} = 76$.

Вежба 12.11 Подаци о висинама (у ст) бамбусових биљака које су расле на локалитетима са одређеним бројем сунчаних дана су:

висина	49	45	46	48	45	44	43	49	51	53
осунчаност	17	15	12	22	10	8	10	19	15	21

а) Одредити једначину модела који описује очекивану висину биљке спрам броја сунчаних дана током посматраног периода.

Решење: $\hat{x} = 0.5134y + 39.6505$.

б) Дати прогнозу очекиваног броја сунчаних дана у овом периоду ако је висина бамбусове биљке износила пола метра.

Решење: $\hat{y} = 1.1615x - 40.0404$, $\hat{y} = 18$.

Вежба 12.12 Спроводи се истраживање са циљем испитивања везе између броја недеља које је новорођенче провело у гестационом периоду (време у мајчиној утроби) и телесне масе (у kg) након порођаја. Подаци су:

гестациони период (недеља)	34	29	40	36	37	41	38
телесна маса (kg)	1.9	1.4	2.8	3.1	2.7	3.6	2.7

а) Формулисати математички модел који описује повезаност између гестационог периода и телесне масе новорођенчета.

Решење: $\hat{y} = 0.1627x - 3.3276$.

б) Колика је очекивана телесна маса новорођенчета које је у гестационој фази провело 30 недеља?

Решење: $\hat{y} = 1.5$.

 **Вежба 12.13** Месечне добити успешне програмерске компаније (у милионима РСД) и улагања у рекламу те компаније (у стотинама хиљада РСД) дати су у табели:

добит	12	12.9	13.6	14	20	29	33	26	49.2	50
реклама	2	3.2	3	4	5	4.8	6.3	6	9.1	10

а) Одредити једначину регресионе праве која описује линеарну повезаност између очекиване месечне добити у зависности од улагања у рекламу.

Решење: $\hat{x} = 5.3791y - 2.7543$.

б) Дати прогнозу очекиване месечне добити компаније ако је у маркетинг услуга уложено 550000 динара.

Решење: $\hat{x} = 26.8$.

 **Вежба 12.14** Лаборант спроводи истраживање са циљем испитивања везе између индекса телесне масе (BMI) са једне и укупног холестерола (ТС у mg/dl) са друге стране. Случајно изабрани подаци приказани су табелом у наставку:

BMI	21	22	23	25	27	31	32
ТС	160	190	165	200	220	210	260

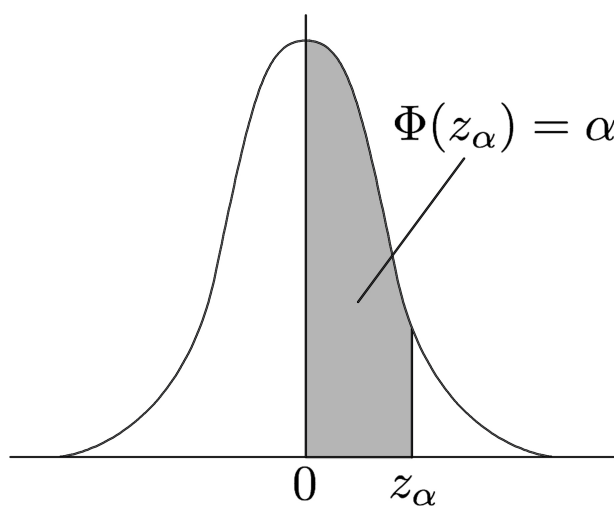
а) Одредити једначину регресионе праве која описује линеарну повезаност између оцекивног ТС у зависности од BMI.

Решење: $\hat{y} = 6.8734x + 22.9873$.

б) Користећи модел из првог дела задатка, који је ниво очекиваног укупног холестерола особе чији индекс телесне масе износи 29?

Решење: $\hat{y} = 222.32$.

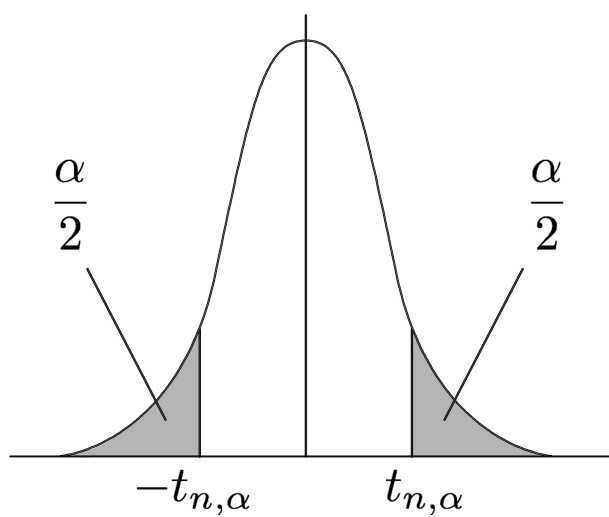
z-таблица



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.0000	0.26	0.1026	0.52	0.1985	0.78	0.2823	1.04	0.3508	1.30	0.4032
0.01	0.0040	0.27	0.1064	0.53	0.2019	0.79	0.2852	1.05	0.3531	1.31	0.4049
0.02	0.0080	0.28	0.1103	0.54	0.2054	0.80	0.2881	1.06	0.3554	1.32	0.4066
0.03	0.0120	0.29	0.1141	0.55	0.2088	0.81	0.2910	1.07	0.3577	1.33	0.4082
0.04	0.0160	0.30	0.1179	0.56	0.2123	0.82	0.2939	1.08	0.3599	1.34	0.4099
0.05	0.0199	0.31	0.1217	0.57	0.2157	0.83	0.2967	1.09	0.3621	1.35	0.4115
0.06	0.0239	0.32	0.1255	0.58	0.2190	0.84	0.2995	1.10	0.3643	1.36	0.4131
0.07	0.0279	0.33	0.1293	0.59	0.2224	0.85	0.3023	1.11	0.3665	1.37	0.4147
0.08	0.0319	0.34	0.1331	0.60	0.2257	0.86	0.3051	1.12	0.3686	1.38	0.4162
0.09	0.0359	0.35	0.1368	0.61	0.2291	0.87	0.3078	1.13	0.3708	1.39	0.4177
0.10	0.0398	0.36	0.1406	0.62	0.2324	0.88	0.3106	1.14	0.3729	1.40	0.4192
0.11	0.0438	0.37	0.1443	0.63	0.2357	0.89	0.3133	1.15	0.3749	1.41	0.4207
0.12	0.0478	0.38	0.1480	0.64	0.2389	0.90	0.3159	1.16	0.3770	1.42	0.4222
0.13	0.0517	0.39	0.1517	0.65	0.2422	0.91	0.3186	1.17	0.3790	1.43	0.4236
0.14	0.0557	0.40	0.1554	0.66	0.2454	0.92	0.3212	1.18	0.3810	1.44	0.4251
0.15	0.0596	0.41	0.1591	0.67	0.2486	0.93	0.3238	1.19	0.3830	1.45	0.4265
0.16	0.0636	0.42	0.1628	0.68	0.2517	0.94	0.3264	1.20	0.3849	1.46	0.4279
0.17	0.0675	0.43	0.1664	0.69	0.2549	0.95	0.3289	1.21	0.3869	1.47	0.4292
0.18	0.0714	0.44	0.1700	0.70	0.2580	0.96	0.3315	1.22	0.3888	1.48	0.4306
0.19	0.0753	0.45	0.1736	0.71	0.2611	0.97	0.3340	1.23	0.3907	1.49	0.4319
0.20	0.0793	0.46	0.1772	0.72	0.2642	0.98	0.3365	1.24	0.3925	1.50	0.4332
0.21	0.0832	0.47	0.1808	0.73	0.2673	0.99	0.3389	1.25	0.3944	1.51	0.4345
0.22	0.0871	0.48	0.1844	0.74	0.2704	1.00	0.3413	1.26	0.3962	1.52	0.4357
0.23	0.0910	0.49	0.1879	0.75	0.2734	1.01	0.3438	1.27	0.3980	1.53	0.4370
0.24	0.0948	0.50	0.1915	0.76	0.2764	1.02	0.3461	1.28	0.3997	1.54	0.4382
0.25	0.0987	0.51	0.1950	0.77	0.2794	1.03	0.3485	1.29	0.4015	1.55	0.4394

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1.56	0.4406	1.82	0.4656	2.08	0.4812	2.34	0.4904	2.60	0.4953	2.86	0.4979		
1.57	0.4418	1.83	0.4664	2.09	0.4817	2.35	0.4906	2.61	0.4955	2.87	0.4979		
1.58	0.4429	1.84	0.4671	2.10	0.4821	2.36	0.4909	2.62	0.4956	2.88	0.4980		
1.59	0.4441	1.85	0.4678	2.11	0.4826	2.37	0.4911	2.63	0.4957	2.89	0.4981		
1.60	0.4452	1.86	0.4686	2.12	0.4830	2.38	0.4913	2.64	0.4959	2.90	0.4981		
1.61	0.4463	1.87	0.4693	2.13	0.4834	2.39	0.4916	2.65	0.4960	2.91	0.4982		
1.62	0.4474	1.88	0.4699	2.14	0.4838	2.40	0.4918	2.66	0.4961	2.92	0.4982		
1.63	0.4484	1.89	0.4706	2.15	0.4842	2.41	0.4920	2.67	0.4962	2.93	0.4983		
1.64	0.4495	1.90	0.4713	2.16	0.4846	2.42	0.4922	2.68	0.4963	2.94	0.4984		
1.65	0.4505	1.91	0.4719	2.17	0.4850	2.43	0.4925	2.69	0.4964	2.95	0.4984		
1.66	0.4515	1.92	0.4726	2.18	0.4854	2.44	0.4927	2.70	0.4965	2.96	0.4985		
1.67	0.4525	1.93	0.4732	2.19	0.4857	2.45	0.4929	2.71	0.4966	2.97	0.4985		
1.68	0.4535	1.94	0.4738	2.20	0.4861	2.46	0.4931	2.72	0.4967	2.98	0.4986		
1.69	0.4545	1.95	0.4744	2.21	0.4864	2.47	0.4932	2.73	0.4968	2.99	0.4986		
1.70	0.4554	1.96	0.4750	2.22	0.4868	2.48	0.4934	2.74	0.4969	3.00	0.4987		
1.71	0.4564	1.97	0.4756	2.23	0.4871	2.49	0.4936	2.75	0.4970	3.01	0.4987		
1.72	0.4573	1.98	0.4761	2.24	0.4875	2.50	0.4938	2.76	0.4971	3.02	0.4987		
1.73	0.4582	1.99	0.4767	2.25	0.4878	2.51	0.4940	2.77	0.4972	3.03	0.4988		
1.74	0.4591	2.00	0.4772	2.26	0.4881	2.52	0.4941	2.78	0.4973	3.04	0.4988		
1.75	0.4599	2.01	0.4778	2.27	0.4884	2.53	0.4943	2.79	0.4974	3.05	0.4989		
1.76	0.4608	2.02	0.4783	2.28	0.4887	2.54	0.4945	2.80	0.4974	3.06	0.4989		
1.77	0.4616	2.03	0.4788	2.29	0.4890	2.55	0.4946	2.81	0.4975	3.07	0.4989		
1.78	0.4625	2.04	0.4793	2.30	0.4893	2.56	0.4948	2.82	0.4976	3.08	0.4990		
1.79	0.4633	2.05	0.4798	2.31	0.4896	2.57	0.4949	2.83	0.4977	3.09	0.4990		
1.80	0.4641	2.06	0.4803	2.32	0.4898	2.58	0.4951	2.84	0.4977	3.10	0.4990		
1.81	0.4649	2.07	0.4808	2.33	0.4901	2.59	0.4952	2.85	0.4978	3.11	0.4991		

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
3.12	0.4991	3.38	0.4996	3.64	0.4999	3.90	0.5000
3.13	0.4991	3.39	0.4997	3.65	0.4999	3.91	0.5000
3.14	0.4992	3.40	0.4997	3.66	0.4999	3.92	0.5000
3.15	0.4992	3.41	0.4997	3.67	0.4999	3.93	0.5000
3.16	0.4992	3.42	0.4997	3.68	0.4999	3.94	0.5000
3.17	0.4992	3.43	0.4997	3.69	0.4999	3.95	0.5000
3.18	0.4993	3.44	0.4997	3.70	0.4999	3.96	0.5000
3.19	0.4993	3.45	0.4997	3.71	0.4999	3.97	0.5000
3.20	0.4993	3.46	0.4997	3.72	0.4999	3.98	0.5000
3.21	0.4993	3.47	0.4997	3.73	0.4999	3.99	0.5000
3.22	0.4994	3.48	0.4997	3.74	0.4999		
3.23	0.4994	3.49	0.4998	3.75	0.4999		
3.24	0.4994	3.50	0.4998	3.76	0.4999		
3.25	0.4994	3.51	0.4998	3.77	0.4999		
3.26	0.4994	3.52	0.4998	3.78	0.4999		
3.27	0.4995	3.53	0.4998	3.79	0.4999		
3.28	0.4995	3.54	0.4998	3.80	0.4999		
3.29	0.4995	3.55	0.4998	3.81	0.4999		
3.30	0.4995	3.56	0.4998	3.82	0.4999		
3.31	0.4995	3.57	0.4998	3.83	0.4999		
3.32	0.4995	3.58	0.4998	3.84	0.4999		
3.33	0.4996	3.59	0.4998	3.85	0.4999		
3.34	0.4996	3.60	0.4998	3.86	0.4999		
3.35	0.4996	3.61	0.4998	3.87	0.4999		
3.36	0.4996	3.62	0.4999	3.88	0.4999		
3.37	0.4996	3.63	0.4999	3.89	0.4999		

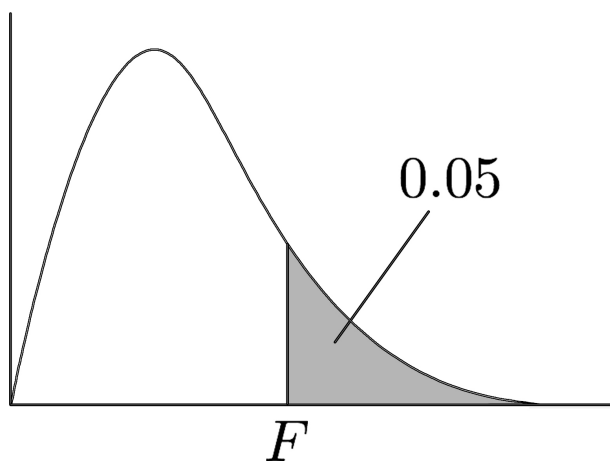
t -таблица

$n \backslash \alpha$	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	25.452	63.656	127.321	636.578
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.205	9.925	14.089	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.177	5.841	7.453	12.924
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.495	4.604	5.598	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.163	4.032	4.773	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.969	3.707	4.317	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.841	3.499	4.029	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.752	3.355	3.833	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.685	3.250	3.690	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.634	3.169	3.581	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.593	3.106	3.497	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.560	3.055	3.428	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.533	3.012	3.372	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.510	2.977	3.326	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.490	2.947	3.286	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.473	2.921	3.252	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.458	2.898	3.222	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.445	2.878	3.197	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.433	2.861	3.174	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.423	2.845	3.153	3.850

$n \setminus \alpha$	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.414	2.831	3.135	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.405	2.819	3.119	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.398	2.807	3.104	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.391	2.797	3.091	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.385	2.787	3.078	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.379	2.779	3.067	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.373	2.771	3.057	3.689
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.368	2.763	3.047	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.364	2.756	3.038	3.660
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.360	2.750	3.030	3.646
31	0.682	0.853	1.054	1.309	1.696	2.040	2.356	2.744	3.022	3.633
32	0.682	0.853	1.054	1.309	1.694	2.037	2.352	2.738	3.015	3.622
33	0.682	0.853	1.053	1.308	1.692	2.035	2.348	2.733	3.008	3.611
34	0.682	0.852	1.052	1.307	1.691	2.032	2.345	2.728	3.002	3.601
35	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.342	2.724	2.996	3.591
36	0.681	0.852	1.052	1.306	1.688	2.028	2.339	2.719	2.990	3.582
37	0.681	0.851	1.051	1.305	1.687	2.026	2.336	2.715	2.985	3.574
38	0.681	0.851	1.051	1.304	1.686	2.024	2.334	2.712	2.980	3.566
39	0.681	0.851	1.050	1.304	1.685	2.023	2.331	2.708	2.976	3.558
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.329	2.704	2.971	3.551

$n \backslash \alpha$	0.500	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
41	0.681	0.850	1.050	1.303	1.683	2.020	2.327	2.701	2.967	3.544
42	0.680	0.850	1.049	1.302	1.682	2.018	2.325	2.698	2.963	3.538
43	0.680	0.850	1.049	1.302	1.681	2.017	2.323	2.695	2.959	3.532
44	0.680	0.850	1.049	1.301	1.680	2.015	2.321	2.692	2.956	3.526
45	0.680	0.850	1.049	1.301	1.679	2.014	2.319	2.690	2.952	3.520
46	0.680	0.850	1.048	1.300	1.679	2.013	2.317	2.687	2.949	3.515
47	0.680	0.849	1.048	1.300	1.678	2.012	2.315	2.685	2.946	3.510
48	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.011	2.314	2.682	2.943	3.505
49	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.010	2.312	2.680	2.940	3.500
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.311	2.678	2.937	3.496
55	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.004	2.304	2.668	2.925	3.476
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.299	2.660	2.915	3.460
70	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.291	2.648	2.899	3.435
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.284	2.639	2.887	3.416
90	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.280	2.632	2.878	3.402
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.276	2.626	2.871	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.270	2.617	2.860	3.373

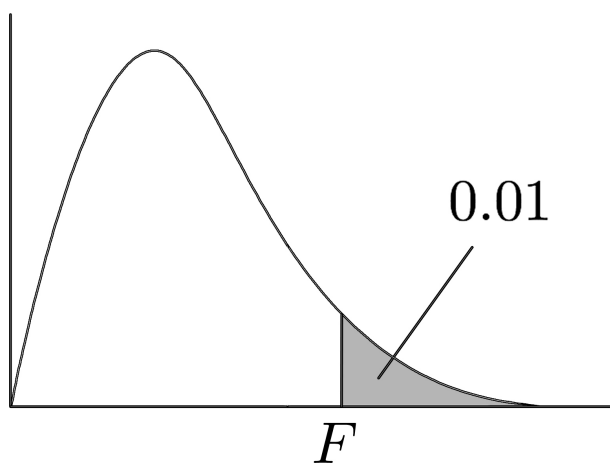
F -таблица, $\alpha = 0.05$



$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24
1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	243.91	249.05
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.41	19.45
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.74	8.64
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.91	5.77
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.68	4.53
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.00	3.84
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.57	3.41
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.28	3.12
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.07	2.90
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.91	2.74
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.79	2.61
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.69	2.51
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.60	2.42
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.53	2.35
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.48	2.29
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.42	2.24
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.38	2.19
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.34	2.15
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.31	2.11
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.28	2.08
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.00	1.79
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.88	1.65

D

F-таблица, $\alpha = 0.01$



$n_1 \backslash n_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6106.32	6234.63
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.42	99.46
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.05	26.60
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.37	13.93
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	9.89	9.47
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.72	7.31
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.47	6.07
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.67	5.28
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.11	4.73
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.71	4.33
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.40	4.02
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.16	3.78
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	3.96	3.59
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.80	3.43
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.67	3.29
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.55	3.18
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.46	3.08
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.37	3.00
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.30	2.92
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.23	2.86
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.66	2.29
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.42	2.03

Литература

- [1] Agresti, A.: *Statistics: The Art and Science of Learning from Data*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2006.
- [2] Anderson, D. R., Sweeney, D. J., Williams, T. A.: *Essentials of Statistics for Business and Economics, 8th Edition*, South-Western/Thomson Learning, 2002.
- [3] Bittinger, M. L., Ellenbogen, D. J., Surgent, S. J.: *Calculus and its Applications 10th edition*, Pearson Education Inc., Boston, 2012.
- [4] Bodine, E. N., Lenhart, S., Gross, L. J.: *Mathematics for the Life Sciences*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2014.
- [5] Boyce, E. W., Di Prima, C. R.: *Elementary differential equations and boundary value problems 8th edition*, John Wiley and Sons, Hoboken, New Jersey, 2005.
- [6] Chase, W., Brown, F.: *General Statistics, 2nd Edition*, John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [7] Cvetković, Lj.: *Matematika sa statistikom*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1996.
- [8] Cvetković, Lj., Kostić, V.: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike*, Symbol, Novi Sad, 2002.
- [9] Cvetković, Lj., Lozanov Crvenković, Z.: *Verovatnoća i statistika - zbirka zadataka*, Futura publikacije, Novi Sad, 2002.
- [10] Cvetković, Lj.: *Poslovna statistika*, Futura publikacije, Novi Sad, 2006.
- [11] Franklin, D. D., Waits, B. K., Foley, G. D., Kennedy, D., Bock, D. E.: *Precalculus: Graphical, Numerical, Algebraic*, Pearson, Boston, 2015.
- [12] Johnson, R. A., Bhattacharya, G. K.: *Statistics: Principles and Methods, 2nd Edition*, John Wiley and Sons, New York, 1992.
- [13] Norman, D., Wolczuk, D.: *Introduction to Linear Algebra for Science and Engineering*, Pearson, Boston, 2012.

- [14] Paulson, D. S.: *Biostatistics and Microbiology: A Survival Manual*, Springer, New York, 2008.
- [15] Popović, B., Ristić, M.: *Statistika u psihologiji*, Mrlješ, Beograd, 2001.
- [16] Stewart, J.: *Essential Calculus: Early Transcendentals, Second Edition*, Cengage Learning, Boston, 2012.
- [17] Stojković, M.: *Statistika*, Ekonomski fakultet, Subotica, 2001.
- [18] Sullivan III, M.: *Statistics: Informed Decisions Using Data, 2nd Edition*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- [19] Arsham, H.: *Statistical Thinking for Managerial Decisions*,
<http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/Business-stat/opre504.htm>
- [20] <https://catalogimages.wiley.com/images/db/pdf/9781119570271.excerpt.pdf>
- [21] http://www.bumatematikozelders.com/altsayfa/matrix_theory/system_of_linear_equations_and_matrices.pdf
- [22] <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc4.htm>
- [23] <http://www.bizstats.com/>

CIP - Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

51(075.8)(076)
519.21/.24(075.8)(076)

ЦВЕТКОВИЋ, Љиљана, 1960-

Математика са статистиком [Електронски извор] : збирка задатака / Љиљана Цветковић, Ернест Шанца. - Нови Сад : Природно-математички факултет, Департман за математику и информатику, 2025

Начин приступа

(URL): https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/matinf/cvetkovic_sanca_matematika_sa_statikom_zbirka_zadataka.pdf. - Опис заснован на стању на дан 20.11.2025. - Насл. с насловног екрана. - Библиографија.

ISBN 978-86-7031-683-6

1. Шанца, Ернест, 1991-

а) Математика - Задаци б) Математичка статистика - Задаци

COBISS.SR-ID 180413705

Одлуком наставно-научног већа Природно-математичког факултета у Новом Саду 13. новембра 2025. године, одобрено је публикавање и употреба ове збирке задатака.